Пространственные уравнения механики композиционного твердого тела для моделей вязкоупругости, содержащих в одномерном случае два упругих и один вязкий элемент

А.С. Кравчук[1], А.И. Кравчук[1], А.Ф. Смалюк[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск

Аннотация: Впервые при обобщении одномерной модели вязкоупругости для одного вязкого и двух упругих элементов на пространственный случай использовались девиаторы напряжений, деформаций, а также скоростей напряжений и деформаций. Установлено, что модель стандартного вязкоупругого тела является более универсальной, т.к. установлено, что вторая модель не может применяться при решении задач для весомого тела, или динамических задач, т.к. приводит к решению промежуточной физически неоправданной краевой или начально-краевой задачи для удвоенных значений ускорений. Таким образом, вторая модель может применяться только к решению квазистатических задач для невесомых тел. Установлено, что модель стандартного вязкоупругого тела применима только для исследования неустановившейся ползучести, тогда как вторая модель пригодна для исследования установившегося реологического поведения невесомого материала. Создано обобщение линейной модели вязкоупругости с двумя упругими и одним вязким элементом на случай композиционного в среднем изотропного тела.
Ключевые слова: девиатор напряжений, девиатор деформаций, девиатор скоростей напряжений, девиатор скоростей деформации, вязкость, стандартная вязкоупругое тело.

Введение

Линейные теории играют особую роль в математической физике. Аналитические преимущества линейных теорий очень велики и использование их в качестве первого приближения часто оправдано [1].

Необходимо отметить, что предположения о структуре тела и уравнения, применяемые при решении задач линейной теории ползучести изотропного тела (в случае малых деформаций), вообще говоря, эквивалентны гипотезам и основным уравнениям, используемым в теории упругости. Это объясняется эквивалентностью методологий получения основных соотношений на основе анализа напряженно-деформированного состояния элементарного объема. Однако, необходимо отметить некоторые особенности. Так, предполагается, что микроскопическая структура линейного вязкоупругого материала (в рамках элементарного объема) механически эквивалентна системе линейных вязких и упругих элементов [1 - 4].

Как известно, в одномерном случае из двух упругих элементов и одного вязкого можно создать две различные модели вязкоупругого поведения материала. Первая – модель стандартного вязкоупругого тела (Рис. 1 а), а вторая имеет вид, приведенный на рисунке 1, б [2, 3].

В статье рассматриваются оба варианта поведения вязкоупругого материала, т.к. они оба приводятся к одинаковым по структуре дифференциальным уравнениям с различающимися коэффициентами.

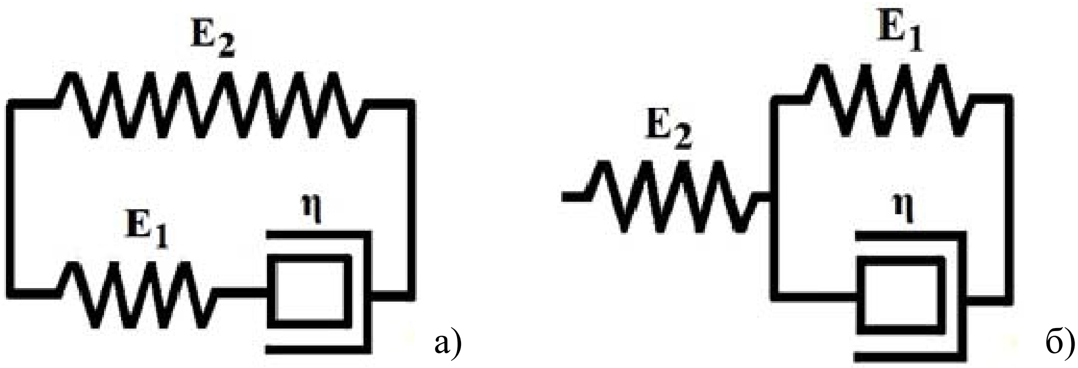

Рис. 1. – Варианты соединения вязкого (с вязкостью η) и двух упругих элементов с модулями упругости E_1 и E_2 в одномерных моделях вязкоупругости: а) стандартное вязкоупругое тело; б) обобщение модели Кельвина-Фойгта

Дифференциальные уравнения рассматриваемых одномерных вязкоупругих моделей

Не повторяя вычислений, приведенных в монографии Ржаницына А.Р. [2] для стандартного вязкоупругого тела (Рис. 1, а), можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\sigma(t)+\frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma}(t)=E_2\cdot\varepsilon(t)+\eta\cdot\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)\cdot\dot{\varepsilon}(t),$$

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – однородные напряжение и деформация любой из рассматриваемых одномерных механических моделей, $\dot{\sigma}(t)=\frac{d\sigma(t)}{dt}$, $\dot{\varepsilon}(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$.

Во втором случае (Рис. 1, б) можно получить дифференциальное уравнение [2]:

$$\left(1+\frac{E_1}{E_2}\right)\cdot\sigma(t)+\frac{\eta}{E_2}\cdot\dot{\sigma}(t)=E_1\cdot\varepsilon(t)+\eta\cdot\dot{\varepsilon}(t).$$

Будем предполагать, что при дальнейших обобщениях на трехмерный случай изотропного материала, что у него будет только один модуль упругости $(E_1=E_2)$. Тогда приведенные модели можно описать одним дифференциальным уравнением:

$$(1+\delta)\cdot\sigma(t)+\frac{\eta}{E}\cdot\dot{\sigma}(t)=E\cdot\varepsilon(t)+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\dot{\varepsilon}(t), \qquad (1)$$

где $\delta=0$ – для стандартного вязкоупругого тела с одинаковыми модулями упругости обоих элементов (Рис. 1, а) и $\delta=1$ – для обобщенной с помощью дополнительного упругого элемента модели Кельвина-Фойгта (Рис. 1, б).

Пространственное обобщение вязкоупругих моделей с двумя упругими и одним вязким элементом

Рассматривается трехмерное пространство с Декартовой системой координат $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Пусть $D_\sigma(\mathbf{x},t)$ - девиатор напряжений, $D_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ - девиатор деформаций [5], ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга материала. По аналогии с одномерным случаем (1), трехмерное обобщение линейной модели (1) в терминах девиаторов приобретает вид:

$$(1+\delta)\cdot D_{\sigma}+\frac{\eta}{E}\cdot\dot{D}_{\sigma}=\frac{1}{1+\nu}\left(E\cdot D_{\varepsilon}+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\dot{D}_{\varepsilon}\right), \qquad (2)$$

где $\dot{D}_{\sigma}=\frac{d}{dt}D_{\sigma}$, $\dot{D}_{\varepsilon}=\frac{d}{dt}D_{\varepsilon}$ – девиаторы скоростей напряжений и деформаций. Уравнение (2) должно быть дополнено уравнением, связывающим нормальные напряжения и их скорости с объемными деформациями и их скоростями:

$$(1+\delta)\cdot\sum_{i}\sigma_{ii}+\frac{\eta}{E}\cdot\sum_{i}\dot{\sigma}_{ii}=\frac{1}{1-2\cdot\nu}\left(E\cdot\sum_{i}\varepsilon_{ii}+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\sum_{i}\dot{\varepsilon}_{ii}\right), \qquad (3)$$

где $\sigma_{ii}(\mathbf{x},t)$, $\varepsilon_{ii}(\mathbf{x},t)$, $\dot{\sigma}_{ii}(\mathbf{x},t)$, $\dot{\varepsilon}_{ii}(\mathbf{x},t)$ – нормальные компоненты напряжений, деформаций, а также скоростей напряжений и деформаций.

Разделение переменных в девиаторах в случае невесомого тела

Будем предполагать, что в (2) и (3) выполняются равенства:

$$D_{\sigma}(\mathbf{x},t)=D_{\sigma}^{0}(\mathbf{x})\cdot\psi_{\sigma}(t),\ D_{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=D_{\varepsilon}^{0}(\mathbf{x})\cdot\varphi_{\varepsilon}(t), \qquad (4)$$

где $D_{\sigma}^{0}(\mathbf{x})$, $D_{\varepsilon}^{0}(\mathbf{x})$ – девиаторы напряжений и деформаций, зависящие только от координат и связанные между собой уравнением:

$$D_{\sigma}^{0}(\mathbf{x})=\frac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)}D_{\varepsilon}^{0}(\mathbf{x}),$$

$\psi_{\sigma}(t)$ - функция релаксации, $\varphi_{\varepsilon}(t)$ - функции ползучести в предположении, что задача для твердого тела является квазистатической.

Уравнение, связывающее между собой «статические» девиаторы напряжений и деформаций $D_{\sigma}^{0}(\mathbf{x})$, $D_{\varepsilon}^{0}(\mathbf{x})$, указывает, что случай, когда $\delta=1$ является физически не возможным, т.к. приводит к решению вспомогательной статической задачи с уменьшенным в два раза мгновенным модулем Юнга, определяемым по результатам одноосного растяжения образцов исследуемого материала.

Из (4) следует, что покомпонентно выполняются равенства:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\sigma_{ij}^{0}(\mathbf{x})\cdot\psi_{\sigma}(t),\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)=\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{x})\cdot\varphi_{\varepsilon}(t). \quad (5)$$

Уравнения (2) и (3) должны быть переписаны с учетом (4), (5):

$$D_{\sigma}^{0}(\mathbf{x})\cdot\left((1+\delta)\cdot\psi_{\sigma}(t)+\frac{\eta}{E}\dot{\psi}_{\sigma}(t)\right)=$$
$$=\frac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)}D_{\varepsilon}^{0}(\mathbf{x})\cdot\left(\varphi_{\varepsilon}(t)+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\dot{\varphi}_{\varepsilon}(t)\right),$$

$$\sum_{i}\sigma_{ii}^{0}\cdot\left((1+\delta)\cdot\psi_{\sigma}(t)+\frac{\eta}{E}\dot{\psi}_{\sigma}(t)\right)=$$
$$=\frac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)}\sum_{i}\varepsilon_{ii}^{0}\cdot\left(\varphi_{\varepsilon}(t)+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\dot{\varphi}_{\varepsilon}(t)\right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что функции $\psi_{\sigma}(t)$, $\varphi_{\varepsilon}(t)$ должны удовлетворять уравнению:

$$(1+\delta)\cdot\psi_{\sigma}(t)+\frac{\eta}{E}\dot{\psi}_{\sigma}(t)=\varphi_{\varepsilon}(t)+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\dot{\varphi}_{\varepsilon}(t). \quad (7)$$

Определение вида функций релаксации и ползучести в случае невесомого стандартного вязкоупругого тела

Одна из функций предопределена (является управляющей). Если предопределенной (управляющей) функцией является функция ползучести $\varphi_{\varepsilon}(t)$, то вычисляемой в соответствии с (7) является $\psi_{\sigma}(t)$. Например, при постоянной деформации из (5) следует, что $\varphi_{\varepsilon}(t)=1$, тогда из (7) можно получить для стандартного вязкоупругого тела, что:

$$\psi_{\sigma}(t)+\frac{\eta}{(1+\delta)\cdot E}\dot{\psi}_{\sigma}(t)=\frac{1}{1+\delta}. \quad (8)$$

Для определения точного поведения $\psi_{\sigma}(t)$, в случае постоянной деформации необходимо задаться начальными условиями. Очевидно, что начальное условие $\psi_\sigma(0)=0$ соответствует начальной стадии релаксации, а начальное условие $\psi_\sigma(0)=\dfrac{\xi_\sigma}{1+\delta}$ – это условие установившейся релаксации от уровня напряжений $\xi_\sigma\cdot\dfrac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)}D_\varepsilon^0(\mathbf{x})$ к уровню $\dfrac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)}D_\varepsilon^0(\mathbf{x})$.

Таким образом, в качестве решений (8) для неустановившейся релаксации ($\psi_{\sigma,U}(t)$) и установившейся релаксации ($\psi_{\sigma,S}(t)$) можно получить функции в виде [6]:

$$\psi_{\sigma,U}(t)=\frac{1}{1+\delta}\left(1-e^{-(1+\delta)\cdot\frac{E}{\eta}t}\right),$$

$$\psi_{\sigma,S}(t)=\frac{1}{1+\delta}\left(1-(1-\xi_\sigma)\cdot e^{-(1+\delta)\cdot\frac{E}{\eta}t}\right). \qquad (9)$$

Решения (9) являются физически адекватными, только если выполнены дополнительные условия:

$$\lim_{t\to\infty}\psi_{\sigma,U}(t)=1,\ \psi_{\sigma,S}(0)=1 \text{ и } \lim_{t\to\infty}\psi_{\sigma,S}(t)<1. \qquad (10)$$

Тогда из (9) и (10) следует, что неустановившаяся релаксация возможна только для стандартного вязкоупругого тела (т.е. при $\delta=0$), в то время как для второй модели ($\delta=1$, Рис. 2, б) является физически неоправданным явлением, т.к. условие $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_{\sigma,U}(t)=1$ не выполняется (конечные напряжения меньше рассчитанных по вспомогательной задаче в два раза). Для установившейся релаксации ($\psi_{\sigma,S}(t)$) невесомого тела при квазистатической нагрузке должно быть выполнено равенство $\xi_\sigma=1+\delta$.

Тогда очевидно, что для стандартного вязкоупругого тела ($\delta = 0$) установившееся релаксация невозможна, т.к. $\psi_{\sigma,S}(t) = 1$. Отметим, что для второй модели ($\delta = 1$, Рис. 2, б) при установившейся релаксации происходит падение напряжений в 2 раза.

В обратном случае, когда предопределенной (управляющей) функцией является функция релаксации $\psi_{\sigma}(t)$, а вычисляемой с помощью уравнения (7) функция ползучести $\varphi_{\varepsilon}(t)$ рассмотрим случай постоянного напряженного состояния ($\psi_{\sigma}(t) = 1$). Тогда из (7) можно получить для стандартного вязкоупругого тела, что:

$$\varphi_{\varepsilon}(t) + (2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\dot{\varphi}_{\varepsilon}(t) = 1+\delta .$$

Совершенно аналогично, рассматривая неустановившуюся и установившуюся стадию ползучести в соответствии с разными начальными условиями, можно получить в качестве решений последнего дифференциального уравнения для неустановившейся ползучести ($\varphi_{\varepsilon,U}(t)$) и установившейся ползучести ($\varphi_{\varepsilon,S}(t)$) с вещественной константой $(1+\delta)\cdot\xi_{\varepsilon}$) функции в виде [6]:

$$\varphi_{\varepsilon,U}(t) = (1+\delta)\cdot\left(1 - e^{-\frac{E}{(2-\delta)\cdot\eta}t}\right),$$

$$\varphi_{\varepsilon,S}(t) = (1+\delta)\cdot\left(1 - (1-\xi_{\varepsilon})\cdot e^{-\frac{E}{(2-\delta)\cdot\eta}t}\right). \qquad (11)$$

Решения (11) являются физически адекватными, только если выполнены дополнительные условия:

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_{\varepsilon,U}(t) = 1,\ \varphi_{\varepsilon,S}(0) = 1 \text{ и } \lim_{t\to\infty}\varphi_{\varepsilon,S}(t) > 1. \qquad (12)$$

Исходя из (12), неустановившаяся ползучесть может быть описана с помощью (11) только с помощью стандартного вязкоупругого тела (т.е. при $\delta = 0$), а установившаяся ползучесть с помощью второй модели ($\delta = 1$, Рис. 1, б) при чем в этом случае $\xi_\varepsilon = \dfrac{1}{1+\delta} = \dfrac{1}{2}$.

Ни одна из функций не предопределена (естественная реология). Из (7) и приведенных выше построений следует, что существует особый случай, когда ни ψ_σ, ни φ_ε не являются предопределенными, т.е. управляющими функциями, но для которых выполняется пара уравнений:

$$(1+\delta)\cdot\psi_\sigma(t) + \frac{\eta}{E}\dot{\psi}_\sigma(t) = C,\quad \varphi_\varepsilon(t) + (2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\dot{\varphi}_\varepsilon(t) = C, \qquad (13)$$

где C – некоторая вещественная константа.

Используя уже известные начальные условия $\psi_\sigma(0) = \varphi_\varepsilon(0) = 0$ для неустановившейся ползучести в качестве решений (13), получаем пару функций $\psi_{\sigma,U}$ и $\varphi_{\varepsilon,U}$ в виде:

$$\psi_{\sigma,U}(t) = \frac{C}{1+\delta}\left(1 - e^{-\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}\cdot t}\right), \qquad (14)$$

$$\varphi_{\varepsilon,U}(t) = C\left(1 - e^{\frac{E}{(2-\delta)\cdot\eta}\cdot t}\right). \qquad (15)$$

Принимая во внимание условие $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_{\sigma,U}(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\varphi_{\varepsilon,U}(t) = 1$, из (14) и (15) получаем, что состояние естественной неустановившейся реологии, при которой одновременно присутствует и ползучесть, и релаксация, возможно только для стандартного вязкоупругого тела (т.е. при $\delta = 0$) и $C = 1$.

Для начальных условий установившейся ползучести $\psi_\sigma(0) = \varphi_\varepsilon(0) = 1$ из (13) получаем:

$$\psi_{\sigma,S}(t)=\frac{C}{1+\delta}\left(1+\left(\frac{1+\delta}{C}-1\right)e^{-\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}\cdot t}\right), \tag{16}$$

$$\varphi_{\varepsilon,U}(t)=C\cdot\left(1+\left(\frac{1}{C}-1\right)\cdot e^{-\frac{E}{(2-\delta)\cdot\eta}\cdot t}\right). \tag{17}$$

Принимая во внимание разнонаправленное поведение релаксации и ползучести, и с учетом монотонности $\psi_{\sigma,U}(t)$, $\varphi_{\varepsilon,U}(t)$ в (16) и (17), достаточно проверить условия $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_{\sigma,U}(t)<1$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_{\varepsilon,U}(t)>1$. Тогда из (16) и (17) следует, что должны выполняться два неравенства $1<C<1+\delta$. Из этого следует, что установившаяся реология с одновременным присутствием ползучести и релаксации может быть описана только с помощью второй модели ($\delta=1$, Рис. 1, б), при этом константа C должна определиться из натурных экспериментов.

Пример решения задачи естественного реологического поведения деформируемого по модели стандартного вязкоупругого тела невесомого полупространства при неустановившейся ползучести от действия абсолютно жесткого круглого в плане штампа границу полупространства

В случае решения задачи естественной (неуправляемой) неустановившейся реологии вначале рассмотрим решение базовой статической упругой краевой задачи.

Будем считать, что вертикальная сила P действует вдоль оси $0x_3$ на осесимметричный штамп с плоским круглым в плане основанием на изотропное упругое полупространство. В этом случае напряжения в области контакта определяются выражением [7]:

$$\sigma_z(r,0) = -\frac{P}{2\cdot\pi}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}, \qquad (18)$$

где a – радиус плоского основания штампа.

С другой стороны, вертикальные перемещения в области контакта, соответствующие напряжениям (18) в упругой постановке, определяются выражением [7]:

$$u_z(r,0) = -\frac{1-\nu^2}{E}\frac{P}{2\cdot\pi}. \qquad (19)$$

Тогда, в случае естественной неустановившейся ползучести штампа на границе вязкоупругого полупространства (модель стандартного вязкоупругого тела, т.е. при $\delta = 0$) из (14), (15), (18) и (19) для контактных напряжений $\sigma_{z,U}(r,0,t)$ и перемещений $u_{z,U}(r,0,t)$ можно получить:

$$\sigma_{z,U}(r,0,t) = -\frac{P}{2\cdot\pi}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\left(1-e^{-\frac{E}{\eta}\cdot t}\right),$$

$$u_{z,U}(r,0,t) = -\frac{1-\nu^2}{E}\frac{P}{2\cdot\pi}\left(1-e^{\frac{E}{2\cdot\eta}\cdot t}\right).$$

Компоненты деформаций по Коши

Будем использовать следующие дифференциальные соотношения для записи выражений деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i}\left(i=\overline{1,3}\right), \quad \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}\left(i \neq j, i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}\right). \qquad (20)$$

Решение задачи для весомого тела

Уравнения равновесия для весомого тела. Учитывая, что напряжения в статической задаче от собственного веса постоянны, перепишем общеизвестные уравнения равновесия несколько в иной форме, упрощающей дальнейшие преобразования.

Будем считать, что ускорение свободного падения g действует вдоль оси $0x_3$. Тогда для среды с постоянной плотностью ρ можно записать следующую систему уравнений:

$$(1+\delta)\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}=0\left(i=\overline{1,2}\right),\quad \sum_{j=1}^{3}(1+\delta)\cdot\sigma_{3j,j}-(1+\delta)\cdot\rho\cdot g=0. \qquad (21)$$

Явное выражение связи компонент напряжений, деформаций и скоростей деформаций. Из (21) следует, что компоненты напряжений не зависят от времени, тогда $\dot{D}_\sigma=0$, и из (2) можно получить:

$$(1+\delta)\cdot D_\sigma=\frac{1}{1+\nu}\left(E\cdot D_\varepsilon+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\dot{D}_\varepsilon\right),$$

$$(22)$$

$$(1+\delta)\cdot\sum_i\sigma_{ii}=\frac{1}{1-2\cdot\nu}\left(E\cdot\sum_i\varepsilon_{ii}+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\sum_i\dot{\varepsilon}_{ii}\right).$$

Из (22), следующее уравнение для нормальных компонент может быть получено для $i=\overline{1,3}$:

$$(1+\delta)\cdot\sum_i\sigma_{ii}=2G\left(\varepsilon_{ii}-\frac{\Theta}{3}\right)+K\cdot\Theta+$$
$$+(2-\delta)\frac{\eta}{1+\nu}\left(\dot{\varepsilon}_{ii}-\frac{\dot{\Theta}}{3}\right)+(2-\delta)\frac{\eta}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}\dot{\Theta}, \qquad (23)$$

$$\Theta=\sum_i\varepsilon_{ii}, \qquad (24)$$

$$(1+\delta)\cdot\sigma_{ij}=G\cdot\varepsilon_{ij}+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{2\cdot(1+\nu)}\dot{\varepsilon}_{ij}\quad\left(i\neq j, i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}\right), \qquad (25)$$

где $G=\dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}$ – модуль сдвига, $K=\dfrac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}$ – объемный модуль упругости [5].

Вывод уравнений Ляме для весомого вязкоупругого тела. Подставляя (23) - (25) в (21), можно получить [8]:

$$\Lambda_i + (2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\frac{d}{dt}\Lambda_i = 0\left(i=\overline{1,2}\right),$$

$$\Lambda_3 + (2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\frac{d}{dt}\Lambda_3 = (1+\delta)\cdot\rho\cdot g\,, \tag{26}$$

где

$$\Lambda_i = E\frac{\nu}{(1-2\cdot\nu)(1+\nu)}\Theta_{,i} + G\cdot\left(\Delta u_i + \Theta_{,i}\right)\left(i=\overline{1,3}\right),\ \ \Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2}. \tag{27}$$

Разделение переменных для весомого тела. Будем представлять деформации и перемещения в виде:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})\cdot\varphi_D(t),\ \ u_i(\mathbf{x},t) = u_i^0(\mathbf{x})\cdot\varphi_D(t), \tag{28}$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)$, $u_i^0(\mathbf{x})$ – деформации и перемещения, соответствующие решению упругой статической задачи для весомого тела, т.е. тождественно удовлетворяющих уравнениям:

$$\Lambda_i^0 = 0\left(i=\overline{1,2}\right),\ \ \Lambda_3^0 = (1+\delta)\cdot\rho\cdot g\,, \tag{29}$$

$$\Lambda_i^0 = E\frac{\nu}{(1-2\cdot\nu)(1+\nu)}\Theta_{,i}^0 + G\cdot\left(\Delta u_i^0 + \Theta_{,i}^0\right)\left(i=\overline{1,3}\right),\ \ \Theta^0 = \sum_i \varepsilon_{ii}^0\,. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что для описания механики весомого тела может использоваться только одна модель стандартного вязкоупругого тела (т.е. когда $\delta = 0$), иначе будет необходимо решить вначале упругую задачу для удвоенного веса, что физически не оправдано.

Подставляя (28) в (26), с учетом (29) и (30), можно получить при $\delta = 0$, что физически обоснованным при исследовании весомого тела является применение только модели неустановившейся ползучести. Соответственно, при начальном условии $\varphi_{D,U}(0)=0$ можно получить:

$$\varphi_{D,U}(t)=1-e^{\frac{E}{2\cdot\eta}\cdot t}. \tag{31}$$

Пример решения задачи для весомого слоя, моделируемого с помощью стандартной вязкоупругой модели. Для весомого слоя (решение вспомогательной статической упругой задачи) с использованием краевого условия на нижней грани $u_3^0\Big|_{x_3=-h}=0$ можно получить:

$$u_3^0=-\frac{\rho\cdot g}{E}\frac{1-\nu-\nu^2}{1-\nu}h^2\left(1-\frac{x_3{}^2}{h^2}\right). \tag{32}$$

Принимая во внимание результаты исследований для весомого тела, изложенные в предыдущих пунктах, можно утверждать, что для стандартного вязкоупругого тела в случае неустановившейся ползучести можно получить уравнение вертикальных перемещений в слое:

$$u_3(\mathbf{x},t)=u_3^0\cdot\varphi_{D,U}(t)=-\frac{\rho\cdot g}{E}\frac{1-\nu-\nu^2}{1-\nu}h^2\left(1-\frac{x_3{}^2}{h^2}\right)\cdot\left(1-e^{\frac{E}{2\cdot\eta}\cdot t}\right).$$

Оценка скорости распространения волны в невесомом вязкоупругом теле

Поскольку рассматриваемые уравнения являются линейными, то при решении динамических задач, в силу суперпозиции, можно решать отдельно статическую задачу для весомого тела и динамическую задачу для невесомого тела. Поэтому в этом разделе будут рассматриваться только динамические уравнения для невесомого тела.

Запишем решение (2) с использованием вещественной константы C_1 в виде:

$$D_\sigma = C_1 \cdot e^{-\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t} + \\ + \frac{E}{\eta} e^{-\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t} \cdot \mathbf{L}\left[\frac{1}{(1+\nu)}\left(E \cdot D_\varepsilon + (2-\delta)\cdot \eta \cdot \dot{D}_\varepsilon\right)\right], \tag{33}$$

где

$$\mathbf{L}\left[\frac{1}{(1+\nu)}\left(E \cdot D_\varepsilon + (2-\delta)\cdot \eta \cdot \dot{D}_\varepsilon\right)\right] = \\ = \frac{E}{(1+\nu)} \int_0^t \left(D_\varepsilon + (2-\delta)\cdot \frac{\eta}{E} \cdot \dot{D}_\varepsilon\right) e^{\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t} dt.$$

В (33) константа C_1 определяет некоторое начальное однородное (не зависящее от координат x_i) напряженное состояние. Из физических соображений очевидно, что $C_1 = 0$.

Уравнения динамики невесомого тела. Уравнения динамики элементарного объема твердого деформируемого тела с постоянной плотностью ρ могут быть записаны в виде:

$$\sum_{j=1}^{3} s_{ij,j} - \rho \cdot \ddot{u}_i = 0 \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{34}$$

где s_{ij} - компоненты девиатора напряжений D_σ, $\ddot{u}_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$.

Уравнения динамики в компонентах перемещений. Не повторяя вывод уравнений Ляме, известный в теории упругости [8], используя формулы (33) и (34), получаем:

$$\frac{E}{\eta} e^{-\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t} \cdot \mathbf{L}\left[\frac{1}{(1+\nu)}\left(E \cdot D_\varepsilon + (2-\delta)\cdot \eta \cdot \dot{D}_\varepsilon\right)\right] - \rho \cdot \ddot{u}_i = 0\left(i = \overline{1,3}\right). \tag{35}$$

Систему уравнений (35) можно переписать в виде:

$$\mathbf{L}\left[\frac{1}{(1+\nu)}\left(E\cdot D_{\varepsilon}+(2-\delta)\cdot\eta\cdot\dot{D}_{\varepsilon}\right)\right]-\frac{\eta}{E}\cdot e^{\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t}\cdot\rho\cdot\ddot{u}_{i}=0\left(i=\overline{1,3}\right).\quad(36)$$

Дифференцируя (36) и сокращая на $e^{\frac{(1+\delta)\cdot E}{\eta}t}$, можно получить, что:

$$\left(\Lambda_{i}+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\frac{d}{dt}\Lambda_{i}\right)-(1+\delta)\cdot\rho\cdot\ddot{u}_{i}-\frac{\eta}{E}\cdot\rho\cdot\dddot{u}_{i}=0\left(i=\overline{1,3}\right).\quad(37)$$

Предполагая, что $\frac{\eta}{E}\cdot\rho\cdot\dddot{u}$ мало по величине по сравнению с $(1+\delta)\cdot\rho\cdot\ddot{u}_{i}$, можно окончательно получить уравнения Ляме для трехмерного обобщения вязкоупругого тела с двумя упругими и одним вязким элементом:

$$\left(\Lambda_{i}+(2-\delta)\cdot\frac{\eta}{E}\frac{d}{dt}\Lambda_{i}\right)-(1+\delta)\cdot\rho\cdot\ddot{u}_{i}\approx 0\left(i=\overline{1,3}\right).\quad(38)$$

Необходимо отметить, что исходя из (38), как и в случае с весомым телом, решение динамической задачи физически обосновано только для $\delta=0$, т.е. для стандартного вязкоупругого тела (Рис 1, а), т.к. в другом случае ($\delta=1$) на элементарный объем будет действовать удвоенное ускорение.

Уравнение распространения объемной волны в стандартном вязкоупругом теле. Опуская известные преобразования [8], волновое уравнение для объемных деформаций Θ, исходя из уравнений (38), приобретает вид:

$$\ddot{\Theta}=a^{2}\cdot\left(2\frac{\eta}{E}\cdot\Delta\dot{\Theta}+\Delta\Theta\right),\quad a^{2}=\frac{E}{\rho}\frac{1-\nu}{(1-2\nu)\cdot(1+\nu)},\quad(39)$$

где радиальная скорость распространения объемной волны V совпадает со значением коэффициента a.

Применение метода разделения переменных для изучения волнового уравнения. Пусть Θ можно представить в виде:

$$\Theta(\mathbf{x},t)=\Theta^{0}(\mathbf{x})\cdot\varphi_{\Theta}(t),\quad(40)$$

где

$$\Theta^0(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \Delta\Theta^0(\mathbf{x}),$$

$\varphi_\Theta(t)$ – безразмерная функция времени при объемной деформации с учетом ползучести, λ – максимальная длина объемной волны.

Подставляя (40) в (39), получаем дифференциальное уравнение для $\varphi_\Theta(t)$ в виде:

$$\ddot{\varphi}_\Theta(t) + 2 \cdot A \cdot \dot{\varphi}_\Theta(t) + B^2 \cdot \varphi_\Theta(t) = 0, \qquad (41)$$

где $A = B^2 \cdot \dfrac{\eta}{E}$, коэффициент затухания, $B^2 = a^2 \cdot \left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2$.

Пусть $B^2 >> A^2$, тогда должно быть выполнено неравенство:

$$\lambda >> 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)\cdot(1+\nu)}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\rho \cdot E}}. \qquad (42)$$

В случае выполнения (42) решение (41) со свободной константой C может быть записано в виде:

$$\varphi_\Theta(t) = C \cdot e^{-A\cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{B^2 - A^2} \cdot t\right).$$

В этом случае циклическая частота затухающих колебаний будет определяться уравнением:

$$\sqrt{B^2 - A^2} = a \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(2 \cdot a \cdot \frac{\pi}{\lambda} \frac{\eta}{E}\right)^2}.$$

Логарифмический декремент d затухающих колебаний может быть записан в терминах коэффициента A и периода затухающих колебаний T:

$$d = A \cdot T = 4 \cdot \pi^2 \frac{\eta}{E \cdot T}.$$

Отметим, что определение скорости распространения затухающих крутильных колебаний и их логарифмического декремента можно выполнить совершенно аналогично рассмотренному случаю.

Уравнения для композиционного вязкоупругого тела, моделируемого в одномерном случае двумя упругими и одним вязким элементом

Особенности и основные понятия, используемые при обобщении уравнений однородного тела на композиционный в среднем изотропный материал. Отметим, что при выводе уравнений механики однородного тела обычно используется элементарный объем $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, описанный вокруг произвольной точки $\mathbf{x} \in V$ (где V – объем всего тела). Будет называть представительным объемом композиционного тела наименьший объем, в котором физические характеристики равны усредненным характеристикам всего объема.

Предположим, что модуль Юнга E_k, коэффициент Пуассона ν_k и вязкость η_k заданы для каждой компоненты k композиционного материала (где $k = \overline{1,n}$ – номер компоненты, n – количество компонент в материале). Кроме того, будем предполагать, что представительный объем и элементарный объем совпадают, и концентрации (объемные доли) компонент композиционного материала равны γ_k как для всего материала, так и элементарного объема. Причем для концентраций выполняется уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$.

В этом случае объемные доли компонент γ_k следует рассматривать также как дискретную случайную величину присутствия k-ой компоненты материала в точке $\mathbf{x} \in V$.

Пусть σ_{ij}^{k} и ε_{ij}^{k} ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,3}$) являются дискретными значениями напряжений и деформаций k-ой компоненты материала в представительном объеме. Умножая их и их частные производные по времени t на γ_k и суммируя по $k=\overline{1,n}$, можно получить среднее значение напряжений, деформаций, а также скоростей напряжений и деформаций (матожидания дискретных случайных величин) в представительном объеме композиционного тела [9]:

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \sigma_{ij}^{k}, \quad \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{ij}^{k},$$

$$\left\langle \dot{\sigma}_{ij} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \dot{\sigma}_{ij}^{k}, \quad \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{k}. \tag{43}$$

Усреднение механических характеристик по Фойгту. Для проведения усреднения перепишем уравнения (2) и (3) с использованием формальной суперпозиции:

$$D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon,\sigma} + D_{\varepsilon,\dot{\sigma}}, \quad \dot{D}_{\varepsilon} = \dot{D}_{\varepsilon,\sigma} + \dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}},$$

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii,\sigma} + \varepsilon_{ii,\dot{\sigma}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{ii,\sigma} + \dot{\varepsilon}_{ii,\dot{\sigma}}.$$

Пусть для указанных функций выполнены равенства:

$$D_{\sigma} = \frac{E}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)} \cdot D_{\varepsilon,\sigma} + (2-\delta) \cdot \frac{\eta}{(1+\delta)\cdot(1+\nu)} \cdot \dot{D}_{\varepsilon,\sigma},$$

$$\dot{D}_{\sigma} = \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \cdot D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} + (2-\delta) \cdot \frac{E}{1+\nu} \cdot \dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}}, \tag{44}$$

$$\sum_i \sigma_{ii} = \frac{E}{(1+\delta)\cdot(1-2\nu)} \cdot \sum_i \varepsilon_{ii,\sigma} + (2-\delta) \cdot \frac{\eta}{(1+\delta)\cdot(1-2\nu)} \cdot \sum_i \dot{\varepsilon}_{ii,\sigma}, \tag{45}$$

$$\sum_i \dot{\sigma}_{ii} = \frac{E^2}{(1-2\nu)\cdot\eta}\cdot\sum_i \varepsilon_{ii,\dot{\sigma}} + (2-\delta)\cdot\frac{E}{(1-2\nu)}\cdot\sum_i \dot{\varepsilon}_{ii,\dot{\sigma}}\ .$$

В соответствии с гипотезой Фойгта будем предполагать, что деформации однородны в представительном объеме при простейших нагружениях. Очевидно, что в этих условиях необходимо предположить, что и скорости деформаций в представительном объеме композиционного вязкоупругого материала также однородны.

Далее для k-ой компоненты представительного материала из (44) и (45) можно получить уравнения [9]:

$$D_\sigma^k = \frac{E_k}{(1+\delta)\cdot(1+\nu_k)}\cdot D_{\varepsilon,\sigma} + (2-\delta)\cdot\frac{\eta_k}{(1+\delta)\cdot(1+\nu_k)}\cdot\dot{D}_{\varepsilon,\sigma}\,,$$

(46)

$$\dot{D}_\sigma^k = \frac{{E_k}^2}{(1+\nu_k)\cdot\eta_k}\cdot D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} + (2-\delta)\cdot\frac{E_k}{1+\nu_k}\cdot\dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}}\,,$$

$$\sum_i \sigma_{ii}^k = \frac{E_k}{(1+\delta)\cdot(1-2\cdot\nu_k)}\cdot\sum_i \varepsilon_{ii,\sigma} +$$

$$+(2-\delta)\cdot\frac{\eta_k}{(1+\delta)\cdot(1-2\cdot\nu_k)}\cdot\sum_i \dot{\varepsilon}_{ii,\sigma}\,,$$

(47)

$$\sum_i \dot{\sigma}_{ii}^k = \frac{{E_k}^2}{(1-2\cdot\nu_k)\cdot\eta_k}\cdot\sum_i \varepsilon_{ii,\dot{\sigma}} + (2-\delta)\cdot\frac{E_k}{(1-2\cdot\nu_k)}\cdot\sum_i \dot{\varepsilon}_{ii,\dot{\sigma}}\ .$$

Умножая уравнения (46) и (48) на γ_k и суммируя по $k=\overline{1,n}$, принимая во внимание, что в соответствии с гипотезой Фойгта $D_{\varepsilon,\sigma} = \left\langle D_{\varepsilon,\sigma}\right\rangle^V$, $\dot{D}_{\varepsilon,\sigma} = \left\langle \dot{D}_{\varepsilon,\sigma}\right\rangle^V$, $D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} = \left\langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}}\right\rangle^V$, $\dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}} = \left\langle \dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}}\right\rangle^V$, можно получить:

$$\left\langle D_\sigma\right\rangle^V = \frac{1}{(1+\delta)}\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^V\cdot\left\langle D_{\varepsilon,\sigma}\right\rangle^V + \frac{(2-\delta)}{(1+\delta)}\cdot\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^V\cdot\left\langle \dot{D}_{\varepsilon,\sigma}\right\rangle^V,$$

(48)

$$\left\langle \dot{D}_{\sigma} \right\rangle^{V} = \left\langle \frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^{V} \cdot \left\langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} \right\rangle^{V} + (2-\delta)\cdot\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^{V} \cdot \left\langle \dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}} \right\rangle^{V},$$

$$\sum_{i} \left\langle \sigma_{ii} \right\rangle^{V} = \frac{1}{(1+\delta)} \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^{V} \cdot \sum_{i} \left\langle \varepsilon_{ii,\sigma} \right\rangle^{V} +$$

$$+ \frac{(2-\delta)}{(1+\delta)} \cdot \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^{V} \cdot \sum_{i} \left\langle \dot{\varepsilon}_{ii,\sigma} \right\rangle^{V},$$

(49)

$$\sum_{i} \left\langle \dot{\sigma}_{ii} \right\rangle^{V} = \left\langle \frac{E^{2}}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^{V} \cdot \sum_{i} \left\langle \varepsilon_{ii,\dot{\sigma}} \right\rangle^{V} +$$

$$+ (2-\delta)\cdot\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^{V} \cdot \sum_{i} \left\langle \dot{\varepsilon}_{ii,\dot{\sigma}} \right\rangle^{V},$$

где

$$\left\langle D_{\sigma} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot D_{\sigma}^{k}, \quad \left\langle \dot{D}_{\sigma} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \dot{D}_{\sigma}^{k},$$

$$\left\langle \sigma_{ii} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \sigma_{ii}^{k}, \quad \left\langle \dot{\sigma}_{ii} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \dot{\sigma}_{ii}^{k},$$

$$\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{E_{k}}{1+\nu_{k}}, \quad \left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{\eta_{k}}{1+\nu_{k}},$$

$$\left\langle \frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{{E_{k}}^{2}}{(1+\nu_{k})\cdot\eta_{k}}, \quad \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{E_{k}}{1-2\cdot\nu_{k}}, \quad (50)$$

$$\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{\eta_{k}}{1-2\cdot\nu_{k}}, \quad \left\langle \frac{E^{2}}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k} \cdot \frac{{E_{k}}^{2}}{(1-2\cdot\nu_{k})\cdot\eta_{k}}.$$

Усреднение механических характеристик по Рейссу. В соответствии с гипотезой Рейсса будем предполагать, что напряжения однородны в представительном объеме при простейших нагружениях. Очевидно, что в этих условиях необходимо предположить, что и скорости напряжений в представительном объеме композиционного вязкоупругого материала также однородны [9].

Далее, для k-ой компоненты представительного материала, исходя из формальной суперпозиции уравнений (2) и (3) (аналогичной (44) и (45) только для других девиаторов), можно получить уравнения:

$$\dot{D}_{\varepsilon}^{k}=\frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\cdot\frac{1+\nu_k}{\eta_k}\cdot D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}+\frac{1}{(2-\delta)}\frac{1+\nu_k}{E_k}\cdot\dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}},$$

$$. \qquad (51)$$

$$\dot{D}_{\varepsilon}^{k}=\frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\cdot\frac{1+\nu_k}{\eta_k}\cdot D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}+\frac{1}{(2-\delta)}\frac{1+\nu_k}{E_k}\cdot\dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}},$$

$$\sum_i\varepsilon_{ii}^{k}=(1+\delta)\cdot\frac{1-2\cdot\nu_k}{E_k}\cdot\sum_i\sigma_{ii}+(1-2\cdot\nu_k)\cdot\frac{\eta_k}{E_k{}^2}\cdot\sum_i\dot{\sigma}_{ii}\ ,$$

$$(52)$$

$$\sum_i\dot{\varepsilon}_{ii}^{k}=\frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\cdot\frac{1-2\cdot\nu_k}{\eta_k}\sum_i\sigma_{ii}+\frac{1}{(2-\delta)}\cdot\frac{1-2\cdot\nu_k}{E_k}\cdot\sum_i\dot{\sigma}_{ii}\ .$$

Умножая уравнения (51) и (52) на γ_k и суммируя по $k=\overline{1,n}$, принимая во внимание, что в соответствии с гипотезой Рейсса $D_{\sigma,\varepsilon}=\left\langle D_{\sigma,\varepsilon}\right\rangle^R$, $\dot{D}_{\sigma,\varepsilon}=\left\langle\dot{D}_{\sigma,\varepsilon}\right\rangle^R$, $D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}=\left\langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^R$, $\dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}}=\left\langle\dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^R$, можно получить:

$$\left\langle D_{\varepsilon}\right\rangle^{R}=(1+\delta)\cdot\left(\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\cdot\left\langle D_{\sigma,\varepsilon}\right\rangle^{R}+ \\ +\left(\left\langle\frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\cdot\left\langle\dot{D}_{\sigma,\varepsilon}\right\rangle^{R}, \tag{53}$$

$$\left\langle\dot{D}_{\varepsilon}\right\rangle^{R}=\frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\cdot\left(\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\cdot\left\langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^{R}+ \\ +\frac{1}{(2-\delta)}\left(\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\cdot\left\langle\dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^{R},$$

$$\sum_{i}\left\langle\varepsilon_{ii}\right\rangle^{R}=(1+\delta)\cdot\left(\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\sum_{i}\left\langle\sigma_{ii,\varepsilon}\right\rangle^{R}+ \\ +\left(\left\langle\frac{E^{2}}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\cdot\sum_{i}\left\langle\dot{\sigma}_{ii,\varepsilon}\right\rangle^{R}, \tag{54}$$

$$\sum_{i}\left\langle\dot{\varepsilon}_{ii}\right\rangle^{R}=\frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\left(\left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\sum_{i}\left\langle\sigma_{ii,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^{R}+ \\ +\frac{1}{(2-\delta)}\cdot\left(\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)^{-1}\sum_{i}\left\langle\dot{\sigma}_{ii,\dot{\varepsilon}}\right\rangle^{R},$$

где

$$\left\langle D_{\varepsilon}\right\rangle^{R}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{k}\cdot D_{\varepsilon}^{k},\quad \left\langle D_{\varepsilon}\right\rangle^{R}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{k}\cdot\dot{D}_{\varepsilon}^{k},$$

$$\left\langle\varepsilon_{ii}\right\rangle^{R}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{k}\cdot\varepsilon_{ii}^{k},\quad \left\langle\dot{\varepsilon}_{ii}\right\rangle^{R}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{k}\cdot\dot{\varepsilon}_{ii}^{k},$$

$$\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \frac{1+\nu_k}{E_k} \right)^{-1}, \ \left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot (1+\nu_k) \cdot \frac{\eta_k}{E_k{}^2} \right)^{-1},$$

$$\left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \frac{1+\nu_k}{\eta_k} \right)^{-1}, \ \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \frac{1-2\cdot\nu_k}{E_k} \right)^{-1}, \quad (55)$$

$$\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot (1-2\cdot\nu_k) \cdot \frac{\eta_k}{E_k{}^2} \right)^{-1},$$

$$\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \frac{1-2\cdot\nu_k}{\eta_k} \right)^{-1}.$$

Вычисление эффективных коэффициентов в вязкоупругих уравнениях состояния (2) и (3). Будем предполагать, что эффективные девиаторы напряжений и скоростей напряжений можно представить как линейную комбинацию соответствующих девиаторов по Фойгту и Рейссу. Т.е. с использованием некоторого вещественного коэффициента α ($\alpha \in (0,1)$) можно записать [9]:

$$\langle D_\sigma \rangle = \alpha \cdot \langle D_\sigma \rangle^V + (1-\alpha)\cdot \langle D_\sigma \rangle^R, \ \langle \dot{D}_\sigma \rangle = \alpha \cdot \langle \dot{D}_\sigma \rangle^V + (1-\alpha)\cdot \langle \dot{D}_\sigma \rangle^R.$$

На этом шаге будем предполагать, что деформации и их скорости однородны в представительном объеме при простейших нагружениях (т.е. $\langle D_{\varepsilon,\sigma} \rangle = \langle D_{\varepsilon,\sigma} \rangle^V = \langle D_{\varepsilon,\sigma} \rangle^R$ и $\langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} \rangle = \langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} \rangle^V = \langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}} \rangle^R$). Тогда, исходя из (48), (49), (53) и (54) после интегрирования по α на интервале $(0,1)$, можно получить первый вариант эффективных уравнений с эффективными коэффициентами, являющихся линейной комбинацией коэффициентов (50) и (55), называемыми приближением Хилла:

$$\langle D_{\sigma}\rangle = \frac{1}{(1+\delta)}\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)\langle D_{\varepsilon,\sigma}\rangle + \\ + \frac{(2-\delta)}{(1+\delta)}\cdot\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)\langle \dot{D}_{\varepsilon,\sigma}\rangle,$$

(56)

$$\langle \dot{D}_{\sigma}\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R}\right)\langle D_{\varepsilon,\dot{\sigma}}\rangle + \\ + (2-\delta)\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}\right)\langle \dot{D}_{\varepsilon,\dot{\sigma}}\rangle,$$

$$\sum_i \langle\sigma_{ii}\rangle^{V} = \frac{1}{(1+\delta)}\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)\cdot\sum_i \langle\varepsilon_{ii,\sigma}\rangle^{V} + \\ + \frac{(2-\delta)}{(1+\delta)}\cdot\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)\cdot\sum_i \langle\dot{\varepsilon}_{ii,\sigma}\rangle^{V},$$

(57)

$$\sum_i \langle\dot{\sigma}_{ii}\rangle^{V} = \frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R}\right)\cdot\sum_i \langle\varepsilon_{ii,\dot{\sigma}}\rangle^{V} + \\ + (2-\delta)\cdot\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle^{R}\right)\cdot\sum_i \langle\dot{\varepsilon}_{ii,\dot{\sigma}}\rangle^{V}.$$

Далее будем предполагать, что эффективные девиаторы деформаций и скоростей деформаций можно представить как линейную комбинацию соответствующих девиаторов по Фойгту и Рейссу. Т.е. с использованием некоторого вещественного коэффициента α ($\alpha \in (0,1)$) можно записать:

$$\langle D_{\varepsilon}\rangle = \alpha\cdot\langle D_{\varepsilon}\rangle^{V} + (1-\alpha)\cdot\langle D_{\varepsilon}\rangle^{R},\ \langle \dot{D}_{\varepsilon}\rangle = \alpha\cdot\langle \dot{D}_{\varepsilon}\rangle^{V} + (1-\alpha)\cdot\langle \dot{D}_{\varepsilon}\rangle^{R}.$$

На этом шаге уже будем предполагать, что напряжения и их скорости однородны в представительном объеме при простейших нагружениях (т.е. $\langle D_{\sigma,\varepsilon}\rangle = \langle D_{\sigma,\varepsilon}\rangle^{V} = \langle D_{\sigma,\varepsilon}\rangle^{R}$ и $\langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\rangle = \langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\rangle^{V} = \langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\rangle^{R}$). Тогда, аналогично (53) и (54) после интегрирования по α на интервале $(0,1)$, можно получить второе оценочное эффективное уравнение (уравнение Кравчука-Тарасюка):

$$\langle D_{\varepsilon}\rangle = (1+\delta)\cdot\frac{\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}}{2\cdot\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V}\cdot\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}}\langle D_{\sigma,\varepsilon}\rangle + \frac{\left\langle\frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R} + \left\langle\frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{V}}{2\cdot\left\langle\frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{R}\left\langle\frac{E^{2}}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle^{V}}\langle \dot{D}_{\sigma,\varepsilon}\rangle. \tag{58}$$

$$\langle \dot{D}_{\varepsilon}\rangle = \frac{(1+\delta)}{(2-\delta)}\cdot\frac{\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{R}}{2\cdot\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{V}\cdot\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle^{R}}\cdot\langle D_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\rangle + \frac{1}{(2-\delta)}\frac{\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V} + \left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}}{2\cdot\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{V}\cdot\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle^{R}}\cdot\langle \dot{D}_{\sigma,\dot{\varepsilon}}\rangle,$$

$$\sum_i \left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle = (1+\delta)\cdot \frac{\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R}{2\cdot \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R} \sum_i \left\langle \sigma_{ii,\varepsilon} \right\rangle + $$

$$+ \frac{\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R}{2\cdot \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R} \cdot \sum_i \left\langle \dot{\sigma}_{ii,\varepsilon} \right\rangle, \tag{59}$$

$$\sum_i \left\langle \dot{\varepsilon}_{ii} \right\rangle = \frac{(1+\delta)}{(2-\delta)} \frac{\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R}{2\cdot \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R} \sum_i \left\langle \sigma_{ii,\dot{\varepsilon}} \right\rangle + $$

$$+ \frac{1}{(2-\delta)} \cdot \frac{\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R}{2\cdot \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R} \sum_i \left\langle \dot{\sigma}_{ii,\dot{\varepsilon}} \right\rangle.$$

Определим эффективные значения коэффициентов как средние арифметические соответствующих значений из (56)-(59):

$$\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^R \right) + \frac{\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle^R},$$

$$\left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^R \right) + \frac{\left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{\eta}{1+\nu} \right\rangle^R},$$

$$\left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R \right) + \\ + \frac{\left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R}, \tag{60}$$

$$\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R \right) + \\ + \frac{\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R},$$

$$\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R \right) + \\ + \frac{\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^V + \left\langle \frac{\eta}{1-2\cdot\nu} \right\rangle^R},$$

$$\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R \right) + \\ + \frac{\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V \cdot \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R}{\left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^V + \left\langle \frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta} \right\rangle^R}.$$

Введем очевидные переобозначения для вычисления эффективных механических свойств композиционного в среднем изотропного вязкоупругого материала, соответствующего модели (2), (3):

$$\frac{\langle E\rangle}{1+\langle\nu\rangle}=\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle,\quad \frac{\langle E\rangle}{1-2\cdot\langle\nu\rangle}=\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle,$$

$$\frac{\langle\eta\rangle}{1+\langle\nu\rangle}=\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle,\quad \frac{\langle\eta\rangle}{1-2\cdot\langle\nu\rangle}=\left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle, \tag{61}$$

$$\frac{\langle E\rangle^2}{(1+\langle\nu\rangle)\cdot\langle\eta\rangle}=\left\langle\frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle,\quad \frac{\langle E\rangle^2}{(1-2\cdot\langle\nu\rangle)\cdot\langle\eta\rangle}=\left\langle\frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta}\right\rangle.$$

Система (61) является переопределенной. Причем две лидирующие характеристики следует определить точно, а третью вычислить как среднее арифметическое значение с учетом результатов предыдущих вычислений. В качестве лидирующих параметров выберем эффективный модуль Юнга $\langle E\rangle$ (вычисляемый из первой пары уравнений) и эффективную вязкость $\langle\eta\rangle$ (вычисляемую из второй пары уравнений). Будем считать, что эти два параметра должны точно совпадать как для девиаторной части уравнений состояния (2), так и для объемных деформаций (3):

$$\langle E\rangle=3\frac{\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle\cdot\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle}{2\cdot\left\langle\frac{E}{1-2\cdot\nu}\right\rangle+\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle},\quad \langle\eta\rangle=3\frac{\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle\cdot\left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle}{2\cdot\left\langle\frac{\eta}{1-2\cdot\nu}\right\rangle+\left\langle\frac{\eta}{1+\nu}\right\rangle}.$$

Тогда из оставшихся двух уравнений (третья пара системы (61)) усреднением находим значение коэффициента Пуассона:

$$\langle\nu\rangle=2-\left(\frac{\langle E\rangle^2}{\left\langle\frac{E^2}{(1+\nu)\cdot\eta}\right\rangle\langle\eta\rangle}+\frac{\langle E\rangle^2}{\left\langle\frac{E^2}{(1-2\cdot\nu)\cdot\eta}\right\rangle\langle\eta\rangle}\right).$$

Распространение волны в композиционном стандартном вязкоупругом теле. Не повторяя проведенные выше вычисления, можно записать эффективную скорость распространения волны $\langle V\rangle$ в стандартном вязкоупругом теле:

$$\langle V\rangle=\sqrt{\frac{\langle E\rangle}{\langle\rho\rangle}\frac{1-\langle\nu\rangle}{\left(1-2\cdot\langle\nu\rangle\right)\cdot\left(1+\langle\nu\rangle\right)}},\quad \langle\rho\rangle=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\rho_k\,.$$

Эффективный логарифмический декремент $\langle d\rangle$ затухающих колебаний может быть записан в терминах эффективных механических характеристик и периода затухающих колебаний T:

$$\langle d\rangle=4\cdot\pi^2\,\frac{\langle\eta\rangle}{\langle E\rangle\cdot T}\,.$$

Заключение

Впервые при обобщении одномерной модели вязкоупругости для одного вязкого и двух упругих элементов на пространственный случай использовались девиаторы напряжений, деформаций, а также скоростей напряжений и деформаций.

Установлено, что модель стандартного вязкоупругого тела является более универсальной, т.к. установлено, что вторая модель (рис. 1, б) не может применяться при решении задач для весомого тела, или динамических задач, т.к. приводит к решению промежуточной физически неоправданной краевой или начально-краевой задачи для удвоенных значений ускорений. Таким образом, вторая модель (рис. 1, б) может применяться только к решению квазистатических задач для невесомых тел.

Установлено, что модель стандартного вязкоупругого тела применима только для исследования неустановившейся ползучести, тогда как вторая модель пригодна для исследования установившегося реологического поведения невесомого материала.

Создано обобщение линейной модели вязкоупругости с двумя упругими и одним вязким элементом на случай композиционного в среднем изотропного тела.

Результаты данных исследований позволяют решать динамические задачи для вязко-упругих композиционных тел в том числе моделирования горных пород и грунтов с помощью стандартного конечно-элементного обеспечения, например ANSYS и Лира [10, 11].

Литература

1. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.

2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. - М.: Стройиздат, 1968. - 419 с.

3. Ward I.M., Sweeney J. Mechanical properties of solid polymers – WILEY, 2012. - 474p.

4. Максимов Г.А. Фазовый переход от вязкоупругости к пластичности. Описание на основе обобщенного вариационного принципа для диссипативной механики сплошных сред // Ученые записки физического факультета московского университета (УЗФФ) №5, 1751307 (2017)

5. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 576 с.

6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - Москва: Наука, 1964. - 610 с.

7. Johnson K. Contact mechanics – Cambridge University Press, 1987. - 452 p.

8. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. - Москва-Ленигнрад: ОГИЗ, 1947. – 465 с.

9. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Вычисление эффективных параметров упругости в среднем изотропных композиционных тел в случае записи закона Гука для тензора деформаций по Коши // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 3 URL: apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (дата обращения: 08.05.2018).

10. Васильев, А.С., Суханов, Ю.В. Некоторые тенденции развития систем моделирования эксплуатационных качеств изделий на ЭВМ и рынка этих систем // Инженерный вестник Дона, 2014, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2366.

11. Прокопов, А.Ю., Акопян, В.Ф., Гаптлисламова, К.Н. Изучение напряженно-деформированного состояния грунтового массива и взаимного влияния подземных конструкций существующих и вновь возводимых сооружений в береговой зоне морского порта Тамань. // Инженерный вестник Дона, 2013, № 4. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2104.

References

1. Kravchuk A.S., Chigarev A.V. Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija tel s krugovymi granicami [Mechanics of contact interaction of bodies with circular boundaries]. Minsk: Technoprint, 2000. 196 p.

2. Rzhanicyn A.R. Teorija polzuchesti [Creep Theory]. M.: Strojizdat, 1968. 419 p.

3. Ward I.M., Sweeney J. Mechanical properties of solid polymers. WILEY, 2012. 474p.

4. Maksimov G.A. Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta moskovskogo universiteta (Rus) (UZFF) №5, 1751307 (2017).

5. Gorshkov A.G., Starovojtov Je.I., Jarovaja A.V. Mehanika sloistyh vjazkouprugoplasticheskih jelementov konstrukcij [Mechanics of layer viscoelastoplastic construction elements]. M.: FIZMATLIT, 2005. 576 p.

6. Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov [A handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges]. Moskva: Nauka, 1964. 610 p.

7. Johnson K. Contact mechanics. Cambridge University Press, 1987. 452 p.

8. Lejbenzon L.S. Kurs teorii uprugosti [The theory of elasticity]. Moskva-Lenignrad: OGIZ, 1947. 465 p.

9. Tarasyuk I.A., Kravchuk A.S. APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences (Rus), 2015, N 3 [Electronic resource]. URL: apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Tarasyuk-Kravchuk.pdf Accessed: 05.04.2018

10. Vasil'ev, A.S., Sukhanov, Yu.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2366

11. Prokopov, A.Yu., Akopyan, V.F., Gaptlislamova, K.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2104