

К математической теории поверхностных волн в открытых композиционных нелинейных анизотропно-градиентных структурах

А.И. Киреева, И.П. Руденок, А.П. Поздняков

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: Представлены результаты аналитического исследования распространения поверхностных волн в открытых нелинейных анизотропно-градиентных четырёхслойных планарных структурах. Получены новые решения волновых уравнений в нелинейно-градиентном и анизотропно-градиентном диэлектрических слоях с учётом их взаимодействия. Найдены выражения для составляющих электрического и магнитного полей магнитных и электрических волн.

Ключевые слова: нелинейность, нелинейная оптика, слоистые структуры, поверхностные волны, дискретный спектр, диэлектрические волноводы сложной структуры.

Во многих прикладных областях оптоэлектроники и интегральной оптики, системах передачи и обработки информации, оптических вычислительных устройствах и т.д. используются многофункциональные элементы, выполненные на основе композиционных многослойных волноведущих структур [1,2]. В них в качестве передающих сред могут быть искусственные активные и пассивные материалы с градиентными, нелинейными, анизотропными, магнитогиротропными свойствами различной физической природы (диэлектрики, проводники, полупроводники, магнетики, жидкие кристаллы) [3]. К этим элементам можно отнести слабо отражающие покрытия, тонкоплёночные магнитные запоминающие устройства, преобразователи электромагнитного излучения, управляемые электрическим или магнитным полем фильтры, пропускающие или отражающие наперёд заданные участки спектра. Тем не менее, самому явлению распространения волн в таких структурах посвящено мало работ. Исследование спектра направляемых волн проводится в большинстве случаев для бианизотропных, анизотропных, нелинейных материалов с постоянными материальными характеристиками [4]. Для этого применяются методы матриц Джонса, матриц Хэвенса, матриц 4×4 [5-7]. В их основе

лежит матричное представление уравнений Максвелла с учётом тензорного характера диэлектрической и магнитной проницаемости среды. Если представление материальных характеристик тензорами особых трудностей не составляет, то решение задачи о собственных волнах и волновых числах, даже когда элементы этих тензоров являются постоянными величинами, вызывает математические трудности как для элементарных ячеек в непрерывно модулированных структурах, так и в многослойных структурах. Здесь в общем случае главные оси тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей могут быть произвольным образом ориентированы относительно осей координат, связанных с геометрией волноведущей структуры. Поэтому, как правило, исследователи ограничиваются анализом отдельных частных случаев ориентации осей тензоров ϵ и μ относительно осей Ox , Oy , Oz , в которых, однако, проявляются все особенности таких структур. На практике «точкой отсчёта» является обычная однородная диэлектрическая среда и её дисперсионные свойства. Затем к ней добавляются малые добавки анизотропии, бианизотропии, нелинейности, градиентности, поглощения или усиления и т.д. и исследуются волны дискретного и непрерывного спектра. Для сложных сред с переменными материальными характеристиками и волноведущих структур на их основе такие «точки отсчёта» отсутствуют. Расчёт спектра волн в указанных регулярных и нерегулярных структурах представляет очень сложную и громоздкую задачу, точное аналитическое решение которой ещё не получено. Конечно, учесть и проанализировать огромное разнообразие нелинейно-градиентных неоднородностей случайного или детерминированного характера, вызываемых технологическими особенностями изготовления, назначения и эксплуатации на свойства волн дискретного и непрерывного спектра, энергетических параметров излучения не представляется возможным. Поэтому в данной работе рассматриваются

обобщённые виды нелинейно-градиентных и анизотропно-градиентных распределений диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости направляющих структур, для которых можно построить аналитическую теорию, согласующуюся с теорией волн в однородных линейных диэлектрических волноводах. Анализ распространения волн проводился для пассивных и активных анизотропных структур, когда главные оси тензора диэлектрической проницаемости совпадают с осями выбранной системы координат [8,9]. В [10] проведены расчёты постоянных распространения поверхностных волн в анизотропных градиентных волноводах для общего случая произвольной ориентации главных осей тензора диэлектрической проницаемости, когда собственными волнами структуры являются гибридные моды.

С практической точки зрения представляет интерес исследование дисперсионных свойств двухслойной композиционной структуры, в которой один слой градиентно-нелинейный, а другой анизотропно-градиентный, которая имеет большое самостоятельное значение, а также может быть широко применима, как элементарная ячейка в многослойных периодических структурах со сложной внутренней средой.

Сначала рассмотрим собственные волны дискретного спектра нелинейно-градиентного слоя.

Рассмотрим волноведущую структуру (Рис.1), у которой направляющие композиционные и градиентные внешние слои не ограничены вдоль одной из поперечных осей координат (оси Oy); волны распространяются по направлению оси Oz , а по оси координат Ox толщина нелинейно-градиентного слоя равна (x_0). Между векторами электрического и магнитного полей существуют уравнения связи:

$$\vec{D} = \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, |\vec{E}|, x) \cdot \vec{E} \text{ и } \vec{B} = \mu \cdot \vec{H},$$

где обобщённый пространственный профиль диэлектрической проницаемости изменяется по закону вида:

$$\varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, |\vec{E}|, x) = \varepsilon_{1, \max} \left(1 - g_2 x^2 + g_4 x^4 + \alpha \cdot |\vec{E}|^m \right), \quad (1)$$

где g_2, g_4, α – параметры градиентности и нелинейности волноведущей среды, $\varepsilon_{1, \max}$ – наибольшее значение распределения диэлектрической проницаемости; m – параметр степени влияния нелинейной составляющей распределения (1).

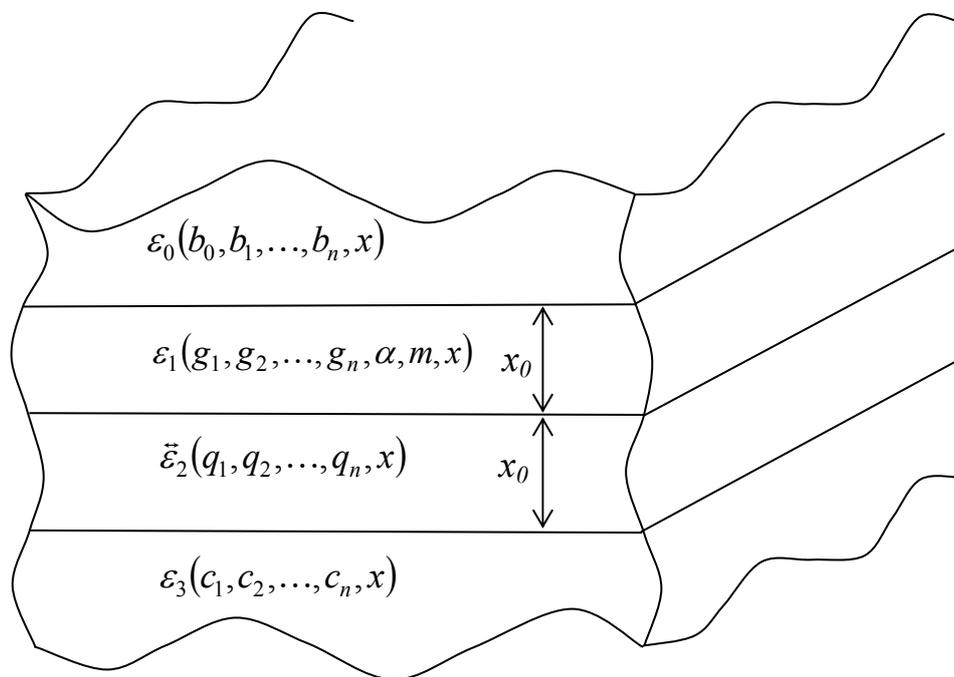


Рис.1.– Геометрия слоистой композиционной волноведущей структуры.

Из уравнений Максвелла можно получить квази-дифференциальные уравнения относительно поперечной составляющей электрического поля следующего вида:

для H_n волн:

$$\Delta_{x,z} E_y + \omega^2 \mu \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x) E_y = 0, \quad (2)$$

для E_n волн:

$$\Delta_{x,z} E_x + \frac{1}{\varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)} \cdot \frac{d\varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{dx} \frac{\partial E_x}{\partial x} +$$
$$+ \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2(g_2, g_4, \alpha, m, x)} \times \right. \quad (3)$$
$$\left. \times \left[\frac{d^2 \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{dx^2} \right]^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x) \right\} E_x = 0,$$

$$\text{где } \frac{d\varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{dx} = \frac{\partial \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_1(g_2, g_4, \alpha, m, x)}{\partial |\vec{E}|} \frac{d|\vec{E}|}{dx}.$$

Используя метод полного или частичного разделения переменных и осуществляя нормировку, получаем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_2 r^2 + \tilde{b}_4 r^4 + \tilde{b}_6 F^m) F = 0, \quad (4)$$

$$\beta_0(g_2, g_4, F, r) \frac{d^2 F}{dr^2} + \beta_1(g_2, g_4, F, r) \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 + \beta_2(g_2, g_4, F, r) \frac{dF}{dr} +$$
$$+ \beta_3(g_2, g_4, F, r) F + \beta_4(g_2, g_4, F, r) F^{m+1} + \beta_5(g_2, g_4, F, r) F^{2m+1}$$
$$+ \beta_6(g_2, g_4, F, r) F^{3m+1} = 0. \quad (5)$$

Выпишем некоторые коэффициенты с учётом того, что γ – продольное волновое число и k_1 – волновое число однородной бесконечной среды, а

$$r = \frac{x}{x_0} :$$

$$\tilde{b}_0 = (k_1^2 - \gamma^2) x_0^2, \quad \tilde{b}_2 = -k_1^2 g_2 x_0^4, \quad \tilde{b}_4 = k_1^2 g_4 x_0^6, \quad \tilde{b}_6 = k_1^2 x_0^2 \alpha F_0^m(x_0),$$
$$k_1^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{1, \max}; \quad \beta_0(g_2, g_4, F, r) = q_0 - q_2 r^2 + q_4 r^4 + q_6 r^6 + q_8 r^8 +$$
$$+ 2 \left(q_0 - \check{q}_2 r^2 + \check{q}_4 r^4 \right) \alpha F_0^m(x_0) F^m + \alpha^2 F_0^{2m}(x_0) F^{2m}.$$

$$\beta_1(g_2, g_4, F, r) = A_0(g_2, g_4, r) \alpha m^2 F_0^{m-1}(x_0) F^{m-1},$$

$$\begin{aligned}\beta_2(g_2, g_4, F, r) &= d_1 r + d_3 r^3 - d_5 r^5 + d_7 r^7 + \\ &+ A_1(g_2, g_4, r) \alpha F_0^m(x_0) F^m - A_2(g_2, g_4, r) m \alpha F_0^m(x_0) F^m, \\ \beta_3(g_2, g_4, F, r) &= \tilde{c}_0 - \tilde{c}_2 r^2 + \tilde{c}_4 r^4 - \tilde{c}_6 r^6 + \tilde{c}_8 r^8 - \tilde{c}_{10} r^{10} + \tilde{c}_{12} r^{12}, \\ \beta_4(g_2, g_4, F, r) &= (h_0 - h_2 r^2 + h_4 r^4 - h_6 r^6 + h_8 r^8) \alpha^2 F_0^{m+1}(x_0), \\ \beta_5(g_2, g_4, F, r) &= (f_0 - f_2 r^2 + f_4 r^4) \alpha^2 F_0^{2m+1}(x_0), \\ \beta_6(g_2, g_4, F, r) &= k_1^2 x_0^2 \alpha^3 F_0^{3m+1}(x_0), q_0 = 1, q_2 = 2g_2 x_0^2, q_4 = (g_2^2 + 2g_4) x_0^4, \\ q_6 &= -2g_2 g_4 x_0^6, q_8 = g_4^2 x_0^8, \check{q}_2 = -2g_2 x_0^2, \check{q}_4 = g_4 x_0^4.\end{aligned}$$

В пределах нелинейной градиентной среды ($0 \leq r \leq 1$) уравнение (4) не имеет особых точек, поэтому его решение ищем в виде обобщённого ряда:

$$F(g_2, g_4, \alpha, r) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t r^t = a_0 + \sum_{t=1}^{\infty} a_t r^t. \quad (6)$$

При этом учитываем следующие необходимые соотношения:

$$F^m(g_2, g_4, \alpha, r) = a_0 + c_m^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + c_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j + \dots + \quad (7)$$

$$+ c_m^m \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j \dots \sum_{s=1}^{\infty} a_s r^s = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t r^t, \quad \text{где } \alpha_0 = 1;$$

$$\begin{aligned}\alpha_t &= c_m^1 a_t + c_m^2 \sum_{n=1}^{t-1} a_n a_{t-n} + c_m^3 \sum_{n=1}^{t-2} a_n \sum_{j=1}^{t-1-n} a_j a_{t-n-j} + \dots + \\ &+ c_m^m \sum_{n=1}^{t-m+1} a_n \sum_{j=1}^{t-m+2-n} a_j \dots \sum_{s=1}^{t-1-n-j-\dots} a_s a_{t-n-j-\dots-s}.\end{aligned} \quad (8)$$

Для нахождения третьего слагаемого в выражении (8) необходимо применить условие $j + n = t$, откуда следует, что каждому определённому n соответствует единственное $j = t - n$. Поскольку $j \geq 1$, то n может принимать значения от 1 до $t - 1$. Следовательно, третье слагаемое можно представить в виде:

$$c_m^2 \sum_{n=1}^{t-1} a_n a_{t-n}.$$

Аналогично можно найти и последующие слагаемые в равенстве (8).

Подставляя соотношения (6)-(8) в уравнение (4), приравнявая выражения при одинаковых степенях и последовательно определяя коэффициенты обобщённого ряда (6), получаем специальное волновое решение [11] уравнения (4) в виде:

$$F(g_2, g_4, \alpha, r) = \Pi i(g_2, g_4, \alpha, m, r). \quad (9)$$

Группируя слагаемые с чётными и нечётными степенями, запишем преобразованное выражение (9):

$$F(g_2, g_4, \alpha, r) = \Pi i_1(g_2, g_4, \alpha, m, r) + \Pi i_2(g_2, g_4, \alpha, m, r). \quad (10)$$

Распишем функции, представленные в (10):

$$\begin{aligned} \Pi i_1(g_2, g_4, \alpha, m, r) = & 1 - \frac{1}{2!}(b_0 + \alpha)r^2 + \frac{1}{4!}[b_0^2 + \alpha b_0 + m\alpha^2 - \\ & - 2b_2 - \alpha m(m-1)]r^4 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Pi i_2(g_2, g_4, \alpha, m, r) = & r - \frac{1}{3!}(b_0 + \alpha m)r^3 + \frac{1}{5!}[b_0^2 - 6b_2 + 2\alpha m b_0 + \\ & + \alpha^2 m^2 + 3(b_0 + \alpha)(m^2 - m) + (m^2 - m)(m-2)]r^5 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, при $0 \leq r \leq 1$ для чётных H -волн получаем:

$$E_y^I = [A_1 \Pi i_1(g_2, g_4, \alpha, m, r) + A_2 \Pi i_2(g_2, g_4, \alpha, m, r)] \exp(-j\gamma z). \quad (13)$$

$$H_z^I = \frac{A_1}{j\omega\mu} \Pi i_1'(g_2, g_4, \alpha, m, r) + \frac{A_2}{j\omega\mu} \Pi i_2'(g_2, g_4, \alpha, m, r).$$

Далее рассмотрим собственные волны дискретного спектра слоя, у которого тензор градиентной диэлектрической проницаемости повернут на некоторый угол относительно направления распространения.

Во втором анизотропно-градиентном волноведущем слое диэлектрическая проницаемость задана тензором:

$$\vec{\varepsilon}_2(g_2, g_4, r) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) & 0 & \varepsilon_{13}(q_2, q_4, r) \\ 0 & \varepsilon_{22}(q_2, q_4, r) & 0 \\ \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r) & 0 & \varepsilon_{33}(q_2, q_4, r) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Поперечные компоненты электрического и магнитного векторов поля удовлетворяют независимым уравнениям (2), где присутствует элемент тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{22}(g_2, g_4, r)$ из (14) и:

$$\begin{aligned} & \tau(q_2, q_4, r) \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) \frac{\partial^2 H_y}{\partial r^2} + \varepsilon_{33}(q_2, q_4, r) \tau(q_2, q_4, r) \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \\ & + \tau(q_2, q_4, r) [\varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) + \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r)] \frac{\partial^2 H_y}{\partial r \partial z} + [\tau(q_2, q_4, r) \times \\ & \times \frac{d\varepsilon_{11}(q_2, q_4, r)}{dr} - \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) \frac{\partial \tau(q_2, q_4, r)}{\partial r}] \frac{\partial H_y}{\partial r} + \left[\frac{d\varepsilon_{31}(q_2, q_4, r)}{dr} \times \right. \\ & \left. \times \tau(q_2, q_4, r) - \frac{\partial \tau(q_2, q_4, r)}{\partial r} \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r) \right] \frac{\partial H_y}{\partial z} + \omega^2 \mu \tau^2(q_2, q_4, r) H_y = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Возьмём пространственные распределения элементов тензора диэлектрической проницаемости в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) &= \varepsilon_{11,m} (1 - q_2 r^2 + q_4 r^4), \\ \varepsilon_{13}(q_2, q_4, r) &= \varepsilon_{13,m} (1 - q_2 r^2 + q_4 r^4), \\ \varepsilon_{22}(q_2, q_4, r) &= \varepsilon_{22,m} (1 - q_2 r^2 + q_4 r^4), \\ \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r) &= \varepsilon_{31,m} (1 - q_2 r^2 + q_4 r^4), \\ \varepsilon_{33}(q_2, q_4, r) &= \varepsilon_{33,m} (1 - q_2 r^2 + q_4 r^4), \end{aligned} \quad (16)$$

причём $\varepsilon_{11,m} \neq \varepsilon_{13,m} \neq \varepsilon_{22,m} \neq \varepsilon_{31,m} \neq \varepsilon_{33,m}$.

Коэффициенты уравнения (15) с учётом представления (16) представим в виде:

$$\begin{aligned} \tau(q_2, q_4, r) \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) &= f(q_2, q_4, r) (\varepsilon_{11,m}^2 \cdot \varepsilon_{33,m} - \varepsilon_{13,m} \cdot \varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{31,m}), \\ \tau(q_2, q_4, r) \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) &= f(q_2, q_4, r) (\varepsilon_{33,m}^2 \cdot \varepsilon_{11,m} - \varepsilon_{13,m} \cdot \varepsilon_{33,m} \cdot \varepsilon_{31,m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(q_2, q_4, r) [\varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) + \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r)] &= f(q_2, q_4, r) (\varepsilon_{11,m}^2 \cdot \varepsilon_{33,m} - \\ &- \varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{13,m} \cdot \varepsilon_{31,m} + \varepsilon_{31,m} \cdot \varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{33,m} - \varepsilon_{13,m} \cdot \varepsilon_{31,m}^2), \\ \tau(q_2, q_4, r) \frac{d\varepsilon_{11}(q_2, q_4, r)}{dr} - \varepsilon_{11}(q_2, q_4, r) \frac{\partial \tau(q_2, q_4, r)}{\partial r} &= \\ = \frac{\partial f(q_2, q_4, r)}{\partial r} (\varepsilon_{11,m}^2 \cdot \varepsilon_{33,m} - \varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{13,m} \cdot \varepsilon_{31,m}), \\ \tau(q_2, q_4, r) \frac{d\varepsilon_{31}(q_2, q_4, r)}{dr} - \varepsilon_{31}(q_2, q_4, r) \frac{\partial \tau(q_2, q_4, r)}{\partial r} &= \\ = \frac{\partial f(q_2, q_4, r)}{\partial r} (\varepsilon_{31,m} \cdot \varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{33,m} - \varepsilon_{13,m} \varepsilon_{31,m}^2), \\ \omega^2 \mu \tau^2(q_2, q_4, r) &= \omega^2 \mu (\varepsilon_{11,m} \cdot \varepsilon_{33,m} - \varepsilon_{13,m} \varepsilon_{31,m}). \end{aligned}$$

Решение уравнения вида (15) с учётом нормировки и разделения переменных можно представить в виде суммы специальных функций [11,12], для которых получены разложения в функциональные ряды, сопровождающиеся рекуррентными соотношениями для их элементов. Общее решение выглядит:

$$\begin{aligned} E_y^{\text{II}} &= B_1 \Pi_1(q_2, q_4, \mathbf{x}, r) + B_2 \Pi_2(q_2, q_4, \mathbf{x}, r), \\ E_z^{\text{II}} &= \frac{B_1}{j\omega\mu} \Pi_{1,r}'(q_2, q_4, \mathbf{x}, r) + \frac{B_2}{j\omega\mu} \Pi_{2,r}'(q_2, q_4, \mathbf{x}, r). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее рассмотрим собственные волны дискретного спектра покрытия и подпокрытия. В покрытии (верхнем анизотропно-градиентном слое) тензор диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\vec{\varepsilon}_0(b_2, b_4, r) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(b_2, b_4, r) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(b_2, b_4, r) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(b_2, b_4, r) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где каждый из элементов тензора представлен равенствами (16).

Из уравнения Максвелла с учётом нормировки и применением метода Фурье для функций поперечного сечения в случае распространения H волн получили уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[\omega^2 \mu \varepsilon_{22}(b_2, b_4, r) - \gamma^2 \right] R = 0, \quad (19)$$

а для распространения электрических волн:

$$f(b_2, b_4, r) \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\partial f(b_2, b_4, r)}{\partial r} \frac{d\Phi}{dr} + f(b_2, b_4, r) \left[\omega^2 \mu f(b_2, b_4, r) \varepsilon_{33,m} - \frac{\varepsilon_{33,m}}{\varepsilon_{11,m}} \tilde{\gamma}^2 \right] \Phi = 0, \quad (20)$$

Из уравнения (20) и уравнения (3) из [12] видно, что структура первого и второго линейно независимых решений совпадает со структурой решений волнового уравнения для электрических волн изотропного градиентного волновода, если в (20) переобозначить $\gamma^2 = (\varepsilon_{33,m} / \varepsilon_{11,m}) \tilde{\gamma}^2$.

Решение уравнения (19) с учётом [10] можно записать:

$$R = C_1 \Pi_1(b_2, b_4, \chi, r) \quad (21)$$

Поперечные и продольные составляющие электрического и магнитного полей имеют вид:

$$E_y = C_1 \Pi_1(b_2, b_4, \chi, r) \exp(-j\gamma z), \quad (22)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} C_1 \Pi'_{1,r}(b_2, b_4, \chi, r) \exp(-j\gamma z).$$

Пусть в подложке (нижнем полубесконечном слое) реализуется среда с тензором диэлектрической проницаемости (18), в котором его элементы имеют различные симметричные и несимметричные профили диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(c_1, c_2, c_4, r) &= \varepsilon_{11,m} f_1(c_1, c_2, c_4, r), \\ \varepsilon_{22}(c_0, c_1, \dots, c_n, r) &= \varepsilon_{22,m} f_2(c_0, c_1, \dots, c_n, r), \\ \varepsilon_{33}(c_1, c_4, r) &= \varepsilon_{33,m} f_3(c_1, c_4, r). \end{aligned}$$

Осуществляя разделение переменных в уравнениях Максвелла с учётом нормировки, получаем для магнитных направляемых волн (функций

поперечного сечения) уравнения вида (19), а для электрических волн волновое уравнение:

$$f_1(c_1, c_2, c_4, r) f_1(c_1, c_4, x) \frac{d^2 R}{dr^2} - f_1(c_1, c_2, c_4, r) \frac{\partial f_3(c_1, c_4, r)}{\partial x} \frac{dR}{dx} +$$
$$+ f_3^2(c_1, c_4, r) \frac{\varepsilon_{33,m}}{\varepsilon_{11,m}} \left[\omega^2 \varepsilon_{11,m} \mu f_1(c_1, c_2, c_4, x) - \beta^2 \right] R = 0. \quad (24)$$

Пусть элемент тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{22}(a_0, a_1, \dots, a_n, x)$ можно представить разложением:

$$\tilde{\varepsilon}_{22}(c_0, c_1, \dots, c_n, r) = 1 - c_1 r - c_2 r^2 - c_3 r^3 - c_4 r^4 - c_5 r^5 - c_6 r^6 - \dots,$$

или

$$\tilde{\varepsilon}_{22}(c_0, c_1, \dots, c_n, r) = 1 - \varphi(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r). \quad (25)$$

Осуществляя замену переменных в уравнении (19), получим:

$$R = \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \Psi, \quad \xi = \int_0^r \varphi^{\frac{1}{2}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) dr. \quad (26)$$

$$\nu = (1 - \xi^2) / k^2, \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{22,m},$$

преобразуем его к виду:

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{k^2 \nu}{\varphi(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r)} - \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r)}{\partial r^2} \right] \cdot \Psi = 0. \quad (27)$$

Разлагая элементы уравнения (27)

$$k^2 \nu \varphi^{-1}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r), \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \frac{\partial^2 \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r)}{\partial r^2}$$

в ряд по возрастающим степеням r и ограничиваясь пятью первыми членами разложения, чему соответствует в полиноме (25) слагаемое до r^6 включительно ($c_0=0, c_1=0$), получаем уравнение:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{16}\xi^{-2} + \lambda_0 + \lambda_1\xi^{-1} + \lambda_2\xi^{-1/2} \right) \Psi = 0, \quad (28)$$

в котором:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & k^2 + \frac{k^2\nu}{2c_2} \left(\frac{103 c_3^2}{72 c_2^2} - \frac{3 c_4}{2c_2} \right) + \frac{3}{2c_2} \left(\frac{12061 c_3^4}{1382 c_2^4} + \frac{1723 c_3^2 c_4}{576 c_2^3} + \right. \\ & \left. + \frac{109 c_4^2}{96 c_2^2} + \frac{5 c_3 c_5}{2 c_2^2} - \frac{5 c_6}{3 c_2} \right), \lambda_1 = 2^{-1} c_2^{-1/2} \cdot \left[k^2\nu - \frac{1}{8} \left(\frac{3 c_4}{c_2} - \frac{7 c_3^2}{4 c_2^2} \right) \right], \\ \lambda_2 = & 2^{1/2} c_2^{-3/4} \cdot \left[-\frac{k^2\nu c_3}{3 c_2} + \frac{3}{10} \left(-\frac{2 c_5}{c_2} + \frac{8 c_3 c_4}{3 c_2^2} - \frac{28 c_3^3}{27 c_2^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Уравнение (28) является разновидностью уравнения параболического цилиндра и имеет два линейно-независимых решения:

$$\psi_1 = \xi^{1/4} D_n(y), \psi_2 = \xi^{1/4} D_{n+1}(jy), \quad (29)$$

где $D_n(y), D_{n+1}(jy)$ – функции параболического цилиндра или функции

Вебера-Эрмита и $n = -\frac{1}{2} + j\lambda_0^{-1/2} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_0} \right)$, $y = 2\lambda_0^{1/4} \left(\xi^{1/2} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_0} \right) e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

Таким образом, с учётом (26), (29) получили общее решение уравнения (19):

$$\begin{aligned} R(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) = & A_1 \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \xi^{1/4} D_n(y) + \\ & + A_2 \varphi^{-\frac{1}{4}}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \xi^{1/4} D_{n+1}(jy), \end{aligned}$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

В стандартном виде последнее можно записать:

$$R(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) = A_1 R_1(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) + A_2 R_2(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r). \quad (30)$$

Отметим, что при целом неотрицательном числе n функции Вебера-Эрмита связаны с полиномами Эрмита следующими соотношениями:

$$D_n(y) = \frac{e^{y^2/4}}{\sqrt{2^n}} H_n\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Поперечные и продольные составляющие электрического и магнитного поля можно записать:

$$E_y = A_1 R_1(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \exp(-j \gamma z),$$
$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} A_1 R'_{1,r}(c_0, c_1, \dots, c_n, \beta, r) \exp(-j \gamma z).$$

Полученные аналитические выражения для поперечных и продольных компонент электрического и магнитного векторов на основе новых решений волновых уравнений (4), (5), (19), (20), (24) в виде неклассических специальных функций позволяют ставить и решать задачи оптимального синтеза открытых регулярных и нерегулярных волноведущих структур со сложной композицией внутренней среды и их границ по заданному критерию качества, а также исследовать дисперсионные свойства фрактальных композиционных волноводов и световодов [13-15].

Литература

1. Erogan T. Fiber grating spectra. J. Lightwave Technol., 1997, V. 15. № 8, P. 1277-1294.
2. Унгер, Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.-Г. Унгер. – М.: Мир, 1980. – 656 с.
3. Третьяков, С. А. Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы // Радиотехн. и электрон, 1994. – Т.39. – №10. – С. 1457–1470.

4. Акопов А.А., Лерер А.М. Сравнение параметров Рамановского усиления в фотонных кристаллах разной конфигурации // Инженерный вестник Дона, 2014, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2543.

5. Иванов О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных структурах PDF. Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262 с.

6. Тамир Т., Когельник Х., Бернс У.; ред.: Т. Тамир, В. И. Аникин; пер. с англ. А. П. Горобец. Волноводная оптоэлектроника. – М.: Мир, 1991. – 575 с.

7. Graham C., Raab R.E., "Eigenvector approach to the evaluation of the Jones N matrices of no absorbing crystalline media", J. Opt. Soc. Am. A, 1994, V.11, N 7, p. 2137–2144.

8. Руденок И.П., Киреева А.И., Филичёва Т.В. Распространение поверхностных волн в открытых слоистых градиентных периодических структурах // Физика и технические приложения волновых процессов = The physics and technology of wave processes: X Междунар. науч.-техн. конф., 11-17 сент. 2011г., Самара, Россия.- Самара: [ООО «Книга»], 2011. – С. 144-145.

9. Руденок И.П., Руденок А.И. К теории волн в открытых анизотропных нелинейных градиентных волноведущих структурах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. Самара: ПГУТИ, 2001. – Т.4. – №2. – С. 10-15.

10. Руденок И.П., Агишева Н.Н., Руденок А.И. О некоторых краевых задачах теории базовых композиционных волноведущих структур // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. Самара: ПГУТИ, 2003. – Т.6. – № 4. – С. 5-12.

11. Руденок И.П. Специальные волновые решения в теории открытых нелинейных градиентных световодов // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. Москва, 1996. – Т.4. – № 2 (14). – С. 92-93.

12. Руденок И.П., Киреева А.И., Филичёва Т.В. Поверхностные волны вдоль слоёв градиентности в периодических композиционных структурах //

Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2012. Т. 15, № 4. – С.41-47.

13. Киреева А.И., Руденок И.П. Волноводные свойства открытых планарных связанных нерегулярных композиционных структур // Инженерный вестник Дона, 2015, № 1, ч. 2. – Режим доступа:

URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2543.

14. Киреева А.И., Руденок И.П., Поздняков А.П. Особенности взаимодействия поверхностных волн в наноглобулярной композиционной фотонной структуре / Мин-во образования и науки Рос. Федерации // Наука и образование в XXI веке: сб. науч. Тр. По материалам Междунар. науч.-практ. конф., 30 дек. 2013г. – Москва: АР-Консалт, 2014. – Ч.1. – С. 153-155.

15. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002.-664 с.

References

1. Erogan T. Fiber grating spectra. J. Lightwave Technol., 1997, V. 15. № 8, P. 1277-1294.
 2. Unger H.G. Planarnye i volokonnye opticheskie volnovody [Planar and fiber optical waveguides]. Moscow: Mir, 1980. 656 p.
 3. Tret'jakov S. A. Radiotekhnika i jelektronika, 1994. V.39, №10. pp. 1457–1470.
 4. Akopov A.A., Lerer A.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, № 3
URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2543.
 5. Ivanov O.V. Rasprostranenie jelektromagnitnyh voln v anizotropnyh i bianizotropnyh strukturah [Distribution of electromagnetic waves in anisotropic and bianisotropic structures]. Ul'janovsk: UIGTU, 2010. 262 p.
 6. Tamir T., Kogel'nik H., Berns U. Volnovodnaja optoelektronika [Waveguide optoelectronics] Moscow : Mir, 1991. 575 p.
-

7. Graham C., Raab R.E., "Eigenvector approach to the evaluation of the Jones N matrices of nonabsorbing crystalline media", J. Opt. Soc. Am. A, 1994, V.11, N 7, p. 2137–2144.
8. Rudenok I.P., Kireeva A.I., Filichjova T.V. X Mezhdunarodnaja nauchno-tehnicheskaja konferencija "Fizika i tehnicheckie prilozhenija volnovyh processov": trudy (International Science and Technical Conference "The physics and technology of wave processes"), Samara, 2011, pp.144-145.
9. Rudenok I.P., Rudenok A.I. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheckie sistemy, 2001. V.4, № 2. pp. 10-15.
10. Rudenok I.P., Agisheva N.N., Rudenok A.I. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheckie sistemy, 2003. V.6, № 4. pp. 5-12.
11. Rudenok I.P. Jelektrodinamika i tehnika SVCh i KVCh, 1996. V.4. № 2 (14). pp. 92-93.
12. Kireeva A.I., Rudenok I.P., Filichjova T.V. Fizika volnovyh processov i radiotehnicheckie sistemy, 2012. V. 15, № 4. pp. 41-47.
13. Kireeva A.I. Rudenok I.P. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, № 1, part 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2859.
14. Kireeva A.I., Rudenok I.P., Pozdnjakov A.P. Mezhdunarodnaja nauchno-praktičeskaja konferencija "Nauka i obrazovanie v XXI veke": trudy (International Scientific Practically conference "Science and Education in the XXI century", 30th of december of 2015). Moscow, 2014. Part 1. pp.153-155.
15. Potapov A.A. Fraktaly v radiofizike i radiolokacii [Fractals in physics and radiolocation]. Moscow: Logos, 2002. 664 p.