**Численное исследование двумерной задачи, содержащей неизвестную границу**

*Онишкова А. М.*
*ООО «ИТСК», Москва*

Построение математических моделей некоторых физических процессов и явлений часто сводится к краевым задачам математической физики, содержащим изначально неизвестные поверхности или границы, которые требуется определить в ходе решения.

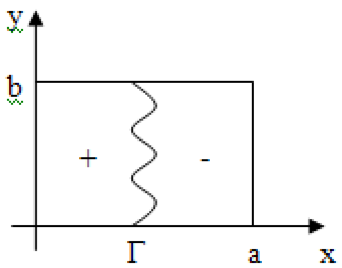
Начиная с работ Дж.Гиббса[1], для решения задач со свободными границами применяются вариационные методы[1,2].

Идея решения заключается, как правило, в определении минимума соответствующего функционала. При варьировании нужно рассматривать не только неизвестные функции, но и положение свободной границы. В итоге математическая задача сводится к поиску $u^*, \tilde{A}^*:\ I(u^*, \tilde{A}^*) = \min\limits_{\underline{u}\in H,\Gamma} I(\underline{u}, \Gamma)$, где $\underline{u}$ - некоторые функции из определенного пространства H, а Г – положение неизвестной или свободной границы.

В данной работе предлагается численный алгоритм для решения двумерной задачи со свободной границей.

**Постановка задачи**

В прямоугольной области, где задано уравнение $k_{\pm}\Delta u=f$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и условия Дирихле на границе, необходимо определить положение неизвестной границы Г, на которой заданы условия согласования $k_+ \frac{\partial up}{\partial n} = k_- \frac{\partial um}{\partial n}$.




Граница Г находится из условий минимума некоторого функционала

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{V_+} k_+ \nabla u^2 dV_+ + \frac{1}{2}\int\limits_{V_-} k_- \nabla u^2 dV_- - \int\limits_{V_+\cup V_-} fudV$$

**Алгоритм решения**

1. Задаем a, b, h, k+, k- и тип границы.
2. Строим сетку: na – количество точек на [0, a]; nb – количество точек на [0, b];
   $x_i=(i-1)*h$, $i=1…na$; $y_j=(j-1)*h$, $j=1…nb$.
3. В массивы xG, yG помещаем узлы сетки, через которые проходит граница (border). xG хранит координаты x границы, а yG – координаты y.
4. Строим на графике сетку и полученную границу.
5. Получаем множества (multitrudes) $V_+$ и $V_-$. $V_+$ будет храниться в массивах xVP – узлы по x и yVP– узлы по y; $V_-$ будет храниться в массивах xVM – узлы по x и yVM – узлы по y.
6. Определяем местоположение границы, запоминаем координаты узлов границы в массивах gNy и gNx.

7. Присваиваем границе неизвестную постоянную a – массив неизвестных.

8. Ищем up – решение на $V_+$:

a. Записываем граничные условия up(:,1)=0, up(1,:)=0, up($n_b$,:)=0.

b. Вычисляем f(x,y) в узлах сетки на $V_+$– $f_{ij}$ .

c. Для внутренних узлов составляем уравнения, пользуясь разностными формулами[13].Уравнение $k_+\Delta up=f(x,y)$ принимает вид

$up_{i+1j}-2up_{ij}+up_{i-1j}+up_{ij+1}-2up_{ij}+up_{ij-1}-f_{ij}h^2/k_+=0.$

9. Решаем полученную систему уравнений.

10. Получаем решение up, которое зависит от a.

11. Аналогично повторяем действия для um:

a. Записываем граничные условия um(:,$n_a$)=0, um(1,:)=0, um($n_b$,:)=0.

b. Вычисляем f(x,y) в узлах сетки $V_-$– $f_{ij}$.

c. Для внутренних узлов составляем уравнения, пользуясь разностными формулами[13].Уравнение $k_-\Delta um=f(x,y)$ принимает вид

$um_{i+1j}-2um_{ij}+um_{i-1j}+um_{ij+1}-2um_{ij}+um_{ij-1}-f_{ij}h^2/k_-=0$

12. Получаем решение um, которое зависит от a.

13. Используем условие согласования на границе $k_+\dfrac{\partial up}{\partial n}=k_-\dfrac{\partial um}{\partial n}$ для поиска a.

14. Определяем нормаль на границе и составляем разностные уравнения, используя формулы[13]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_i^j-u_i^{j-1}}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u_i^j-u_{i-1}^j}{h}$$

$$\frac{\partial up}{\partial n}=\left[\frac{\partial up}{\partial x};\frac{\partial up}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial um}{\partial n}=\left[\frac{\partial um}{\partial x};\frac{\partial um}{\partial y}\right]$$

15. Получаем уравнение $k_+\dfrac{\partial up}{\partial n}-k_-\dfrac{\partial um}{\partial n}=0$ для каждого узла границы.

16. Из системы таких уравнений находим a.

17. Так как a найдено, um и up тоже известны.

18. Поиск функционала

1. Слагаемое $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{V_+}k_+\nabla u^2dV_+$ превращается в

$$\frac{1}{2}\sum_m\sum_n\int_{x_n}^{x_{n+1}}\int_{y_m}^{y_{m+1}}\left(ux^2+uy^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\sum_m\sum_n\left(ux^2+uy^2\right)\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{m+1}-y_m\right)=sp$$

Здесь

$x_n, y_m\in V_+$, $ux=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u_m^n-u_m^{n-1}}{h}$, $uy=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}$,

$\nabla u^2=ux^2+uy^2$.

2. Слагаемое $\frac{1}{2}\int\limits_{V_-} k_-\nabla u^2 dV_-$ превращается в

$$\frac{1}{2}\sum_m\sum_n\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\int\limits_{y_m}^{y_{m+1}}\left(ux^2+uy^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\sum_m\sum_n\left(ux^2+uy^2\right)\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{m+1}-y_m\right)=sm$$

Здесь $x_n, y_m \in V_-$.

3. Слагаемое $\frac{1}{2}\int\limits_{V_+\cup V_-} fudV$ превращается в so=sop+som, где

$$sop=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j f_{ij}up_{ij}\left(x_{j+1}-x_j\right)\left(y_{i+1}-y_i\right),\ x_j, y_i \in V_+$$

$$som=\frac{1}{2}\sum_k\sum_l f_{kl}um_{kl}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(y_{l+1}-y_l\right),\ x_k, y_l \in V_-/\Gamma.$$

4. Функционал I=sp+sm-so.

19. Запоминаем функционал и границу, для которой он был найден.

20. Рассматриваем остальные возможные границы заданного типа, для каждой из них ищем функционал и запоминаем его.

21. Находим минимальное значение функционала.

Решение модельной задачи.

Рассмотрим решение модельной задачи для эллиптического уравнения[21]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-5\pi\sin\pi x\cdot\sin 2\pi y$$

В прямоугольнике с центром в начале координат, высотой единица и шириной, равной двум. На сторонах прямоугольника поставлены однородные условия Дирихле. Известно точное решение $u(x,y)=\sin\pi x\cdot\sin 2\pi y$.

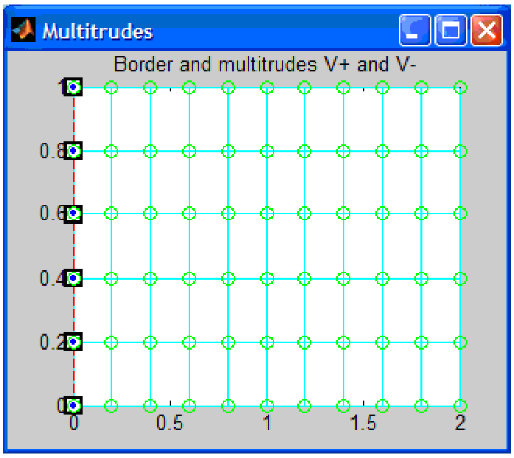



Рис.1

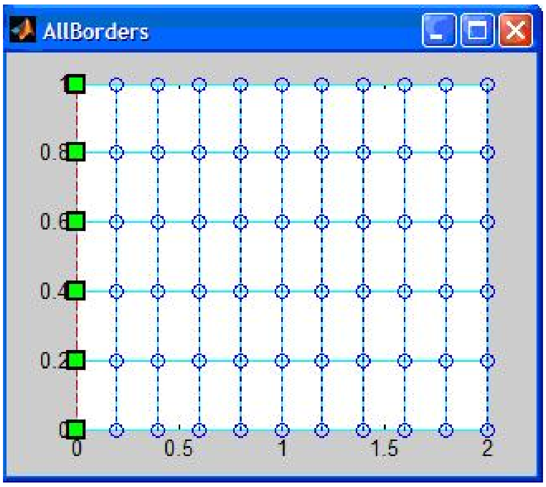


Рис. 2

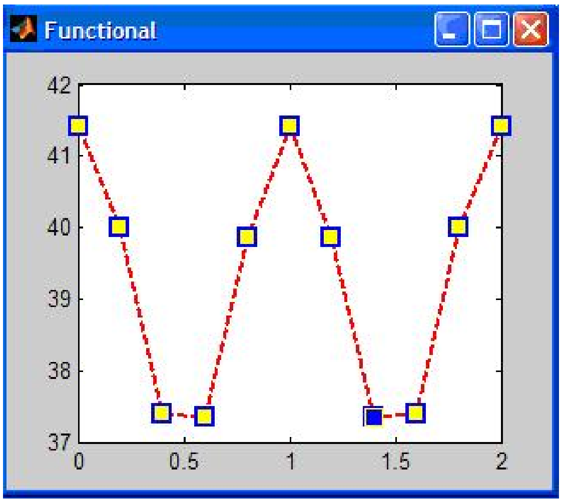


Рис.3

**Заключение**

Для двумерной задачи с неизвестной границей, заданной в прямоугольной области, разработан численный алгоритм решения.

**Литература**


1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. –Л.:Изд-во ЛГУ, 1987.
2. Материалы с эффектом памяти формы / Под ред. В.А.Лихачева. – Спб.: Изд-во НИИХ СПбГУ,1998.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. –М.:Наука, 1985.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. –М.:Наука, 1978.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. –М.: Наука, 1987.
6. Зеньковская С.М., Моршнева И.В., Цывенкова О.А. Методические указания к практикуму по курсу «Численные методы». Методы решения задач Коши и краевых задач. –Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2001.
7. Конюшенко В.В., Matlab. Начало работы с Matlab.
8. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB7. – СПб.: Изд. БХВ-Петербург, 2005.