**Инженерный вестник Дона**, №4 (2014)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2694

# Соотношения взаимности для нелинейной магнитоактивной плазмоподобной среды

*В.К. Игнатьев, С.В. Перченко*

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация:** В работе рассмотрено решение уравнения Власова для стационарной, однородной, изотропной и слабо нелинейной магнитоактивной плазмоподобной среды методом последовательных приближений. Получено выражение для квазилинейной проводимости, которая при малой индукции магнитного поля перестает зависеть от напряженности электрического поля. Показано что матрица квазилинейной проводимости является симметричной, а ее элементы удовлетворяют классическим соотношениям взаимности. Полученные соотношения могут быть применены при проектировании устройств магнитной микроэлектроники, например, для повышения метрологических характеристик цифрового холловского магнитометра.

**Ключевые слова:** соотношения взаимности, нелинейность, плазмоподобная среда, кинетические коэффициенты, квазилинейная проводимость.

## Введение

Явления, при которых наблюдается взаимодействие между перекрестными процессами переноса, изучаются давно. В 1854 г. Кельвин исследовал термоэлектрический эффект, возникающий при одновременном протекании электрического тока и тепла, и получил первые соотношения взаимности, исходя их термодинамических аргументов. Подобные соотношения в 1876 г. получил Гельмгольц при исследовании процессов переноса в электролитах, а позднее и Истман (1926 г.) для диффузионного и теплового потоков [1]. Общую теорию построил в 1931 г. Ларс Онзагер, за которую в 1968 г. он получил Нобелевскую премию.

Соотношения взаимности Онзагера являются фундаментальными и справедливы не только в термодинамике. Например, в механике они выражены в принципе взаимности перемещений – теореме Максвелла. Принцип взаимности широко используется в акустике [2], а также при расчете и измерении характеристик приемных антенн [3].

Соотношения Онзагера симметрии кинетических коэффициентов [4] получены в линейном приближении, исходя из инвариантности макроскопического движения относительно обращения времени и предположения о том, что средняя релаксация спонтанных флуктуаций в системе происходит в соответствии с макроскопическими законами. В термодинамике неравновесных процессов соотношения взаимности для линейных систем постулируются [5] и иногда рассматриваются как четвертое начало термодинамики. При нелинейной связи между силами и порождаемыми ими потоками общие статистические методы обоснования соотношений взаимности вообще неприменимы [6]. В ряде работ [7] приводятся без вывода соотношения взаимности высшего порядка для частных случаев. Влияние магнитного поля на соотношения взаимности высшего порядка, в отличие от линейной теории Онзагера, вообще не исследовано.

В частном случае плазмоподобных сред, к которым относится и коллектив носителей заряда в полупроводниках [8, 9], в современной нелинейной электродинамике достаточно развито построение теории нелинейной проницаемости на основе решения кинетических уравнений методом разложения по степеням электромагнитного поля [10], однако соотношения взаимности для полученных восприимчивостей при этом не рассматриваются.

**Квазилинейная проводимость плазмоподобных сред**

Рассмотрим физические причины нелинейности в магнитоактивной плазмоподобной среде. Процессы переноса в релаксационном приближении описываются кинетическим уравнением Больцмана, которое для среды, находящейся в электрическом и магнитном полях, принимает вид уравнения Власова [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right) + q\left(\left(\mathbf{E} + \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right) = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (1)$$

Здесь $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – функция распределения носителей заряда (электронов или дырок) по координатам и импульсам, $f_0(W)$ – равновесная функция распределения, $W(\mathbf{p})$ – энергия носителей заряда $q$ – заряд носителя, $\tau$ – среднее по ансамблю время релаксации. Введем неравновесную функцию распределения $f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) - f_0(W)$, интегрируя которую можно найти плотность тока в среде

$$\int \mathbf{v} f_0(t,\mathbf{r},\mathbf{p})d^3p = 0, \quad \mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = q\int \mathbf{v} f_1(t,\mathbf{r},\mathbf{p})d^3p. \tag{2}$$

В стационарном случае функции распределения не зависят от времени, если плазмоподобная среда и распределение температуры в ней однородны, пространственная зависимость функции распределения определяется только неоднородностью внешних полей. Если электрическое и магнитное поля мало меняются на длине свободного пробега, то в уравнении (1) можно пренебречь производной функции распределения по координате. Учитывая что

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df_0}{dW}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}\frac{df_0}{dW},$$

получим:

$$q(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\frac{df_0}{dW} + q\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}}\right) + q\left((\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}}\right) = -\frac{f_1}{\tau}. \tag{3}$$

Будем искать частное решение уравнения дифференциального уравнения первого порядка в частных производных (3), удовлетворяющее условию $f_1(\mathbf{E} = 0) \equiv 0$, в виде функционального ряда

$$f_1 = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots, \tag{4}$$

где $f^{(1)}$ – функция, линейная по электрическому полю $E$, функция $f^{(2)}$ пропорциональна $E^2$, функция $f^{(3)}$ пропорциональна $E^3$. Можно показать [11], что такое решение существует и единственно. Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и собирая слагаемые одного порядка по $E$, получим:

$$\begin{aligned}
&\beta_0\left(\left(\mathbf{p}\times\mathbf{B}\right)\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\mathbf{p}}\right)+f^{(1)}=-\beta_0\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}\right)\frac{df_0}{dW},\\
&\beta_0\left(\left(\mathbf{p}\times\mathbf{B}\right)\cdot\frac{\partial f^{(i)}}{\partial\mathbf{p}}\right)+f^{(i)}=-q\tau\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f^{(i-1)}}{\partial\mathbf{p}}\right), i>1,
\end{aligned}\tag{5}$$

где $\beta_0 = q\tau/m^*$ – подвижность носителей заряда.

Решая первое уравнение системы (5) и интегрируя полученное решение согласно выражению (2) с функцией распределения Больцмана

$$f_0=\frac{N}{\left(2\pi m^* k_\beta T\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{W}{k_\beta T}\right),$$

где $N$ – число носителей заряда, $k_\beta$ – постоянная Больцмана, $T$ – абсолютная температура, получим выражение для плотности тока, создаваемого линейной составляющей функции распределения:

$$\mathbf{j}^{(1)}=qN\beta\left(B^2\right)\left(\mathbf{E}+\beta_0\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)+\beta_0^2\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B}\right).\tag{6}$$

Интегрируя аналогичным образом функции распределения $f^{(2)}$ и $f^{(3)}$, получим:

$$\mathbf{j}^{(2)}=\mathbf{0},\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}^{(3)}(t,\mathbf{r})=&\frac{q\beta_0^3 N m^*}{\lambda_1\lambda_4 k_\beta T}\Big(\Big(3E^2T_1^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\left(2D_1^{(3)}+B^2D_3^{(3)}\right)+\left|\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right|^2 D_5^{(3)}\Big)\mathbf{E}+\\
&+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\Big(E^2D_1^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\left(3B^2T_2^{(3)}+2D_3^{(3)}\right)+\left|\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right|^2 D_6^{(3)}\Big)\mathbf{B}+\\
&+\Big(E^2D_2^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\left(B^2D_4^{(3)}+S_1^{(3)}\right)+3\left|\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right|^2 T_3^{(3)}\Big)\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\Big)-\\
&-\frac{q\beta_0^3 N m^*}{\lambda_1 k_\beta T}\Big(\Big(E^2I_1^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2 I_2^{(3)}\Big)\mathbf{E}+\\
&+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\Big(E^2J_1^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2 J_2^{(3)}\Big)\mathbf{B}+\\
&+\Big(E^2K_1^{(3)}+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2 K_2^{(3)}\Big)\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\Big),
\end{aligned}\tag{8}$$

здесь введены обозначения:

$$\lambda_a\left(B^2\right)=1+a\left(\beta_0 B\right)^2,\ F_2^{(3)}(W)=-\frac{\beta_0^3}{\lambda_1\lambda_4}\frac{d^3 f_0}{dW^3},$$

$$F_1^{(3)}(W) = -q\tau \frac{\beta_0^2}{\lambda_1} \frac{d^2 f_0}{dW^2}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} T_1^{(3)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_9},\ T_2^{(3)} = \beta_0 D_4^{(3)},\ T_3^{(3)} = \beta_0 D_5^{(3)}, \\ D_1^{(3)} = \beta_0^2 \frac{10 + 19\beta_0^2 + 36\beta_0^4}{\lambda_4\lambda_9},\ D_2^{(3)} = 3\beta_0 \frac{2 + 3\beta_0^2}{\lambda_9}, \\ D_3^{(3)} = \beta_0^4 \frac{70 + 161\beta_0^2 - 17\beta_0^4 + 36\beta_0^6}{\lambda_1^2\lambda_4\lambda_9},\ D_4^{(3)} = \beta_0^5 \frac{175 + 623\beta_0^2 + 448\beta_0^4 + 144\beta_0^6}{\lambda_1^2\lambda_4\lambda_9}, \\ D_5^{(3)} = 15\beta_0^2 \frac{1}{\lambda_9},\ D_6^{(3)} = 3\beta_0^4 \frac{35 + 119\beta_0^2 + 36\beta_0^4}{\lambda_1\lambda_4\lambda_9},\ S_1^{(3)} = 12\beta_0^3 \frac{5 + 11\beta_0^2 - 6\beta_0^4}{\lambda_1\lambda_4\lambda_9}, \end{gathered} \tag{10}$$

Объединяя выражения (6) – (10), получим:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \xi(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + \eta(\mathbf{E}\times\mathbf{B}), \tag{11}$$

Здесь введены скалярные функции полей **E** и **B**:

$$\begin{gathered} \sigma = qN\beta(B^2)\{1 + \beta_0^4 B^2 (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \Psi(B^2)\}, \\ \xi = qN\beta_0^2\beta(B^2)\{1 - \beta_0^2 (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \Psi(B^2)\}, \\ \eta = qN\beta_0\beta(B^2)\{1 - \beta_0^2 (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \Psi(B^2)\}, \end{gathered} \tag{12}$$

и четная относительно смены знака магнитного поля **B** функция:

$$\Psi(B^2) = 3B^2 \frac{\beta_0^4 m^*}{k_\beta T} \frac{35 + 119(\beta_0 B)^2 + 36(\beta_0 B)^4}{\left(1 + (\beta_0 B)^2\right)^2 \left(1 + 4(\beta_0 B)^2\right)^2 \left(1 + 9(\beta_0 B)^2\right)}. \tag{13}$$

## Соотношения взаимности

С помощью определений (12) и (13) соотношение (11) можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{j} = \hat{\Sigma}(E^2, \mathbf{B})\mathbf{E}, \tag{14}$$

где введена матрица квазилинейной проводимости:

$$\hat{\Sigma}\left(E^2,\mathbf{B}\right)=\begin{bmatrix}\sigma+\xi B_x^2 & \xi B_x B_y+\eta B_z & \xi B_x B_z-\eta B_y\\ \xi B_y B_x-\eta B_z & \sigma+\xi B_y^2 & \xi B_y B_z+\eta B_x\\ \xi B_z B_x+\eta B_y & \xi B_z B_y-\eta B_x & \sigma+\xi B_z^2\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Матрицу квазилинейной проводимости (15) для удобства можно представить в виде суммы матриц:

$$\hat{\Sigma}\left(E^2,\mathbf{B}\right)=\left(\sigma\hat{\mathrm{B}}^0+\eta\hat{\mathrm{B}}^1+\xi\hat{\mathrm{B}}^2\right), \tag{16}$$

где

$$\hat{\mathrm{B}}^0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \hat{\mathrm{B}}^1=\begin{bmatrix}0&B_z&-B_y\\-B_z&0&B_x\\B_y&-B_x&0\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathrm{B}}^2=\begin{bmatrix}B_x^2&B_xB_y&B_xB_z\\B_yB_x&B_y^2&B_yB_z\\B_zB_x&B_zB_y&B_z^2\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Формулы (12) и (13) содержат индукцию магнитного поля в четной степени. Тогда симметрия выражения (16) определяется симметрией матриц $\hat{B}^k$ (17). Из (17) очевидны следующие соотношения взаимности для коэффициентов матриц:

$$\mathrm{B}_{ij}^0=\mathrm{B}_{ji}^0,\ \mathrm{B}_{ij}^1=-\mathrm{B}_{ji}^1,\ \mathrm{B}_{ij}^2=\mathrm{B}_{ji}^2. \tag{17}$$

Тогда, используя формулы (17) и определение матрицы квазилинейной проводимости $\hat{\Sigma}$ (16) можно записать соотношения взаимности для коэффициентов матрицы проводимости (16):

$$\Sigma_{ij}\left(E^2,\mathbf{B}\right)=\Sigma_{ji}\left(E^2,-\mathbf{B}\right). \tag{18}$$

В случае слабых магнитных полей, когда $\left(\beta_0 B\right)^2<<1$ коэффициенты $\xi$ и $\eta$ можно записать через $\sigma$:

$$\sigma=qn\beta_0,\eta=\sigma\beta_0,\xi=\sigma\beta_0^2,$$

тогда закон Ома (14) можно записать как:

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\hat{B}^0 + \beta_0 \hat{B}^1 + \beta_0^2 \hat{B}^2\right)\mathbf{E}.$$

## Заключение

Соотношения (18) для матрицы квазилинейной проводимости показывают, что классические соотношения взаимности выполнятся для стационарной, однородной и изотропной среды, находящейся во внешнем однородном магнитном поле даже при наличии нелинейности. При этом квадратичная нелинейность не влияет на общую плотность тока, а кубическая нелинейность проявляется в сильном магнитном поле в не скрещенных полях. Это свидетельствует о том, что внешнее магнитное поле создает выделенное направление, то есть проявляется анизотропия по магнитному полю. Из формулы (18) также следует, что способ уменьшения погрешностей цифрового холловского магнитометра, основанный на использовании линейных соотношений взаимности в скрещенных полях [12], будет справедлив и для слабо нелинейного преобразователя Холла при произвольной конфигурации внешних полей.

## Литература

1. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986, 288 с.

2. Иванов Н.М., Земляков В.Л., Милославский Ю.К. Новые средства измерения параметров пьезокерамических элементов и пьезоматериалов // Инженерный вестник Дона, 2013, №3 URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/zemlyakov.pdf_1780.pdf

3. Самарский С.Г. Широкополосный печатный излучатель для ФАР различного назначения // Инженерный вестник Дона, 2010, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/291

4. Onsager. L. Reciprocal relations in irreversible processes. // Physical Review, 1931, V. 37, pp. 405 – 426.

5. Грот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956, 281 с.

6. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974, 304 с.

7. Файн В.М., Ханин Я.И. Квантовая радиофизика. М.: Советское радио, 1965, 606 с.

8. Игнатьев В. К., Орлов А. А. Системная функция магнитоактивного элемента в неоднородном магнитном поле // Наука и образование, 2012, № 10.

9. Арсенин А.В., Гладун А.Д., Лейман В.Г., Семененко В.Л., Рыжий В.И. Плазменные колебания двумерного электронного газа в полевом транзисторе с цилиндрическим затворным электродом // Радиотехника и электроника, 2010, Т. 55, № 11, с. 1376 – 1386.

10. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. Школа, 1978, 407 с.

11. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.-Л.: ГТТИ, 1934, 359 с.

12. Golubev A.A., Ignat’ev V.K., Nikitin A.V. A high-precision magnetometer // Instruments and experimental techniques, 2008, № 5, pp 753-758.

## References

1. Petrov N., Brankov Y. Sovremennye problemy termodinamiki. [Modern problems of thermodynamics] M.: Mir, 1986, 288 p.

2. Ivanov N.M., Zemlyakov V.L., Miloslavskiy Yu.K. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №3 URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/zemlyakov.pdf_1780.pdf

3. Samarskiy S.G. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2010, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/291

4. Onsager. L. Reciprocal relations in irreversible processes. Physical Review, 1931, V. 37, pp. 405 – 426.

5. Grot S.R. Termodinamika neobratimykh protsessov. [Thermodynamics of irreversible processes] M.: GITTL, 1956, 281 p.

6. D'yarmati I. Neravnovesnaya termodinamika. Teoriya polya i variatsionnye printsipy. [Nonequilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles] M.: Mir, 1974, 304 p.

7. Fayn V.M., Khanin Ya.I. Kvantovaya radiofizika. [Quantum radio physics] M.: Sovetskoe radio, 1965, 606 p.

8. Ignat'ev V. K., Orlov A. A. Nauka i obrazovanie, 2012, № 10.

9. Arsenin A.V., Gladun A.D., Leyman V.G., Semenenko V.L., Ryzhiy V.I. Radiotekhnika i elektronika, 2010, V. 55, № 11, pp. 1376 – 1386.

10. Aleksandrov A.F., Bogdankevich L.S., Rukhadze A.A. Osnovy elektrodinamiki plazmy. [Fundamentals of plasma electrodynamics]. M.: Vyssh. Shkola, 1978, 407 p.

11. Gyunter N.M. Integrirovanie uravneniy pervogo poryadka v chastnykh proizvodnykh. [Integration of the equations of the first order partial derivatives] M.-L.: GTTI, 1934, 359 p.

12. Golubev A.A., Ignat’ev V.K., Nikitin A.V. Instruments and experimental techniques, 2008, № 5, pp 753-758.