Особенности динамического возбуждения слоистых сред внутренними источниками колебаний

Р.Р. Кадыров, А.А. Ляпин

Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону

Задачи расчета поверхностных сооружений при динамических воздействиях внутренними источниками колебаний связаны с проблемами сейсмостойкого строительства, возведением зданий в зонах, близких к линиям метрополитена мелкого и среднего заложения. При этом основные особенности такого воздействия связаны как со спектральным составом возбуждения, так и строением неоднородного грунта. Во многих случаях грунт можно моделировать слоисто–неоднородной упругой или вязкоупругой средой.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача возбуждения гармонических колебаний внутренним источником, заглубленным в слоисто-неоднородную полуплоскость.

Пусть область, занимаемая линейно-упругой средой представляет собой многослойную полуплоскость D (Рис. 1).

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$$

$D_1 = \{x > 0; \quad y \in (-\infty, +\infty)\}$- полуплоскость;

$D_j = \{x \in (-x_j, -x_{j-1});\ y \in (-\infty, +\infty)\},\ x_j = \sum_{i=2}^{j} h_i;$ -j-й слой (j=2,...,N);

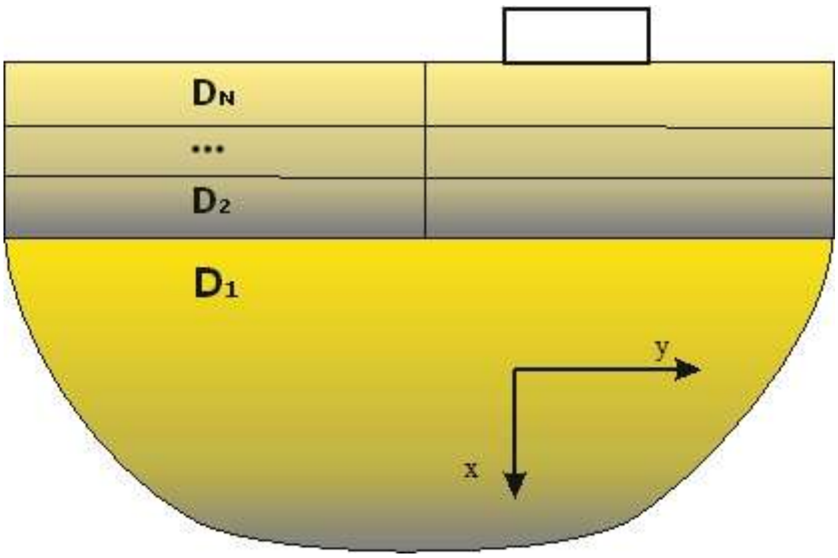

Рис. 1

Физические свойства среды описываются плотностью ρ_j и скоростями распространения поперечных и продольных волн: V_{Sj}, V_{Pj}.

Условия стыковки разнородных сред считаются жесткими с требованием непрерывности векторов перемещений и напряжений при переходе через границы раздела.

В точке с координатами $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ действует сосредоточенный источник гармонических с частотой ω колебаний:

$$\mathbf{P}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\cdot\exp(-i\omega t)$$

2. Построение решения

Решение поставленной задачи соответствует построению матрицы фундаментальных решений точечного источника, реализация которого осуществляется с помощью принципа суперпозиции.

В основе данного построения решения для многослойной среды лежит вывод определяющих соотношений для одного слоя с заданными на его гранях векторами напряжений.

Пусть в локальной системе координат для j-го слоя: $(x, y): x \in (0, h_j),\ y \in (-\infty, \infty)$ амплитудные функции перемещений при действии сосредоточенного в $\mathbf{r}_0$ источника имеют вид:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \left\{U_1^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}), U_2^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\right\} = \left\{U_x^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}), U_y^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\right\}.$$

Функции $U_k^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям движения Ляме [1]

$$(\lambda_j + 2\mu_j)\, graddiv\, \mathbf{U} - \mu_j\, rotrot\, \mathbf{U} = -\rho_j \omega^2 \mathbf{U},$$

λ_j и μ_j - постоянные Ляме: $V_{P\,j} = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}$, $V_{S\,j} = \sqrt{\dfrac{\mu_j}{\rho_j}}$.

Согласно предлагаемому методу данные функции будем разыскивать в виде

$$U_k^{(j)} = U_k^{(j,1)} + U_k^{(j,2)} + U_k^{(j,3)}.$$

(При аналогичном рассмотрении полуплоскости считаем $U_k^{(j,1)} \equiv 0$).

Здесь слагаемые $U_k^{(j,n)}(x, y),\quad n = 1,2$ данного представления являются решениями уравнений Ламе для однородной полуплоскости с удовлетворением граничных условий:

$$\sigma_x = \mathbf{t}^{(j,1)}(0, y) = \mu_j\, \mathbf{X}^{(j,1)}(y), \quad \tau_{xy} = \mathbf{t}^{(j,2)}(h_j, y) = \mu_j\, \mathbf{X}^{(j,2)}(y).$$

Вектор перемещений $\mathbf{U}^{(j,1)}(x, y)$ представим в виде интеграла Фурье через трансформанты вектора напряжений $\mathbf{X}^{(j,1)}(y)$:

$$\mathbf{U}^{(j,1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{P}^{(j,1)}(x, \alpha)\cdot \tilde{\mathbf{X}}^{(j,1)}(\alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha. \qquad (1)$$

Контур Γ определен принципом предельного поглощения: обходит положительные полюса подынтегральной функции снизу, отрицательные - сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью. Элементы матрицы $\mathbf{P}^{(j,1)}$ имеют вид:

$$P_{11}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{\sigma_{j1}}{\Delta_R}\left\{-\zeta_j^2 e_{j1}+2\alpha^2 e_{j2}\right\},\quad P_{12}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{i\alpha}{\Delta_R}\left\{-2\sigma_{j1}\sigma_{j2}e_{j1}+\zeta_j^2 e_{j2}\right\},$$

$$P_{21}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{i\alpha}{\Delta_R}\left\{-\zeta_j^2 e_{j1}+2\sigma_{j1}\sigma_{j2}e_{j2}\right\},\qquad P_{22}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{\sigma_{j2}}{\Delta_R}\left\{2\alpha^2 e_{j1}-\zeta_j^2 e_{j2}\right\},$$

$$\Delta_R=-4\alpha^2\sigma_{j1}\sigma_{j2}+\varsigma_j^4,\quad e_{jk}=e^{-\sigma_{jk}x},$$

$$\zeta_j^2=\alpha^2+\sigma_{j2}^2\,;\quad \sigma_{jk}^2=\alpha^2-\theta_{jk}^2\,;\quad \theta_{j1}=\frac{\omega}{V_{pj}};\quad \theta_{j2}=\frac{\omega}{V_{sj}},$$

V_{pj},V_{sj} - скорости распространения волн в соответствующей среде.

Аналогично формуле (1) определяются перемещения для полуплоскости $x\le h_j$ через функции $\tilde{\mathbf{X}}^{(j,2)}(\alpha)$, где для элементов $P_{nm}^{(j,2)}(x,\alpha)$ справедливы соотношения:

$$P_{nm}^{(j,2)}(x,\alpha)=(-1)^{\delta_{nm}}P_{nm}^{(j,1)}(h_j-x,\alpha),\ \mathrm{n,m}=1,2,\quad \delta_{nm}\text{- символ Кронекера.}$$

Определяя напряженное состояние слоя в виде суммы соответствующих решений для двух полуплоскостей, получим:

$$col\{\sigma_x,\tau_{xy}\}^{(j,1)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{W}^{(j,1)}(x,\alpha)\cdot\tilde{\mathbf{X}}^{(j,1)}(\alpha)e^{-i\alpha y}d\alpha, \qquad (2)$$

где

$$W_{11}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{1}{\Delta_R}\left\{\zeta_j^4 e_{j1}-4\sigma_{j1}\sigma_{j2}\alpha^2 e_{j2}\right\},\quad W_{12}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{2i\alpha\sigma_{j2}\zeta_j^2}{\Delta_R}\left\{e_{j1}-e_{j2}\right\},$$

$$W_{21}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{2i\alpha\sigma_{j1}\zeta_j^2}{\Delta_R}\left\{e_{j1}-e_{j2}\right\},\ W_{22}^{(j,1)}(x,\alpha)=\frac{1}{\Delta_R}\left\{-4\sigma_{j1}\sigma_{j2}\alpha^2 e_{j1}+\zeta_j^4 e_{j2}\right\}.$$

Для второй группы слагаемых найдем:

$$W_{nm}^{(j,2)}(x,\alpha)=(-1)^{\delta_{nm}+1}W_{nm}^{(j,1)}(h_j-x,\alpha).$$

Соответственно функции $U_k^{(j,3)}$ определяют перемещения в однородной плоскости с параметрами рассматриваемого слоя от действия сосредоточенного источника колебаний $\mathbf{P}(\mathbf{r}_0)=\left\{p_1(x_0,y_0),p_2(x_0,y_0)\right\}$ в виде набора цилиндрических волн [2] и соответствуют компонентам матрицы $\mathbf{U}^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$:

$$U_k^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)=\sum_{l=1}^{2}U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)\ p_l(x_0,y_0);\quad k=1,2.$$

С помощью формул переразложения [3] они могут быть записаны в преобразованном по Фурье виде:

$$\widetilde{U}_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=F_y[U_{kl}^{(j,3)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)\exp(i\alpha y)dx \quad , \quad k,l=1,2,$$

$$U_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)=F_\alpha^{-1}[\widetilde{U}_{kl}^{(j,3)}]=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \widetilde{U}_{kl}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)\exp(-i\alpha y)dx$$

где

$$\widetilde{U}_{11}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=A_j\left[-\sigma_{j1}E_{j1}+\alpha^2E_{j2}/\sigma_{j2}\right],$$

$$\widetilde{U}_{12}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=\widetilde{U}_{21}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=i\alpha A_j\left[E_{j1}-E_{j2}\right]\operatorname{sign}(x-x_0),$$

$$\widetilde{U}_{22}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=A_j\left[-\sigma_{j2}E_{j2}+\alpha^2E_{j1}/\sigma_{j1}\right],$$

$$E_{jk}=\exp(-\sigma_{jk}\left|x_0-x\right|),\quad k=1,2;\quad A_j=\frac{\exp(i\alpha y_0)}{2\theta_{j2}^2}.$$

Аналогично для фундаментальных решений по напряжениям получим:

$$T_{kn}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)=\sum_{l=1}^{2}T_{lkn}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,y)\ p_l(x_0,y_0);\quad k,n=1,2.$$

Или в преобразованиях Фурье:

$$\widetilde{T}_{111}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=A_j\left[\varsigma_j^2E_{j1}-2\alpha^2E_{j2}\right]\operatorname{sign}(x-x_0),$$

$$\widetilde{T}_{211}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=\frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j1}}\left[\varsigma_j^2E_{j1}-2\sigma_{j1}\sigma_{j2}E_{j2}\right],$$

$$\widetilde{T}_{112}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=\frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j2}}\left[2\sigma_{j1}\sigma_{j2}E_{j1}-\varsigma_j^2E_{j2}\right],$$

$$\widetilde{T}_{212}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=A_j\left[-2\alpha^2E_{j1}+\varsigma_j^2E_{j2}\right]\operatorname{sign}(x-x_0),$$

$$\widetilde{T}_{122}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=A_j\left[-\eta_j^2E_{j1}+2\alpha^2E_{j2}\right]\operatorname{sign}(x-x_0),$$

$$\eta_j^2=2\alpha^2+\frac{\lambda_j}{\mu_j}\theta_{j1}^2,$$

$$\widetilde{T}_{222}^{(j,3)}(x_0,y_0,x,\alpha)=\frac{i\alpha A_j}{\sigma_{j1}}\left[-\varsigma_j^2E_{j1}+\sigma_{j2}\left(2-\frac{\theta_{j2}^2}{\theta_{j1}^2}\left(1-\frac{\sigma_{j2}}{\sigma_{j1}}\right)\right)E_{j2}\right].$$

Введенные трансформанты Фурье функций напряжений $\widetilde{\mathbf{X}}^{(j,k)}(\alpha)$ представлений (1), (2) являются неизвестными и должны быть определены из условий стыковки разнородных составляющих слоистой полуплоскости между собой. Удовлетворяя равенствам компонент векторов перемещений и напряжений при переходе через границы раздела сред в преобразованиях Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений с $4N+2$ неизвестными:

$$\mathbf{A}(\alpha)\cdot\widetilde{\mathbf{X}}(\alpha)=\mathbf{B}(\alpha),$$

где $\widetilde{\mathbf{X}}(\alpha)$ - общий вектор неизвестных напряжений для многослойной структуры.

Полученные таким образом фундаментальные решения обладают важным свойством отсутствия напряжений на дневной поверхности $x = x_N$.

3. Анализ численных результатов

В качестве иллюстрации характера поведения построенных фундаментальных решений исследованы зависимости компонент вектора перемещений и тензора напряжений от положения источника, точки наблюдения и свойств слоев полуплоскости.

На рис. 2 показано поведение нормальных вертикальных напряжений σ_x в зависимости от положения источника колебаний в фиксированной точки наблюдения (с координатами (-5; 0,5)). Положение источника определяется выражением $x_0 \in [-15{,}10]$, $y_0 = 0$. По анализу графика видно, что в точке наблюдения развиваются интенсивные колебания, при положении источника внутри слоя пониженной жесткости, имеющие немонотонный характер. Максимальное значение данных напряжений превышает уровень напряжений при возбуждении среды с поверхности более чем в 10 раз.

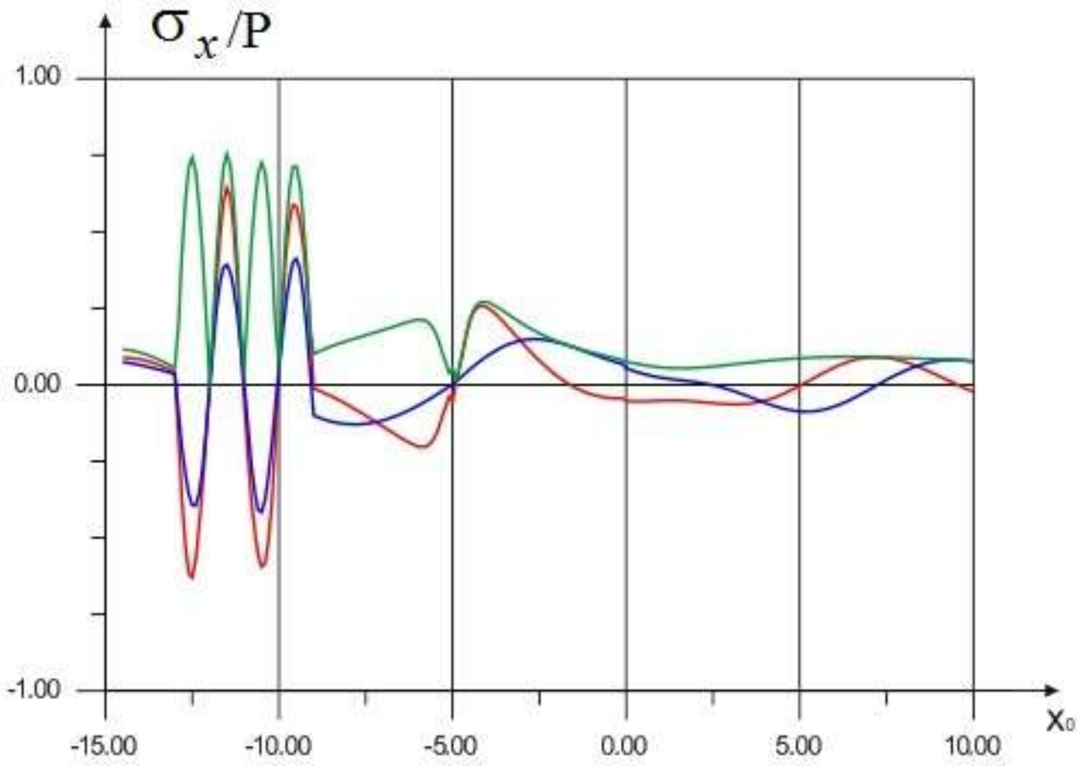

Рис. 2

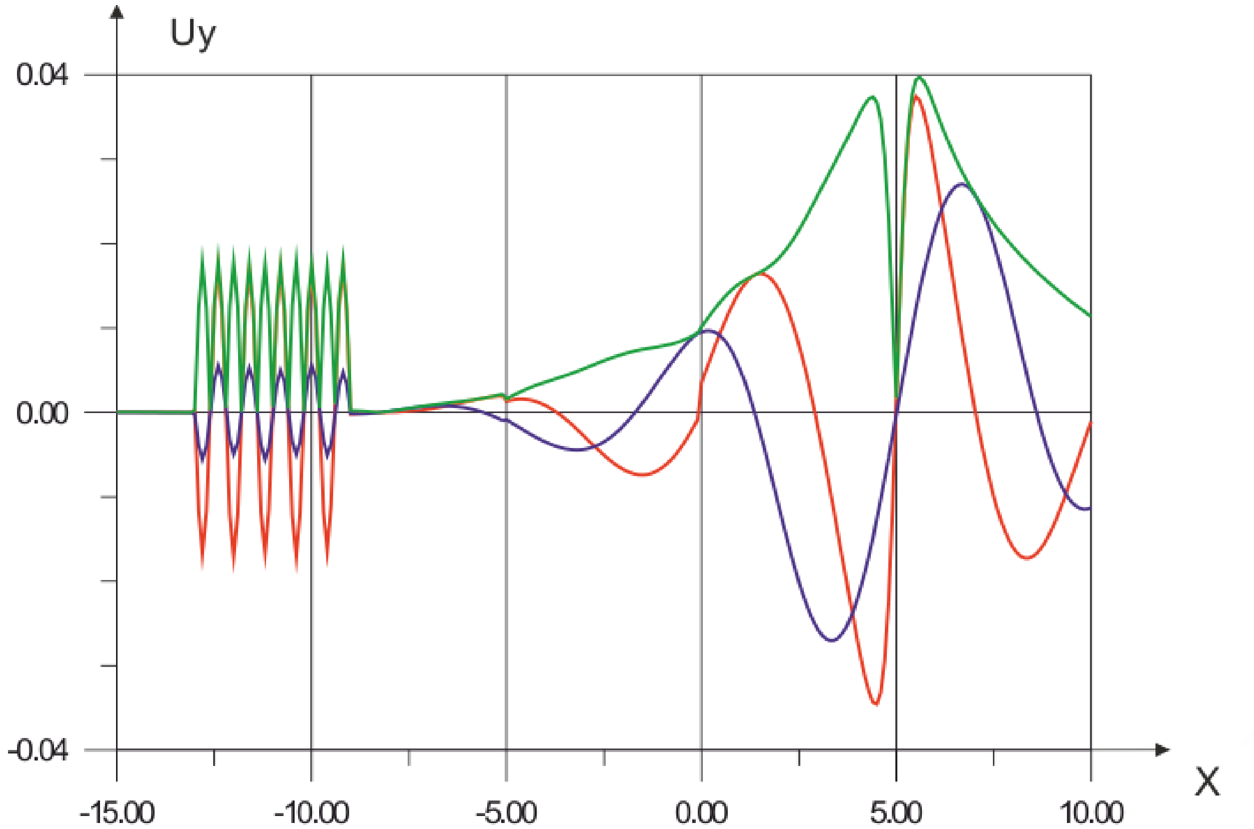

Рис. 3

На рис. 3 представлены горизонтальные перемещения U_y, в случае возбужения среды внутренним источником колебаний, расположенном на глубине $x_0=5$ в полуплоскости. При движении точки наблюдения от поверхности среды x = -15 в глубь x=10. Мягкая прослойка, положение которой определяется диапазоном $x \in [-13,-9]$ приводит к экранированию горизонтальных смещений выше нее. В самой же прослойке наблюдаются осциллирующие на глубине колебания, соизмеримые с колебаниями вблизи источника, которые имеют более плавный характер, по отношению к точке наблюдения.

Имеющие общие закономерности, особенности поведения напряжения состояния среды, наблюдается так же в случае наличия более жесткой прослойки, а также в сочетании жесткая - мягкая прослойка. Таким образом, структура слоистой конструкции существ образом влияет на характер волновых полей, генерируемых внутренним источником колебанием, при наблюдении, как на поверхности области, так и внутри нее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. –872 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984.
3. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.
   -Т.1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. –930 с.,
   -Т.2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. –886 с.