

Использование оптимальных принципов для расчета кинематических и силовых факторов в дифференциальном приводе пары соосных колес

А.В. Карпов

Московский политехнический университет, Москва

Аннотация: Предложен метод силового и кинематического анализа дифференциального привода колес транспортного средства, в котором неопределенность устраняется за счет использования принципа минимума потенциальной энергии.

Ключевые слова: моделирование внешней нагрузки, дифференциальный привод, транспортное средство, водило, задача оптимизации.

Введение

Обычно при анализе дифференциального зубчатого механизма рассматривается случай, когда от двух двигателей осуществляется управление одним приводным звеном [1, 2]. Однако при управлении транспортными средствами имеет место обратная ситуация, когда от одного двигателя приводятся два соосных колеса, соединенных между собой дифференциальной связью.

Данный способ привода позволяет почти полностью устранить проскальзывание колес на поворотах [1-6], что существенно повышает маневренность тележек транспортных средств с колесным приводом и снижает непроизводительные потери энергии на преодоление трения. Однако для достижения необходимой точности перемещений в этом случае необходимо применять более сложные алгоритмы управления [7-8].

Расчетная схема и вывод основных уравнений

Расчетная схема дана на рис. 1. На схеме через H обозначен корпус дифференциала, играющий роль водила – звена, содержащего подвижную геометрическую ось вращения колес зубчатой передачи.

Кинематические характеристики колес, определяющие силовое взаимодействие с тележкой в целом и опорной поверхностью [9], задаем

вектором скоростей $\bar{v} = (v_x = v, v_y = v_n, \omega_z = \omega_b)$ средней геометрической точки оси O , а также угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вращения колес вокруг своей геометрической оси. v и v_n – продольная и поперечная скорости центра колеса, ω_b – угловая скорость верчения колеса вокруг оси z .

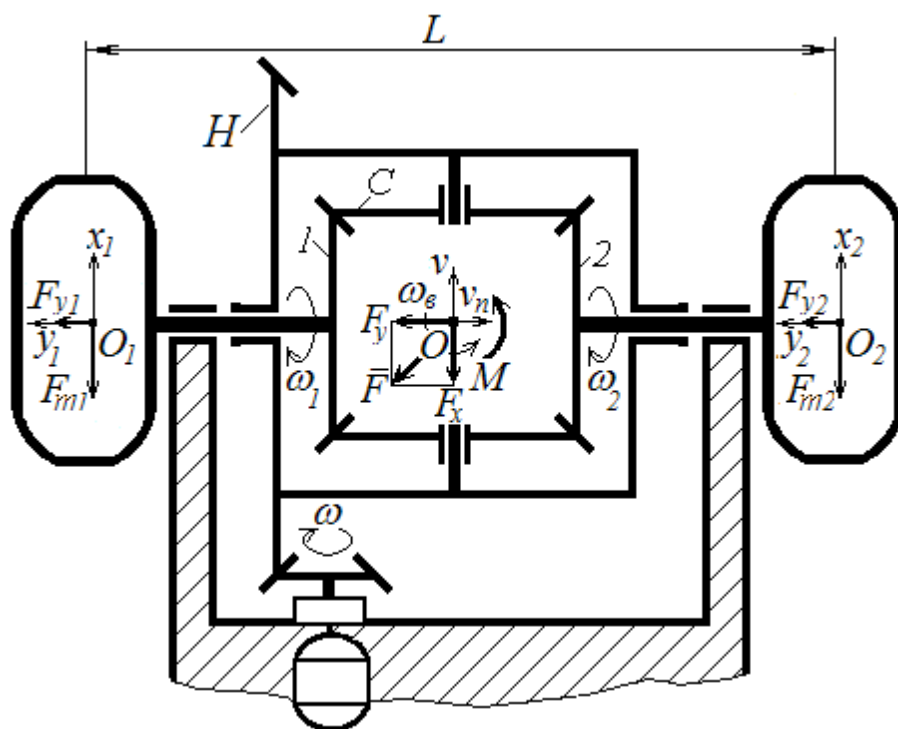


Рис. 1. Расчетная схема дифференциального привода колес

Внешнее силовое нагружение со стороны тележки на вал по осям x и y задано суммарным вектором силы $\bar{F} = (F_x, F_y)$, приложенной в геометрической центральной точке оси O , а также крутящим моментом сил M вокруг вертикальной оси, проходящей через O .

Продольные и поперечные скорости центров колес O_1 и O_2 определяются по формулам: $v_1 = v - \omega_b L/2$, $v_{n1} = v_n$, $v_2 = v + \omega_b L/2$, $v_{n2} = v_n$.

Обозначим через ω_H угловую скорость, передаваемую от двигателя к корпусу дифференциала H , который является его водилом. От него вращательное движение передается валам колес 1 и 2. Их угловые скорости ω_1 и ω_2 связаны с ω_H в общем случае соотношением [1, 3]: $\omega_H = u_{H1}^{(2)}\omega_1 + u_{H2}^{(1)}\omega_2$, где $u_{H1}^{(2)}$ – передаточное отношение от водила H к колесу 1

при остановленном колесе 2, $u_{H2}^{(1)}$ – передаточное отношение от водила H к колесу 2 при остановленном колесе 1.

Для определения $u_{H2}^{(1)}$ выразим его с использованием общих свойств передаточных отношений и формулы Виллиса [1, 2] через передаточное отношение в простой передаче от колеса 1 к колесу 2: $u_{H2}^{(1)} = 1/u_{2H}^{(1)} = 1/(1 - u_{21}^{(2)})$. Поскольку в простой передаче колеса 1 и 2 вращаются в разные стороны и имеют одинаковое число зубьев, то $u_{21}^{(2)} = -1$, а $u_{H2}^{(1)} = 0,5$. Аналогично можно показать, что $u_{H1}^{(2)} = 0,5$.

Таким образом, в рассмотренном дифференциале:

$$\omega_H = 0,5\omega_1 + 0,5\omega_2. \quad (1)$$

Рассмотрим с учетом зависимости (1) три возможных режима движения.

1. $\omega_1 = \omega_2$ (прямолинейное перемещение). При этом $\omega_H = \omega_1 = \omega_2$, т.е. водило H вращается синхронно с ведущими колесами 1 и 2, зубчатые зацепления внутри дифференциала не работают и вся конструкция работает как пара ведущих колес, соединенных жестким валом.

2. $\omega_1 = \text{const} \neq \omega_2 = \text{const}$ (например, на повороте с постоянным радиусом). В этом случае $\omega_H = 0,5(\omega_1 + \omega_2) = \text{const}$ и $\omega_H \neq \omega_1$, $\omega_H \neq \omega_2$. Скорость вращения водила H постоянна, работают оба зубчатых зацепления внутри дифференциала. В силу постоянства ω_H при передаче движущих моментов на колеса отсутствуют инерционные нагрузки со стороны водила.

3. ω_1 и ω_2 переменны ($\omega_1 = \text{var}$ и $\omega_2 = \text{var}$), переходный режим движения. $\omega_H = \text{var}$. При передаче движущих моментов на колеса возникают инерционные нагрузки со стороны водила.

Обозначим вертикальную нагрузку на колесах через F_{z1} и F_{z2} . Распределения продольных и поперечных силовых факторов по центрам

колес 1 и 2 определяются соотношениями: $F_{m1} = F_x/2 - M/L$,
 $F_{m2} = F_x/2 - M/L$, $F_{y1} = F_{y2} = F_y/2$.

Обозначим через M_H движущий момент сил, передаваемый от двигателя к водилу дифференциала H . Данный момент сил распределяется на привод колес 1 и 2. Обозначим величины идеальных движущих моментов сил, передающихся от водила на них, через M_1 и M_2 . Их величины, а также моменты сил сопротивления, наряду с остальными силовыми факторами и скоростями ω_1 , ω_2 , определяют динамику данной пары ведущих колес.

В общем случае моменты сил сопротивления, приведенные к колесам 1 и 2, включают не только моменты сил трения в подшипниковых узлах, но и трение в дифференциале, зависящее от передаваемых на них движущих моментов сил [1-5]. Обозначим их $M_{тр1}$ и $M_{тр2}$. Модули моментов сил трения, приведенных к ведущим колесам 1 и 2:

$$|M_{тр1}| = \mu_1 + f_1|F_{z1}| + f_{31}|M_1|, |M_{тр2}| = \mu_2 + f_2|F_{z2}| + f_{32}|M_2|, \quad (2)$$

где $\mu_1, f_1, f_{31}, \mu_2, f_2, f_{32}$ – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим совместную передачу силовых и кинематических факторов в дифференциале от водила H к колесам 1 и 2 в общем случае. Для полной определенности работы дифференциала необходимо по заданным характеристикам контактного взаимодействия, угловой скорости ω_H и моменту сил M_H на водиле определить угловые скорости ω_1 , ω_2 и моменты сил M_1 , M_2 , передаваемые на колеса 1 и 2. Параметры ω_1 , ω_2 , M_1 , M_2 составляют полный набор неизвестных в решаемой задаче.

Связь скоростей ω_1 , ω_2 и ω_H задает соотношение (1). В общем случае по принципу Даламбера [10] сумму моментов сил, приложенных к водилу, представим в виде:

$$M_H - M_{ин} = M_1 + M_2, \quad (3)$$

где $M_{ин} = J_H \varepsilon_H$, J_H , ε_H – момент инерции и угловое ускорение водила во вращательном движении.

Идеальная мощность N_H , передаваемая от привода к водилу за некоторый малый момент времени Δt , расходуется на преодоление инерционных нагрузок, возникающих при изменении скорости вращения водила, и на привод валов колес 1 и 2. Отсюда следует:

$$N_H + \Delta N_{ин} = \Delta N_1 + \Delta N_2. \quad (4)$$

Перечисленные уравнения налагают три связи на искомые параметры. Не хватает еще одного.

У дифференциала, как системы с двумя степенями свободы, имеется неопределенность при передаче кинематических и силовых факторов от одного ведущего звена (водила) к двум ведомым (валы колес 1 и 2). Эта передача осуществляется путем саморегуляции данных параметров самой системой. Для анализа процесса можно использовать принцип минимума потенциальной энергии, который заключается в том, что любая замкнутая система стремится перейти в такое состояние, в котором ее потенциальная энергия минимальна [1-5].

Для вывода недостающего уравнения и представления соотношений в форме, удобной для практических расчетов, рассмотрим два близких момента времени t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Значения расчетных параметров в данные моменты времени для краткости обозначим: $\omega_H(t_i) = \omega_H$, $M_H(t_i) = M_H$, $\omega_1(t_i) = \omega_1$, $\omega_2(t_i) = \omega_2$, $M_1(t_i) = M_1$, $M_2(t_i) = M_2$, $\omega_H(t_{i+1}) = \omega_H + \Delta\omega_H$, $M_H(t_{i+1}) = M_H + \Delta M_H$, $\omega_1(t_{i+1}) = \omega_1 + \Delta\omega_1$, $\omega_2(t_{i+1}) = \omega_2 + \Delta\omega_2$, $M_1(t_{i+1}) = M_1 + \Delta M_1$, $M_2(t_{i+1}) = M_2 + \Delta M_2$.

Исходными данными задачи являются:

- ω_H , M_H , ω_1 , ω_2 , M_1 , M_2 – параметры начального состояния системы,
- $\Delta\omega_H$, ΔM_H – возмущения, вносимые ведущим звеном – водилом,

• параметры кинематического и силового взаимодействия во фрикционных и зубчатых контактах системы.

Выходными величинами задачи являются:

• $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta M_1, \Delta M_2$ – изменения выходных параметров системы.

Подставляя выражения для скоростей в моменты времени t_i и t_{i+1} в соотношение (1) после вычитания соответствующих уравнений получим:

$\Delta\omega_H = 0,5(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)$. Отсюда:

$$\Delta\omega_2 = 2\Delta\omega_H - \Delta\omega_1. \quad (5)$$

Уравнение (3) для момента времени t_{i+1} имеет вид:

$M_H + \Delta M_H - J_H \Delta\omega_H / \Delta t = M_1 + \Delta M_1 + M_2 + \Delta M_2$. Из него следует:

$$\Delta M_2 = M_H - M_1 - \Delta M_1 - M_2 + \Delta M_H - J_H \Delta\omega_H / \Delta t. \quad (6)$$

Определим инерционные потери мощности на изменение скорости вращения водила в интервале от t_i до t_{i+1} . Средние величины ускорения водила и момента инерционных сил равны $\Delta\omega_H / \Delta t$ и $-J_H(\Delta\omega_H / \Delta t)$. Поскольку дополнительный угол поворота водила, обусловленный приращением скорости $\Delta\omega_H$, изменяется от 0 до значения $(\Delta\omega_H \Delta t)$, то работа дополнительного инерционного момента сил в интервале от t_i до t_{i+1} равна $\Delta A_{ин} = -0,5 J_H (\Delta\omega_H / \Delta t) (\Delta\omega_H \Delta t) = -0,5 J_H (\Delta\omega_H)^2$.

Приращение идеальных мощностей, передаваемых от водила к колесам в момент времени t_i задает уравнение (4). С учетом потерь мощности $\Delta N_{ин} = \Delta A_{ин} / \Delta t$ на изменение скорости вращения водила в интервале от t_i до t_{i+1} , получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (M_H + \Delta M_H)(\omega_H + \Delta\omega_H) - M_H \omega_H - 0,5 J_H (\Delta\omega_H)^2 / \Delta t = \\ = (M_1 + \Delta M_1)(\omega_1 + \Delta\omega_1) - M_1 \omega_1 + (M_2 + \Delta M_2)(\omega_2 + \Delta\omega_2) - M_2 \omega_2. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и отбрасывая в уравнении операнды второй степени малости вида $\Delta M \Delta \omega$, получим приближенное равенство, справедливое в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$M_H \Delta \omega_H + \Delta M_H \omega_H - 0,5 J_H (\Delta \omega_H)^2 / \Delta t \approx M_1 \Delta \omega_1 + \Delta M_1 \omega_1 + M_2 \Delta \omega_2 + \Delta M_2 \omega_2.$$

Подставляя в него из (5) и (6) выражения для $\Delta \omega_2$, ΔM_2 , преобразуем два последних слагаемых:

$$M_2 \Delta \omega_2 + \Delta M_2 \omega_2 = (M_H - M_1 - M_2) \omega_2 + \\ + \Delta M_H \omega_2 - \Delta M_1 \omega_2 - J_H \omega_2 \Delta \omega_H / \Delta t + 2 M_2 \Delta \omega_H - M_2 \Delta \omega_1.$$

После подстановки в основное соотношение получаем в итоге линейное уравнение связи ΔM_1 и $\Delta \omega_1$:

$$M_H \Delta \omega_H + 0,5 J_H \Delta \omega_H (2 \omega_2 - \Delta \omega_H) / \Delta t - (M_H - M_1 - M_2) \omega_2 + \\ + \Delta M_H (\omega_H - \omega_2) - 2 M_2 \Delta \omega_H \approx \Delta M_1 (\omega_1 - \omega_2) + \Delta \omega_1 (M_1 - M_2). \quad (7)$$

Применение принципа минимума потенциальной энергии заключается в том, что величина потенциальной энергии, затраченной за рассмотренный промежуток времени Δt на изменение кинетической энергии всей системы, будет минимальна.

Углы поворота валов 1 и 2, на которые они поворачиваются по инерции, равны $\omega_1 \Delta t$ и $\omega_2 \Delta t$. Дополнительные углы поворота равны $\Delta \omega_1 \Delta t$ и $\Delta \omega_2 \Delta t$. Энергия, затраченная на валах колес 1 и 2 на приращение их кинетической энергии, равна:

$$\Delta \Pi_1 = 0,5 \left[(\Delta M_1 - |M_{\text{тр}1}(M_1 + \Delta M_1)| \text{sign}(M_1 + \Delta M_1) + \right. \\ \left. + |M_{\text{тр}1}(M_1)| \text{sign}(M_1) - r(R_{x1}(t_{i+1}) - R_{x1}(t_i)) \right] \Delta \omega_1 \Delta t, \\ \Delta \Pi_2 = 0,5 \left[(\Delta M_2 - |M_{\text{тр}2}(M_2 + \Delta M_2)| \text{sign}(M_2 + \Delta M_2) + \right. \\ \left. + |M_{\text{тр}2}(M_2)| \text{sign}(M_2) - r(R_{x2}(t_{i+1}) - R_{x2}(t_i)) \right] \Delta \omega_2 \Delta t.$$

Суммарная энергия, затраченная на валах колес 1 и 2 на изменение их кинетической энергии, равна:

$$\Delta \Pi_{\Sigma} = 0,5 \left\{ \left[\left(\Delta M_1 - |M_{\text{тр}1}(M_1 + \Delta M_1)| \text{sign}(M_1 + \Delta M_1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + |M_{\text{тр}1}(M_1)| \text{sign}(M_1) - r(R_{x1}(t_{i+1}, M_1 + \Delta M_1) - R_{x1}(t_i, M_1)) \right) \right] \Delta \omega_1 \Delta t + \right. \\ \left. \left[\left(\Delta M_2 - |M_{\text{тр}2}(M_2 + \Delta M_2)| \text{sign}(M_2 + \Delta M_2) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + |M_{\text{тр}2}(M_2)| \text{sign}(M_2) - r(R_{x2}(t_{i+1}, M_2 + \Delta M_2) - R_{x2}(t_i, M_2)) \right) \right] \Delta \omega_2 \Delta t \right\}.$$

Подставляя в выражение для $\Delta \Pi_{\Sigma}$ выражения для $\Delta \omega_2$, ΔM_2 из (5) и (6) и умножая на $2 / \Delta t$, получаем в итоге, что величины ΔM_1 и $\Delta \omega_1$ можно определить как решение следующей условной задачи оптимизации.

1. Управляемые параметры – $(\Delta M_1, \Delta \omega_1)$.

2. Целевая функция и условие ее оптимальности:

$$\left[\left(\Delta M_1 - |M_{\text{тр}1}(M_1 + \Delta M_1)| \text{sign}(M_1 + \Delta M_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + |M_{\text{тр}1}(M_1)| \text{sign}(M_1) - r(R_{x1}(t_{i+1}, M_1 + \Delta M_1) - R_{x1}(t_i, M_1)) \right) \right] \Delta \omega_1 \\ + \left[(M_H - M_1 - M_2 + \Delta M_H - \Delta M_1 - J_H \Delta \omega_H / \Delta t - \right. \\ \left. - |M_{\text{тр}2}(M_H + \Delta M_H - M_1 - \Delta M_1 - J_H \Delta \omega_H / \Delta t)| \times \right. \\ \left. \times \text{sign}(M_H + \Delta M_H - M_1 - \Delta M_1 - J_H \Delta \omega_H / \Delta t) + \right. \\ \left. + |M_{\text{тр}2}(M_2)| \text{sign}(M_2) - \right. \\ \left. - r(R_{x2}(t_{i+1}, M_H + \Delta M_H - M_1 - \Delta M_1 - J_H \Delta \omega_H / \Delta t) - \right. \\ \left. - R_{x2}(t_i, M_2)) \right] (2 \Delta \omega_H - \Delta \omega_1) \rightarrow \min. \quad (8)$$

3. Ограничение:

$$M_H \Delta \omega_H + 0,5 J_H \Delta \omega_H (2 \omega_2 - \Delta \omega_H) / \Delta t - (M_H - M_1 - M_2) \omega_2 + \\ + \Delta M_H (\omega_H - \omega_2) - 2 M_2 \Delta \omega_H \approx \Delta M_1 (\omega_1 - \omega_2) + \Delta \omega_1 (M_1 - M_2).$$

Из-за наличия в целевой функции (8) функций модуля и sign в общем случае поставленная задача решается относительно ΔM_1 и $\Delta \omega_1$ только численными методами.

Поставляя найденные величины ΔM_1 и $\Delta \omega_1$ в (5) и (6), получаем неизвестные факторы для второго колеса ΔM_2 и $\Delta \omega_2$.

Выводы

При выводе соотношений расчетной модели использованы только основополагающие принципы механики и свойства зубчатых механизмов.

Полученная в работе оптимизационная постановка задачи кинематического и силового расчета позволяет с достаточной точностью моделировать поведение дифференциального привода в самых различных переходных режимах работы. Она может быть использована в алгоритмах управления перемещениями колесных тележек с данным типом привода.

Литература

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. Издание стереотипное.. М.: Ленанд, 2023. 639 с. ISBN 978-5-9519-3791-9. ISBN 978-5-9710-6237-0.
2. Юдин В. А., Петрокас Л. В. Теория механизмов и машин. 2-е изд., перераб. и доп. изд. М.: Высш. школа, 1977. 527 с.
3. Иларионов В. А., Морин М. М., Сергеев Н. М. и др. Теория и конструкция автомобиля / М.: Машиностроение, 1985. 368 с.
4. Тарасик В. П. Теория движения автомобиля. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 478 с.
5. Литвинов А. С., Ротенберг Р. В., Фрумкин А. К. Шасси автомобиля. Конструкция и элементы расчета. М.: Машгиз, 1963. 503 с.
6. Смирнов Г. А. Теория движения колесных машин. 2-е изд., доп. и перераб. изд. М.: Машиностроение, 1990. 352 с.
7. Debada E.G., Gillet D. Virtual vehicle-based cooperative maneuver planning for connected automated vehicles at single-lane roundabouts. IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine. 2018. 10(4). Pp. 35-46. DOI: 10.1109/MITS.2018.2867529.
8. V. Swaminathan, S. Arora, R. Bansal and R. Rajalakshmi, Autonomous Driving System with Road Sign Recognition using Convolutional Neural

Networks, 2019 International Conference on Computational Intelligence in Data Science (ICCIDS), Chennai, India, 2019. Pp. 1-4. DOI: 10.1109/ICCIDS.2019.8862152.

9. Гданский Н.И., Каргин В.А., Карпов А.В., Хссан Т. Параметры кинематики и динамики электрифицированной платформы для построения модели адаптивного управления // Электротехнологии и электрооборудование в АПК. 2024. №Т. 71. № 1 (54). С. 122-127.

10. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981. 191 с.

References

1. Artobolevskij I. I. Teorija mehanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. Izдание stereotipnoe.. М.: Lenand, 2023. 639 p. ISBN 978-5-9519-3791-9. ISBN 978-5-9710-6237-0.

2. Judin V. A., Petrokas L. V. Teorija mehanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. 2-e izd., pererab. i dop. izd. М.: Vyssh. shkola, 1977. 527 p.

3. Ilarionov V. A., Morin M. M., Sergeev N. M. i dr. Teorija i konstrukcija avtomobilja Ucheb. dlja tehnikumov [Theory and design of the car], М.: Mashinostroenie, 1985. 368 p.

4. Tarasik V. P. Teorija dvizhenija avtomobilja [Theory of car movement]. SPb.: BHV-Peterburg, 2006. 478 p.

5. Litvinov A. S., Rotenberg R. V., Frumkin A. K. Shassi avtomobilja. Konstrukcija i jelementy rascheta [The chassis of the car. Design and calculation elements]. М.: Mashgiz, 1963. 503 p.

6. Smirnov G. A. Teorija dvizhenija kolesnyh mashin [Theory of movement of wheeled vehicles]. 2-e izd., dop. i pererab. izd. М.: Mashinostroenie, 1990. 352 p.

7. Debada E.G., Gillet D. Virtual vehicle-based cooperative maneuver planning for connected automated vehicles at single-lane roundabouts. IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine. 2018. 10(4). Pp. 35-46. DOI: 10.1109/MITS.2018.2867529.

8. V. Swaminathan, S. Arora, R. Bansal and R. Rajalakshmi, Autonomous Driving System with Road Sign Recognition using Convolutional Neural Networks, 2019 International Conference on Computational Intelligence in Data Science (ICCIDS), Chennai, India, 2019. Pp. 1-4. DOI: 10.1109/ICCIDS.2019.8862152.

9. Gdanskij N.I., Kargin V.A., Karpov A.V., Hssan T. Jeлектrotehnologii i jelektrooborudovanie v APK. 2024. №Т. 71. № 1 (54). Pp. 122-127.

10. Ishlinskij A. Ju. Mehanika otnositel'nogo dvizhenija i sily inercii [Mechanics of relative motion and inertia forces]. M.: Nauka, 1981. 191 p.

Дата поступления: 21.04.2025

Дата публикации: 25.05.2025