

## Исследование напряженно-деформированного состояния железобетонной арки с учетом вязкоупругости на основе различных теорий ползучести

Л.Р. Маилян<sup>1</sup>, О.В. Денисов<sup>2</sup>, А.С. Чепурненко<sup>1</sup>, А.А. Аваков<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Ростовский государственный строительный университет

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет

**Аннотация:** Проведено исследование ползучести железобетонных арок на основе следующих теорий: линейная теория ползучести Арутюняна-Маслова, кинетическая теория, теория течения, теория старения, а также нелинейная теория Ю.А. Гурьевой. Рассматривалась вязкоупругая модель работы бетона, т.е. полная деформация представлялась в виде суммы упругой деформации и деформации ползучести.

**Ключевые слова:** железобетонная арка, ползучесть, теория наследственности, теория старения, теория течения, кинетическая теория, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

Рассматривается параболическая статически неопределимая арка, жестко защемленная по концам, нагруженная равномерно распределённой нагрузкой  $q$ . Расчётная схема представлена на рис. 1.

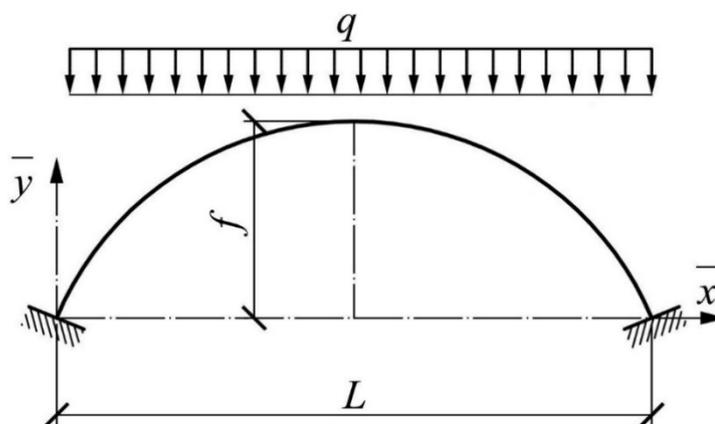


Рис. 1. – Расчётная схема арки

В общем случае полная деформация бетона  $\varepsilon_b$  представляет сумму упругой и пластической деформации, а также деформации ползучести  $\varepsilon_b^*$  [1]:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_b^{el} + \varepsilon_b^{pl} + \varepsilon_b^*. \quad (1)$$

Ограничиваясь вязкоупругой работой бетона, перепишем выражение (1) в виде:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_b^{el} + \varepsilon_b^* = \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_b^*, \quad (2)$$

где  $\sigma_b$  – напряжение в бетоне,  $E_b$  – модуль упругости бетона.

Для расчета будем использовать метод конечных элементов. Потенциальная энергия деформации  $\Pi$  железобетона складывается из потенциальной энергии бетона  $\Pi_b$ , а также потенциальной энергии арматуры у верхней грани  $\Pi'_s$  и нижней грани  $\Pi_s$ :

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_s + \Pi'_s. \quad (3)$$

Потенциальная энергия деформации бетона записывается в виде [2-4]:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_{V_b} \sigma_b \varepsilon_b^{el} dV, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_b^{el}$  — упругая деформация бетона, которая равна разности между полной деформацией и деформацией ползучести:

$$\varepsilon_b^{el} = \varepsilon_b - \varepsilon_b^* = \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon_b^*, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0$  – осевая деформация,  $v$  – прогиб.

Выразив напряжения через деформации в (2) и подставив вместе с (5) в (4), получим:

$$\begin{aligned} \Pi_b = \frac{1}{2} E_b \int_{V_b} \left( \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon_b^* \right)^2 dV = \frac{1}{2} E_b [A_b \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx + I_b \int_{(l)} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \\ + \int_{V_b} (\varepsilon_b^*)^2 dV - 2 \int_{(l)} \varepsilon_0 dx \int_A \varepsilon_b^* dA + 2 \int_{(l)} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \int_A \varepsilon_b^* y dA], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $I_b = bh^3/12$  — момент инерции бетона;  $l$  – длина конечного элемента,  $A_b$  — площадь бетонного сечения.

Потенциальная энергия деформации арматуры, расположенной у нижней грани, может быть найдена следующим образом [3]:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{V_s} \sigma_s \varepsilon_s dV = \frac{1}{2} E_s A_s \int_{(l)} \left( \varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 y_s \frac{d^2 v}{dx^2} + y_s^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) dx, \quad (7)$$

где  $y_s$  – расстояние по  $y$  от центра тяжести сечения до центров тяжести арматурных стержней.

Аналогично для арматуры верхней грани:

$$\Pi'_s = \frac{1}{2} \int_{V'_s} \sigma'_s \varepsilon'_s dV = \frac{1}{2} E_s A'_s \int_{(l)} \left( \varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 y'_s \frac{d^2 v}{dx^2} + y_s'^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) dx, \quad (8)$$

В случае симметричного армирования потенциальная энергия деформации всей арматуры примет вид:

$$\Pi_s + \Pi'_s = \frac{1}{2} E_s \left( A_{s,общ} \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx + I_s \int_{(l)} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \right), \quad (9)$$

где  $I_s = A_s y_s^2 + A'_s y_s'^2$  — момент инерции арматуры.

Применяя принцип минимума полной энергии, задачу можно свести к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \quad (10)$$

где  $\{F^*\}$  – вклад деформаций ползучести бетона в вектор нагрузки,  $[K]$  – матрица жесткости,  $\{U\}$  и  $\{F\}$  – соответственно векторы узловых перемещений и нагрузок.

Для бетона широко используются следующие теории ползучести [1]:

1. Линейная теория ползучести Арутюняна–Маслова. Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [5]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t-\tau) \right] d\tau, \quad (11)$$

Для нестареющего бетона деформация ползучести запишется в виде:

$$\varepsilon^* = - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Если мера ползучести имеет вид:

$$C(t-\tau) = C_{\infty} [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (12)$$

где  $C_{\infty}$  — предельная мера ползучести, то уравнение (11) представляется в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \gamma [C_{\infty} \sigma - \varepsilon^*]$$

2. Теория старения. В данной теории связь между деформацией ползучести, напряжением и временем устанавливается в явном виде [6]:

$$\varepsilon^* = C_{\infty} \sigma [1 - e^{-\gamma t}] \quad (13)$$

3. Теория течения. Скорость роста деформации ползучести в теории течения определяется следующим образом [6]:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = C_{\infty} \sigma \gamma e^{-\gamma t} \quad (14)$$

4. Кинетическая теория. В одном из вариантов кинетической теории [6] связь между скоростью роста деформаций ползучести и напряжением имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = C_{\infty} \sigma \gamma \left[ 1 - \frac{1}{\sigma^2 C_{\infty}} \int_0^{\varepsilon^*} \sigma(\varepsilon^*) d\varepsilon^* \right] \quad (15)$$

Также рассматривается упрощённая нелинейная теория ползучести нестареющего бетона при сжатии Ю. А. Гурьевой [7]. Данная теория представлена в двух вариантах: однокомпонентном и двухкомпонентном. В однокомпонентном варианте мера ползучести определяется выражением (12).

Полная деформация ползучести представляется в виде суммы линейной составляющей  $\alpha$  и нелинейной составляющей  $\beta$ . Положительными считаются напряжения и деформации сжатия.

Для однокомпонентного варианта:

$$\varepsilon^* = \alpha + \beta; \alpha = - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Скорость роста нелинейной составляющей деформации ползучести  $\beta$  полагается пропорциональной скорости роста поврежденности материала  $\Pi_t$ :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{k_2}{R} \frac{\partial \Pi_t}{\partial t}.$$

В однокомпонентном варианте теории приращение поврежденности считается пропорциональным работе деформаций ползучести:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = k_1 \sigma \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} \right). \quad (16)$$

Так как поврежденность функции неубывающая, то выражение (16) справедливо только при  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} > 0$ . В противном случае  $\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = 0$ .

Окончательно выражение для нелинейной составляющей  $\beta$  в однокомпонентном варианте теории принимает вид:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{k_1 k_2 \sigma / R}{1 - k_1 k_2 \sigma / R} \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Все представленные теории позволяют для определения деформаций ползучести вести расчет шаговым методом [8-10].

Был выполнен расчёт параболической арки, закреплённой в соответствии с рис. 1, при следующих исходных данных: пролет  $L = 16$  м, подъем  $f = 3.2$  м, размеры сечения:  $b = 20$  см,  $h = 40$  см,  $E_b = 3 \cdot 10^4$  МПа,  $\gamma = 0.03$  сут<sup>-1</sup>, предельная характеристика ползучести  $\varphi_\infty = E_b C_\infty = 3$ , коэффициент армирования  $\mu = 0.015$ ,  $y_s = y_s' = 15$  см,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $q = 65$  кН/м.

На рис. 2 представлены графики роста прогиба в середине пролета арки, соответствующие пяти перечисленным выше теориям. Кривой 1 соответствует результат по линейной теории Арутюняна–Маслова; кривой 2

— по теории старения; 3 — теории течения; 4 — кинетической теории; 5 — теории Ю. А. Гурьевой. Отметим, что теории с первой по четвертую дают весьма близкие результаты, при  $0 \leq t \leq 25$  сут прогибы практически не отличаются. В теориях 1 и 2 при  $t \rightarrow \infty$  прогиб стремится к одному и тому же значению. Разница по прогибам в конце процесса ползучести между нелинейной теорией Ю. А. Гурьевой и линейной теорией составляет 25.7%.

Рис. 3 — распределение напряжений в бетоне по высоте сечения в конце процесса ползучести при  $x = L/2$ . Обозначения такие же, как на рис. 2. Знаку «+» на графиках соответствуют сжимающие напряжения. Штриховой линией показано упругое решение.

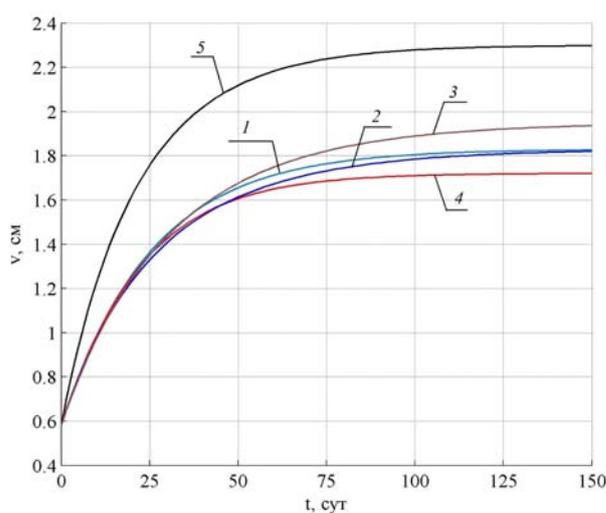


Рис. 2. — Графики роста прогиба

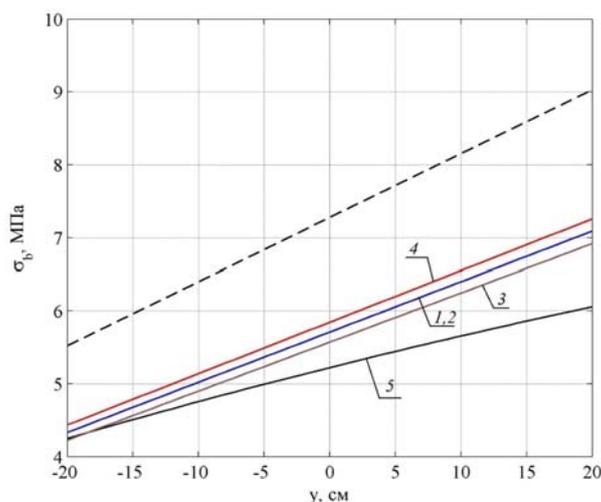


Рис. 3. – Распределение напряжений в бетоне по высоте сечения в середине пролета при  $t \rightarrow \infty$

По теориям с первой по четвёртую результаты также достаточно близки, распределение напряжений по высоте сечения линейное. Напряжения по теориям 1 и 2 в конце процесса ползучести совпадают. На кривой 5, соответствующей теории Ю. А. Гурьевой, наблюдается слегка выраженная нелинейность.

Рис. 4 и рис. 5 – соответственно изменение во времени напряжений  $\sigma_S$  и  $\sigma_S'$  в арматуре у нижней и верхней грани в середине пролета. Знаку «+» также соответствует сжатие. Наиболее существенно напряжения в арматуре возрастают по нелинейной теории: у верхней грани в начале процесса ползучести  $\sigma_S'=57.3$  МПа, а при  $t \rightarrow \infty$   $\sigma_S'=220$  МПа, т. е. в 3.8 раз больше, чем в упругой стадии.

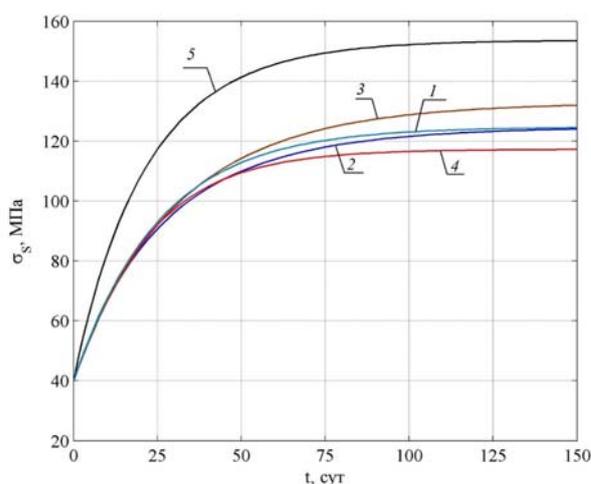


Рис. 4. — Изменение напряжений в арматуре у нижней грани в сечении  $x = L/2$

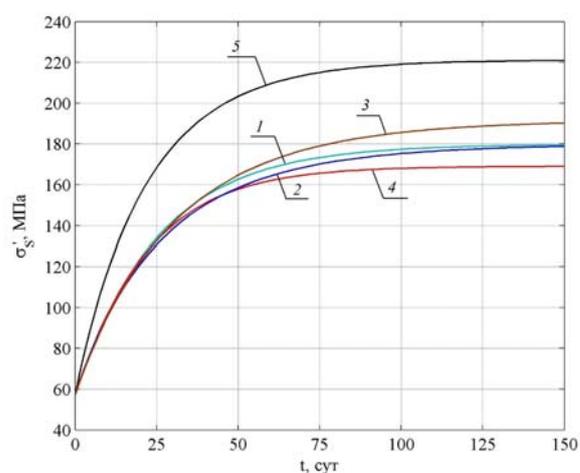


Рис. 5 — Изменение напряжений в арматуре у верхней грани в сечении  $x = L/2$

### Литература

1. Тамразян А. Г., Есяян С.Г. Механика ползучести бетона: монография. Москва: МГСУ, 2012. 490 с.
2. Аваков А.А., Чепурненко А.С., Языев С.Б. Напряженно-деформированное состояние железобетонной арки с учетом нелинейной ползучести бетона // Научно-технический вестник Поволжья. №1 2015г. С. 27-31.
3. Аваков А.А., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Расчёт железобетонной арки с учётом ползучести бетона // Инженерный вестник Дона, 2015, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2796

4. Аваков А.А., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонной арки с учётом ползучести бетона // Фундаментальные исследования: сетевой журн. 2015. №3. С. 9–14. URL: [rae.ru/fs/pdf/2015/3/37075.pdf](http://rae.ru/fs/pdf/2015/3/37075.pdf)

5. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952. 323 с.

6. Карапетян К.А., Симонян А.М. Исследование ползучести и релаксации напряжений в бетоне с учетом его старения// Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2000. Т. LIII, № 1. С. 27-34.

7. Гурьева Ю.А. Некоторые приложения упрощенной теории нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии// Промышленное и гражданское строительство. 2008. № 6. С. 52 – 53.

8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep//Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp. 257-260. Trans Tech Publications, Switzerland

9. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Chepurnenko Anton S. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707-710. Trans Tech Publications, Switzerland.

10. Дудник А.Е., Чепурненко А.С., Никора Н.И., Денего А.С. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости // Инженерный вестник Дона, 2015, №2 (часть 2) URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063)

### References

1. Tamrazjan A. G., Esajan S. G. Mehanika polzuchesti betona: monografija [Mechanics of creep of concrete: monograph]. A. G. Tamrazjan, Moskva: MGSU, 2012. 490 p.

2. Avakov A.A., Chepurnenko A.S., Jazyev S.B. Naprjazhenno–deformirovannoe sostojanie zhelezobetonnoj arki s uchetom nelinejnoj polzuchesti betona. Scientific and technical Volga Herald. №1. 2015. pp. 27-31

3. Avakov A.A., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №1 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2796](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2796)

4. Avakov A.A., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Naprjazhenno–deformirovannoe sostojanie zhelezobetonnoj arki s uchjotom polzuchesti betona. Fundamental research: Online journal. 2015. №3. pp. 9–14. URL: [rae.ru/fs/pdf/2015/3/37075.pdf](http://rae.ru/fs/pdf/2015/3/37075.pdf)

5. Arutjunjan N.H. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti [Some problems of creep theory]. M.: Gostehteorizdat, 1952. 323 p.

6. Karapetjan K.A., Simonjan A.M. Issledovanie polzuchesti i relaksacii naprjazhenij v betone s uchetom ego starenija. Izv. NAN RA i GIUA. Ser. TN. 2000. V. LIII, № 1. pp. 27-34.

7. Gur'eva Ju.A. Nekotorye prilozhenija uproshhennoj teorii nelinejnoj polzuchesti nestarejushhego betona pri szhatii. Industrial and Civil construction. 2008. № 6. pp. 52 – 53.

8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep. Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp. 257-260. Trans Tech Publications, Switzerland

9. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Chepurnenko Anton S. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep. Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707-710. Trans Tech Publications, Switzerland.

10. Dudnik A.E., Chepurnenko A.S., Nikora N.I., Denego A.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2 (part 2) URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063).