Анализ эффективности применения классических методов при расчете изгибаемой пластинки с произвольными граничными условиями

В.А. Игнатьев, А.В. Глухов, С.Г. Глухова, Г.В. Воронкова

Волгоградский государственный технический университет

Аннотация: В данной работе различными методами была рассчитана изгибаемая пластинка, получены аппроксимирующие функции прогиба пластинки, численные значения и эпюры перемещений и моментов, сделаны выводы по результатам методов.
Ключевые слова: пластинка, аппроксимирующая функция, кривизна, функционал энергии.

Целью данной работы является расчет пластинки методами КЭ, Ритца – Тимошенко, Бубнова – Галеркина. Заданы: a, b, μ, D, q. Геометрические размеры пластинки: $a = b = 1$ м. Механические свойства пластинки: модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, толщина пластинки $H = 10$ мм. На пластинку приложена нагрузка: равномерно распределенная, интенсивностью 1КПа, $D = EH/12(1-\mu^2)$.

Найти: $w(x, y),\ M_x(x, y), M_y(x, y), M_{xy}(x, y)$.

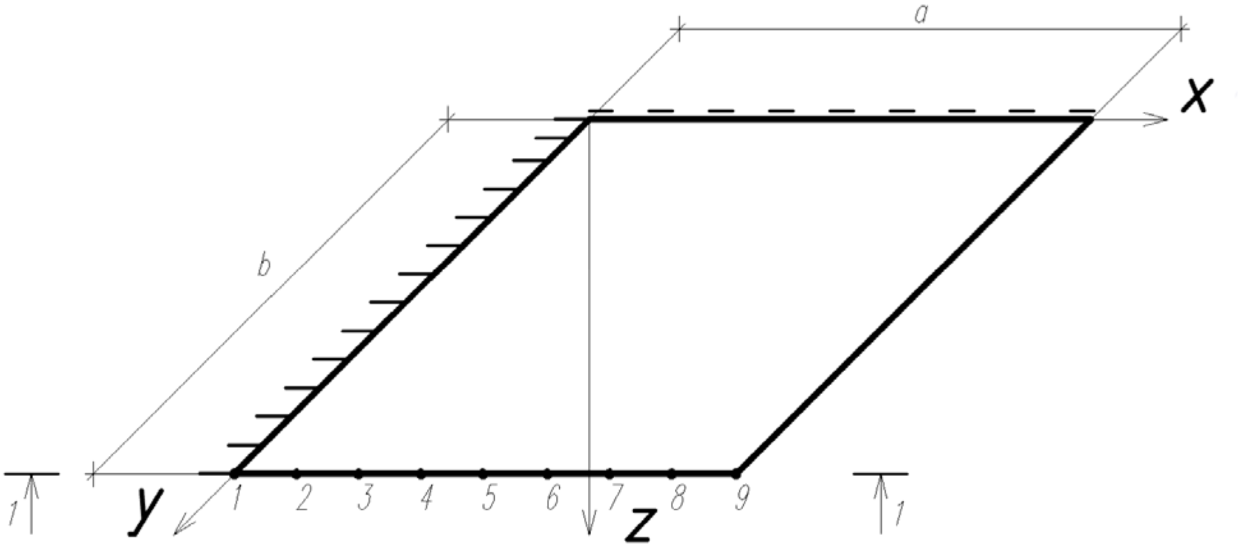

Рис. 1. – Расчетная схема изгибаемой пластинки

1. Расчет пластинки по методу Ритца – Тимошенко

Данный расчет заключается в нахождении функции прогиба пластинки:

$$w(x,y) = a_1 w_1(x) w_2(y), \qquad (1)$$

где w_1 - функция прогиба в направлении оси x, w_2 - функция прогиба в направлении оси y, a_1 - неизвестный коэффициент, подлежащий определению [1, 2].

Найдем функцию прогиба в направлении оси x. Граничные условия:

$$w_{1,(x=0)} = 0,\ w'_{1(x=a)} = 0,\ w''_{1(x=0)} = M_x = qa^2/2,\ Q_{x(x=a)} = 0,\ w''_{1(x=a)} = M_x = 0.$$

Представим функцию прогиба в виде полинома четвертой степени

$$w_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2^{\ 2} + \alpha_3 x_3^{\ 3} + \alpha_4 x_4^{\ 4}. \qquad (2)$$

Согласно первому граничному условию получаем, что $\alpha_0 = 0$, по второму граничному $\alpha_1 = 0$, используя третье граничное условие, найдем вторую производную от $w_1(x)$ и получим значение $\alpha_2 = 0$.

$$w_1''(x) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 x_3 + 12\alpha_4 x_4 = qa^2/2,\ \alpha_2 = qa^2/4.$$

Из четвертого и пятого граничных условий:

$$M_x' = \alpha_3 + 4\alpha_4 a = 0,\ w_1''(x) = \alpha_2 + 3\alpha_3 a + 6\alpha_4 a^2 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{qa}{6},\ \alpha_4 = \frac{q}{24}.$$

Подставляя значения полученных коэффициентов, получаем функцию прогиба в направлении оси x

$$w_1(x) = \left(qa^2x^2/4\right) - \left(qax^3/6\right) + \left(q/24\right).$$

Найдем функцию прогиба в направлении оси y.

Представим функцию прогиба по оси y в виде тригонометрических функций $w_2(\mathrm{y}) = \alpha_1((y/b) + \sin(\pi y/b))$. (3)

Значение коэффициента будем искать через функционал энергии [3, 4]:

$$Э=\frac{1}{2}(\int_0^b \frac{d^2}{dy^2}dy-P\cdot w)=\left(\frac{\pi^4\alpha_1{}^2}{4b^3}\right)-\left(\frac{3bq\alpha_1}{4}\right)=0,$$

$$\frac{d^2}{\partial y^2}=\alpha_1(\frac{y}{b}+\sin(\frac{\pi y}{b}))=-\frac{\pi^2\alpha_1}{b^2}\sin(\frac{\pi y}{b}), \qquad \alpha_1=3b^4q/\pi^4.$$

Подставим значения полученного коэффициента в (3) и найдем функцию прогиба в направлении оси y

$$w_2(y)=(3b^4q/\pi^4)((y/b)+\sin(\pi y/b)).$$

Таким образом, функция прогиба пластинки примет вид:

$$w(x,y)=a_1w_1(x)w_2(y),$$

$$w(x,y)=a_1\left(qa^2x^2/4\right)-\left(qax^3/6\right)+\left(q^2 3b^4/24\pi^4\right)\left(y/b+\sin(\pi y/b)\right),$$

$$w(x,y)=a_1b^3x^2(y+b\sin(\pi y/b))(6a^2-4ax+x^2)/8\pi^4.$$

Найдем значения кривизны пластинки:

$$\chi_x(x,y)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=a_1\frac{3b^3(y+b\sin(\pi y/b))(a-x)^2}{2\pi^4},$$

$$\chi_y(x,y)=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-a_1\frac{x^2b^2\sin(\pi y/b)(6a^2-4ax+x^2)^2}{8\pi^2},$$

$$\chi_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w}{\partial x})=a_1\frac{xb^3(\pi\cos(\pi y/b+1)(3a^2-3ax+x^2)}{2\pi^4}.$$

Определим значения моментов:

$$M_x(x,y)=-D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})= \tag{4}$$

$$=-D\alpha_1\frac{(3b^3(a-x)^2(y+b\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)/2\pi^4)+3x^2b^2\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)(6a^2-4ax+x^2)}{80\pi^2},$$

$$M_y(x,y)=-D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\mu+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})=$$

$$= -D\alpha_1 \frac{\left(9b^3(a-x)^2\left(y+b\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)\right)/20\pi^4 + \left(x^2b^2\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)(6a^2-4ax+x^2)\right)}{8\pi^2},$$

$$M_{xy}(x,y) = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -Da_1 \frac{7xb^3(\pi\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)+1)(3a^2-3ax+x^2)}{20\pi^4}.$$

Определим потенциальную энергию внутренних сил по формуле

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[M_x(x,y)\chi_x(x,y) + M_y(x,y)\chi_y(x,y) + 2M_{xy}(x,y)\chi_{xy}(x,y)\right]dxdy =$$

$$= -Da_1{}^2 \frac{a^5b^5(182\pi^5a^4 + (9072+3780\pi)b^4 + (1053\pi^2 - 162\pi - 2268)\pi a^2b^2)}{20160\pi^9}.$$

Определим потенциальную энергию внешних сил по формуле

$$T = \int_0^a\int_0^b q(x,y)w(x,y)dxdy = -a_1 3a^5b^5q(\pi+4)/40\pi^5.$$

Вычислим первую вариацию полной энергии системы по формуле

$$\delta Э = \delta U + \delta T. \qquad (5)$$

Приравняв первую вариацию (5) полной энергии к нулю, получим значение коэффициента a_1 в аппроксимирующей функции

$$a_1 = -\frac{756\pi^4 q(\pi+4)}{D(182\pi^5a^4 + (9072+3780\pi)b^4 + (1053\pi^3 - 162\pi^2 - 2268\pi)a^2b^2)}.$$

Таким образом, функция прогиба пластинки примет вид:

$$w(x,y) = a_1 w_1(x) w_2(y),$$

$$w(x,y) = -\frac{94,5b^3qx^2(\pi+4)(y+b\sin(\pi y/b))(6a^2-4ax+x^2)}{D(182\pi^5a^4 + (9072+3780\pi)b^4 + (1053\pi^3 - 162\pi^2 - 2268\pi)a^2b^2)}.$$

2. Расчет пластинки по методу Бубнова – Галеркина

Аппроксимирующая функция прогиба в первом приближении задана в виде:

$$w(x,y) = a_2 w_1(x) w_2(y)\,, \tag{6}$$

где w_1 - функция прогиба в направлении оси x, w_2 - функция прогиба в направлении оси y, a_2 - неизвестный коэффициент, подлежащий определению.

Уравнение равновесия Софи - Жермен имеет вид

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4}\,. \tag{7}$$

Подставляя функцию прогиба в уравнение равновесия Софи – Жермен (7), получаем

$$a_2 \nabla^4 w_1(x) w_2(y) - q / D \neq 0\,.$$

Так как аппроксимирующая функция прогиба не является точным решением уравнения, составим вариационное уравнение Бубнова - Галеркина

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - q / D\right] dw dx dy = 0\,. \tag{8}$$

Подставляя в вариационное уравнение функцию прогибов, получим следующее выражение, из которого можно найти значение коэффициента a_2 в аппроксимирующей функции [5, 6]

$$\delta a_2 (a_2 \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w_1(x) w_2(y)\right] w_1(x) w_2(y) dx dy - \int_0^a \int_0^b (q / D) w_1(x) w_2(y) dx dy) = 0\,.$$

Отсюда

$$a_2 = \left(\int_0^a \int_0^b (q / D) w_1(x) w_2(y) dx dy\right)\left(\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w_1(x) w_2(y)\right] w_1(x) w_2(y) dx dy\right)^{-1}\,.$$

Раскрывая оператор ∇ в выражении [7], получим развернутое определение коэффициента a_2:

$$a_2=\left(\int_0^a\int_0^b\left(\frac{q}{D}\right)w_1(x)w_2(y)dxdy\right)\left(\int_0^a\int_0^b\left[\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{2d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right]w_1(x)w_2(y)dxdy\right)^{-1},$$

$$a_2=-\frac{378\pi^4q(\pi+4)}{D((182\pi^4+91\pi^5)a^4+(4536+1890\pi)b^4-(135\pi^3+270\pi^2)a^2b^2)}.$$

Таким образом, функция прогиба пластинки примет вид:

$$w(x,y)=a_1w_1(x)w_2(y),$$

$$w(x,y)=-\frac{189b^3qx^2(\pi+4)(y+b\sin(\frac{\pi y}{b}))(6a^2-4ax+x^2)}{4D((182\pi^4+91\pi^5)a^4+(4536+1890\pi)b^4-(135\pi^3+270\pi^2)a^2b^2)}.$$

3. Анализ результатов

По результатам расчета были построены эпюры перемещений и моментов по методам Ритца - Тимошенко и Бубнова – Галеркина. Для сравнения были также получены эпюры при решении этой же задачи методом конечных элементов (МКЭ) [8, 9]. Полученные результаты представлены в табл.1 и на рис.2-3. На данных рисунках красным цветом показана эпюра построенная с использованием МКЭ, зеленым цветом - методом Ритца - Тимошенко, синим цветом - методом Бубнова – Галеркина.

Таблица № 1

Результаты расчета пластинки, полученные различными методами

Сечение 1-1	Значение перемещений $w(x,y)$, мм / значение момента $M_x(4)$, кН · м								
№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
МКЭ	0	-0,136	-0,496	-0,992	-1,55	-2,13	-2,68	-3,12	-3,72
	-0,302	-0,247	-0,146	-0,0703	-0,0174	-0,0149	0,0281	0,022	0,0138
Ритца - Тимошенко	0	-0,088	-0,325	-0,67	-1,09	-1,56	-2,06	-2,57	-3,1
	-0,237	-0,187	-0,123	-0,0537	-0,0168	0,0098	0,0164	0,0124	0
Бубнова - Галеркина	0	-0,202	-0,741	-1,53	-2,49	-3,56	-4,69	-5,86	-7,03
	-0,342	-0,309	-0,214	-0,0773	-0,0183	0,0165	0,0298	0,0302	0

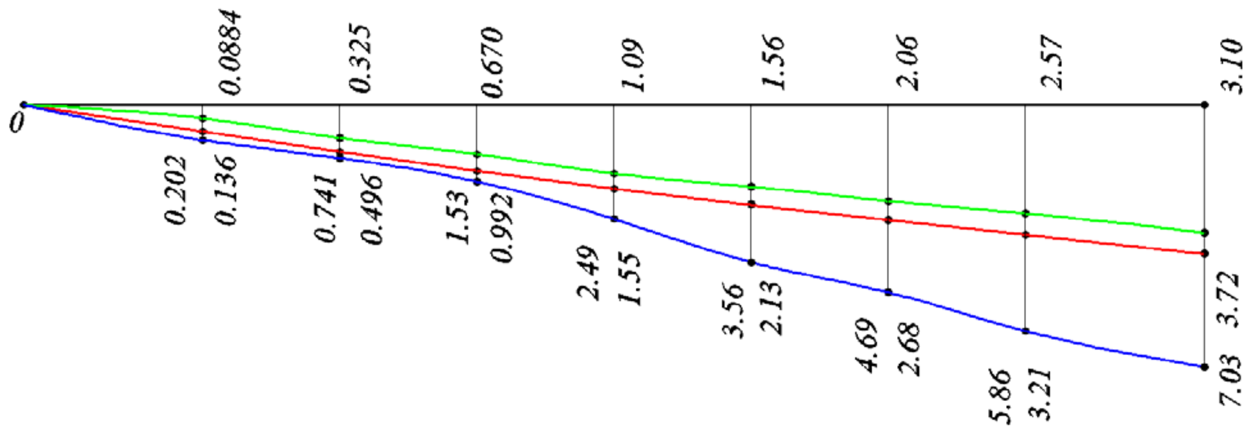

Рис. 2. - Эпюра перемещений пластинки в сечении 1-1, мм

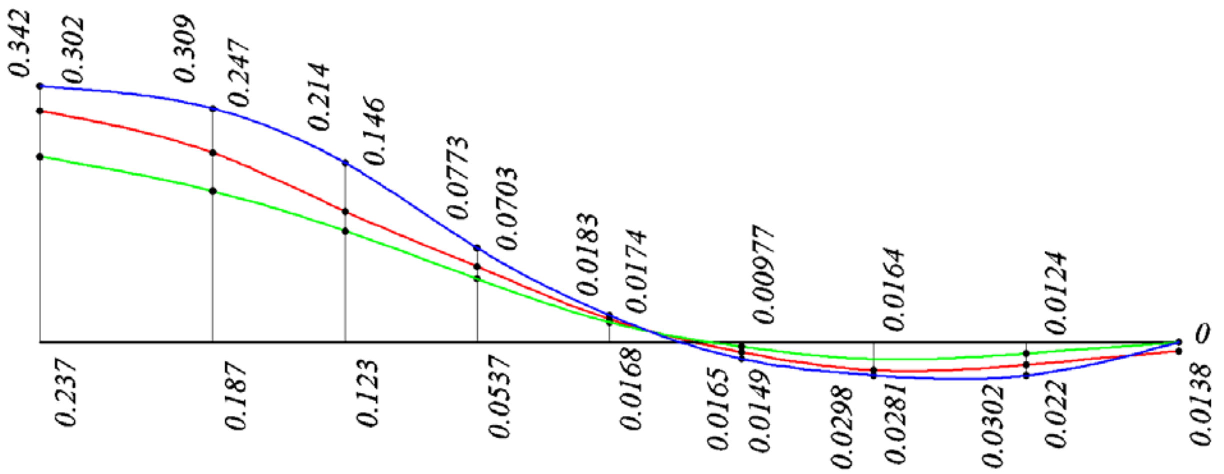

Рис. 3. - Эпюра моментов M_x пластинки в сечении 1-1, кН·м

4. Выводы

При использовании тригонометрической функция по оси y, была получена более точная аппроксимирующая функция прогиба пластинки. Так как действительные значения моментов в точке максимального значения прогиба равны нулю, то можно сказать, что с помощью этой функции при сравнении результатов было достигнуто расхождение моментов близкое к нулю. Исходя из полученных значений прогиба пластинки, можно сделать вывод, что более точный метод, показывающий величину прогиба является метод Ритца - Тимошенко. Основным фактором, влияющим на отклонения результатов решения вариационными методами от результата МКЭ, является неточное нахождение функции прогиба пластинки [10].

Литература

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Физматгиз, 1963. 636 с.

2. Игнатьев А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 / Вестник МГСУ. 2015. №1. С. 16-26.

3. Литвинов В.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки / Инженерный вестник Дона, 2012, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.

4. Levin V. A., Zingerman K. M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. Issue 12. pp. 2240-2251

5. Филатов А.Р. Анализ эффективности применения перенумерации узлов конечно-элементной сетки применительно к методу конечных элементов на трёхмерных задачах линейной теории упругости // Инженерный вестник Дона, 2013, №2. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1729.

6. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep / Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.

7. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiselyev A.P. The finite elements of a quadrilated shape for analysis of shells taking into consideration a displacement of a body with rigid body modes / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 3. С. 49-59.

8. Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жесткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода / Известия высших учебных заведений. Строительство. 2017. № 9 (705). С. 5-14.

9. Рекунов, С.С. Формирование матриц откликов конечных элементов с учетом упругого основания / Интернет-журнал Науковедение. - 2014. - № 5 (24). - С. С. 1-11. - URL: naukovedenie.ru.

10. Душко О.В., Родин С.И. Поиск оптимального решения методом генетических алгоритмов для инженерных задач / III международная научно-техническая конференция "Надежность и долговечность строительных материалов и конструкций", Волгоград, 27-29 марта 2003 г. С. 81-83.

References

1. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. Plastinki i obolochki [Plates and shells]. Moskva: Fizmatgiz, 1963. 636 p.

2. Ignatyev A.V. Vestnik MGSU. 2015. №1. pp. 16-26.

3. Litvinov V.V., Jazyev B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.

4. Levin V. A., Zingerman K. M. Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. Issue 12. pp. 2240-2251.

5. Filatov A.R. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1729.

6. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.

7. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiselyev A.P. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2011. №3. pp. 49-59.

8. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., News of higher educational institutions. Construction. 2017. № 9 (705). pp. 5-14.

9. Rekunov, S.S. Naukovedenie. 2014. № 5 (24). pp. 1-11. URL: naukovedenie.ru.

10. Dushko O.V., Rodin S.I. III international scientific-technical conference "Reliability and durability of building materials and structures". Volgograd, March 27-29, 2003. pp.81-83.