

**Определение потенциальной энергии шестиугольной отбортовки блока  
составной конструкции, состоящей из основания в форме  
шестиугольной пластины, жестко связанной с круговой цилиндрической  
оболочкой**

И.А.Маяцкая, И.А.Краснобаев, Икуру Годфрей Аарон

Разработка методов расчета составных конструкций, состоящих из таких элементов как различные пластины и оболочки остается в центре внимания ученых, занимающихся исследованием напряженно-деформированного состояния сложных пространственных конструкций [1]–[10].

Конструкция состоит из ряда идентичных блоков, скрепленных друг с другом. Каждый такой блок состоит из основания в форме шестиугольной пластины, жестко связанной с основанием круговой цилиндрической оболочки, верхний торец которой усилен шестиугольной отбортовкой. Скрепление блоков друг с другом произведено с одной стороны по вершинам шестиугольных пластин, а с другой – по соответствующим вершинам отбортовок. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние отбортовки составной конструкции, состоящей из некоторого числа идентичных блоков, скрепленных друг с другом.

Из составной конструкции вырежем отдельный блок, причем заменим воздействие со стороны других блоков эквивалентной системой сил. Далее будет рассмотрен метод, с помощью которого завершается переход от одного блока ко всей конструкции. Для простоты сначала рассмотрим тот случай, когда нагрузка приложена в точке  $A_i$  – одной из вершин шестиугольного основания и в точке  $B_i$  – вершине шестиугольной отбортовки, соответствующей точке  $A_i$ , ( $i=1,2,\dots,6$ ), причем, случай симметричного нагружения рассмотрим отдельно. Таким образом, рассмотрим один вырезанный из всей конструкции блок. Поскольку даже отдельный блок является достаточно сложной конструкцией, рассмотрим только одну его составную часть – шестиугольную отбортовку.

Примем следующие допущения и гипотезы. Толщины, как пластинки, так и цилиндрической оболочки достаточно малы, поэтому к ним при построении теории применима гипотеза Кирхгоффа-Лява, кольцеобразная шестиугольная отбортовка рассмотрена как стержень, деформирующийся совместно с верхним краем цилиндрической оболочки. Материал блока принят упругим, однородным, изотропным. Внешняя нагрузка считается приложенной в вершинах шестиугольных пластин оснований. Для решения задачи используется известный вариационно-энергетический метод, состоящий в подсчете потенциальной энергии деформации и работы, производимой внешним нагружением и доставлении величине энергии минимума, соответствующего действительным перемещениям. Рассмотрим нижнее основание блока – шестиугольное подкрепляющее кольцо, называемое в дальнейшем телом III. В соответствии с допущениями рассмотрим кольцо как кривой стержень постоянного поперечного сечения (рис. 1). Ошибка, вносимая в расчеты при таком упрощенном рассмотрении формы подкрепляющего кольца будет невелика. Так как окантовка принята как одномерное тело, то положение её точки до деформации можно охарактеризовать как некоторую функцию угла  $\varphi$ . Окантовка жестко соединена с верхним торцом цилиндрической оболочки, поэтому перемещения кольца получают через перемещения в произвольной  $k$ -ой точке конструктивного элемента тела II, полагая  $z = H$  в формулах:

$$u_{\kappa 1}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 1, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 1, mn}^{IIIi}(\varphi, z); u_{\kappa 2}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 2, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 2, mn}^{IIIi}(\varphi, z)$$

$$u_{\kappa 3}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 3, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 3, mn}^{IIIi}(\varphi, z). \quad (1)$$

В результате получаем

$$u_{\kappa 1}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 1, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 1, mn}^{IIIi}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 1, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 1, mn}^{IIIi}(\varphi, H)$$

$$u_{\kappa 2}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 2, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 2, mn}^{IIIi}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 2, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 2, mn}^{IIIi}(\varphi, H) \quad (2)$$

$$u_{\kappa 3}^{IIIi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 3, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 3, mn}^{IIIi}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa 3, mn}^{IIIi} \Phi_{\kappa 3, mn}^{IIIi}(\varphi, H).$$

Выведем энергию деформации отбортовки (тела III), которая складывается из трех компонент, а именно, из энергии кручения стержня, энергии растяжения и энергии изгиба:  $\Pi_{III} = \Pi_{кр} + \Pi_{раст} + \Pi_{изг}$ . (3)

Для определения энергии кручения найдем угол закручивания стержня, который равен углу наклона касательной торцевого сечения тела II (рис. 2)

$$\theta = u_{к2,z}^{II} \Big|_{z=H} \quad (4)$$

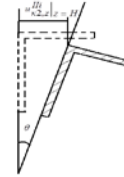
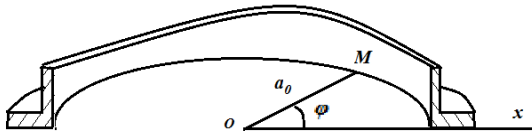


Рис. 1.– Нижнее основание блока. Рис. 2.–Угол закручивания стержня.

$$\text{Энергия кручения определена полностью } \Pi_{кр} = \frac{1}{2} \frac{G_{кр}}{b} \int_{(I)} \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 d\varphi, \quad (5)$$

где  $G_{кр}$  – жесткость стержня при кручении;  $b$  – расстояние от оси тела II до центра тяжести поперечного сечения стержня.

Для определения энергии растяжения необходимо определить соответствующую ей деформацию стержня. Для этого две бесконечно близкие точки  $A$  и  $B$ , которые принадлежат одновременно телу II и телу III (рис. 3).

Обозначим через  $d\varphi$  угол между радиус – векторами точек  $A$  и  $B$ . В результате деформации точки  $A$  и  $B$  перейдут соответственно в точки  $A^I$  и  $B^I$ .

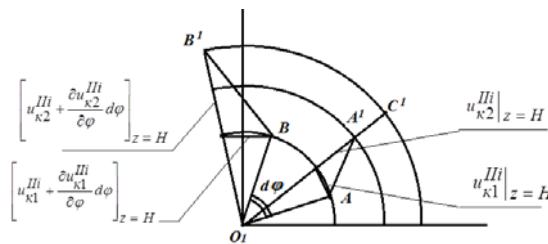


Рис. 3. –Схема для определения энергии растяжения.

В следствии неразрывности деформаций эти точки и после деформации будут принадлежать как телу II, так и телу III.

Учитывая, что точки  $A$  и  $B$  принадлежат телу II, можно найти положение точек  $A^I$  и  $B^I$ , зная перемещения тела II. Точка  $A$  по дуге переместится на

$u_{\kappa 1}^{III} \Big|_{z=H}$  и по радиусу на  $u_{\kappa 2}^{III} \Big|_{z=H}$ . Точка  $B$  переместится соответственно  $\left[ u_{\kappa 1}^{III} + \frac{\partial u_{\kappa 1}^{III}}{\partial \varphi} d\varphi \right]_{z=H}$ ;  $\left[ u_{\kappa 2}^{III} + \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial \varphi} d\varphi \right]_{z=H}$ ,  $A^1B^1$  – линия после деформации.

Обозначив деформацию растяжения  $\varepsilon$ , получим:  $\varepsilon = \frac{A^1B^1 - AB}{AB}$ . Очевидно, что

$$AB = a_0 d\varphi; \quad A^1B^1 = \left[ \sqrt{\left( \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left( a_0 d\varphi + \frac{\partial u_{\kappa 1}^{III}}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2} \left( a_0 + u_{\kappa 2}^{III} + \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right]_{z=H}.$$

После простых преобразований, сохраняя только малые первого порядка, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{a_0} \left[ u_{\kappa 2}^{III} \right]_{z=H} + \frac{1}{a_0} \left[ u_{\kappa 1, \varphi}^{III} \right]_{z=H}. \quad (6)$$

Используя формулу (6), можно определить потенциальную энергию растяжения стержня

$$\Pi_p = \frac{EF}{2} \int_{(l)} \varepsilon^2 ds, \quad (7)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $E$  – модуль упругости, модуль Юнга. Для определения энергии изгиба стержня отнесем его к главным центральным осям  $\eta$ ,  $\zeta$  любого поперечного сечения (рис. 4)

$$u_{\eta} = - \left[ u_{\kappa 3}^{III} \cos \omega + u_{\kappa 2}^{III} \sin \omega \right]_{z=H}; \quad u_{\zeta} = \left[ -u_{\kappa 3}^{III} \sin \omega + u_{\kappa 2}^{III} \cos \omega \right]_{z=H}, \quad (8)$$

где  $\omega$  – угол наклона оси  $\zeta$  к оси  $x$ .

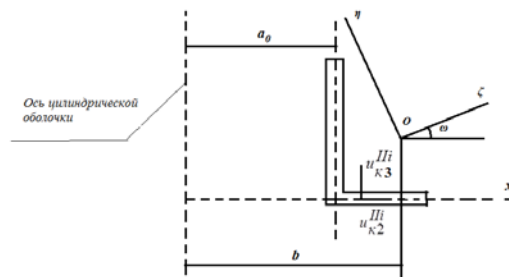


Рис. 4. –Схема для определения энергии изгиба.

Энергия изгиба для тела III после ряда преобразований принимает вид

$$\Pi_{изг} = \frac{1}{2b} \int_{(l)} EI_{\eta} \left( u_{\zeta, \varphi\varphi} \right)^2 d\varphi + \frac{1}{2b} \int_{(l)} EI_{\zeta} \left( u_{\eta, \varphi\varphi} \right)^2 d\varphi. \quad (9)$$

Таким образом, энергия деформации отбортовки (тела III) определена полностью.

### **Литература:**

1. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 87 с.
2. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек: [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 114 с.
3. Амосов А.А. Техническая теория тонких упругих оболочек: [Текст]: Монография / Амосов А.А.–М.:АСВ, 2009, – 332 с.
4. Филин А.П. Элементы теории оболочек.–Л.:Стройиздат, 1975, – 256 с.
5. Огибалов П.М., Колтунов М.Л. Оболочки и пластины.–М.:МГУ, 1969, – 696 с.
6. Calladine C.R. Theory of shell structures.– N.Y.: Cambridge University Press, 1989, –788 p.
7. Zingoni A. Shell structures in civil and mechanical engineering.– N.Y.: Thomas Telford Publishing, 1997, –351 p.
8. Литвинов В.В., Кулинич И.И. Соотношения между компонентами поверхностной нагрузки в оболочках вращения при безмоментном их состоянии.[Текст] //Интернет-журнал «Инженерный вестник Дона». 2012 №4 (2) [Электронный ресурс].-М. 2012. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru>.
9. Стрельников Г.П., Бурцева С.В., Авилкин В.И. К расчету оболочек вариационно-энергетическим методом.[Текст] //Интернет-журнал «Инженерный вестник Дона». 2012 №4 (2) [Электронный ресурс].-М. 2012. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru>.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.– М.:Наука, 1966, – 636 с.