
Формообразование конструктивных сетей многогранных непологих куполов

А.И. Евтушенко, А.Н. Самсонова, С.В. Скуратов

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье исследуется способ образования пространственных конфигураций в форме полуправильных многогранников. Приводится алгоритм геометрического расчета, позволяющий определить координаты узлов конструктивных сетей многогранных полусферических куполов, длины ребер и типоразмеры треугольных граней. Получены пространственные конфигурации в форме 20-, 80-, 320- и 1280-гранников. Результаты проиллюстрированы на 2-х примерах многогранников. Приведены геометрические схемы секториальных частей полусферических куполов по разрезке 320- и 1280-гранников с обозначением типовых узлов и треугольных панелей.

Ключевые слова: Икосаэдр, ребро, грань, полусфера, дублирование, секториальная часть, многогранник, купол, типоразмер, треугольная панель.

В трехмерном пространстве осуществимо построение пяти правильных многогранников, называемых платоновыми телами, к которым относятся:

- Тетраэдр – 4 треугольника;
- Куб (гексаэдр) – 6 квадратов;
- Октаэдр – 8 треугольников;
- Додекаэдр – 12 пятиугольников;
- Икосаэдр – 20 треугольников.

Все вышеупомянутые многогранники могут быть вписаны в сферическую поверхность шара и имеют грани в форме равносторонних трех-, четырех- или пятиугольников [1].

Наиболее широкое распространение для построения конструктивных сетей многогранных куполов получили пространственные точечные решетки икосаэдрального типа. Способы образования пространственных конфигураций в форме полуправильных многогранников рассмотрены в [2-6], где предпочтение отдается способу дублирования, который заключается в проецировании из центра на сферическую поверхность середин ребер исходного многогранника. При определении значений геометрических параметров и координат узлов конструктивных сетей многогранных

полусферических куполов используется алгоритм расчета, основанный на применении способа центральной проекции. В качестве исходной конфигурации принимается икосаэдр, длина ребра l которого определяется выражением

$$l = r \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} \approx 1.05146r, \quad (1)$$

где r – радиус сферы, описанной около многогранника.

Введем нумерацию вершин икосаэдра и поместим его в прямоугольной декартовой системе координат таким образом, чтобы центр описанной около многогранника сферы совпадал с началом координатных осей (рис. 1). Координаты 12 вершин правильного 20-гранника в долях радиуса r приведены в таблице 1.

Таблица 1

№№ вершин	x/r	y/r	z/r
1.	0	0	1
2.	-0,52573	0,72361	0,44721
3.	-0,85065	-0,27639	0,44721
4.	0	-0,89443	0,44721
5.	0,85065	-0,27639	0,44721
6.	0,52573	0,72361	0,44721
7.	0,52573	-0,72361	-0,44721
8.	0,85065	0,27639	-0,44721
9.	0	0,89443	-0,44721
10.	-0,85065	0,27639	-0,44721
11.	-0,52573	-0,72361	-0,44721
12.	0	0	-1

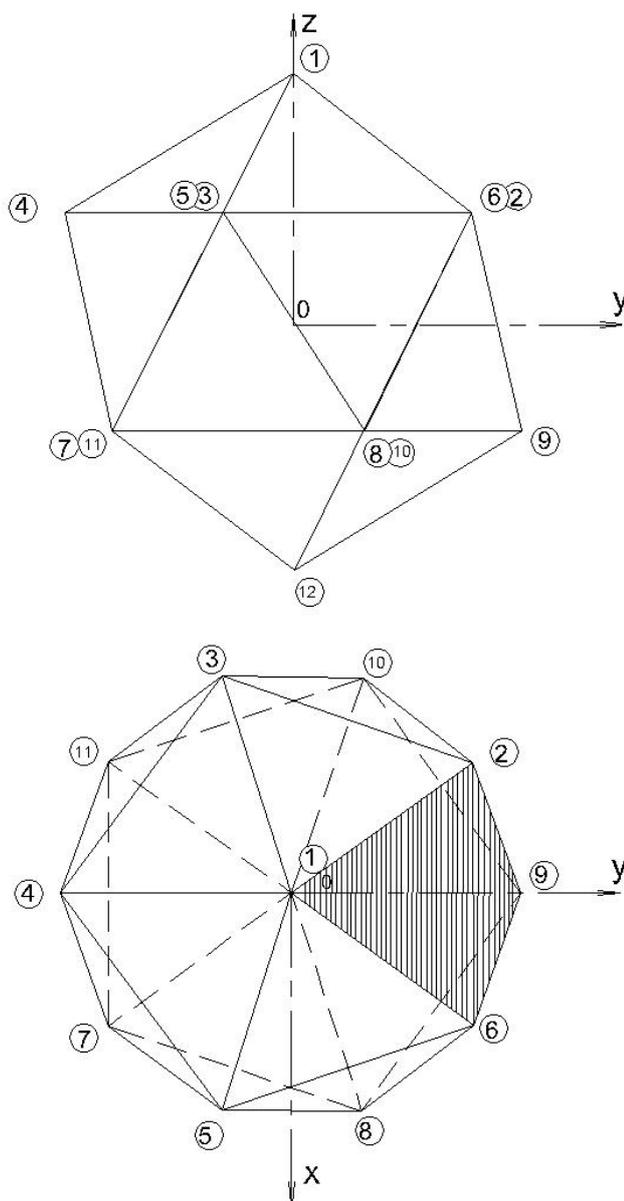


Рис. 1

Пространственные точечные решетки икосаэдрального типа обладают пятикратной циклической симметрией [7,8], что позволяет при определении координат узловых точек применять процедуру дублирования только для секториальной части многогранника, выделенной на рис. 1 штриховкой. В рассмотрение принимаем сектор на плане многогранника, для которого координатная ось OY является осью симметрии. В этом случае значение координат узловых точек сектора, расположенных симметрично

относительно этой оси, совпадают, за исключением значений координат по оси Ox , которые одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Пусть точка $i(x_i, y_i, z_i)$ и $j(x_j, y_j, z_j)$, являющиеся вершинами икосаэдра, соединены ребром l_{ij} (рис. 2). Из центра O через середину отрезка ij .

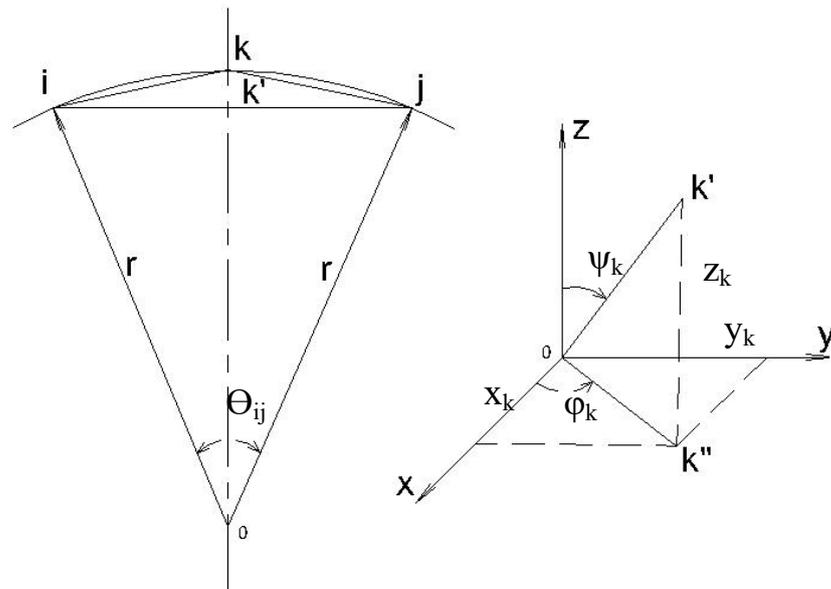


Рис. 2.

проводим луч OK до пересечения со сферой радиуса r , описанной около многогранника. Требуется определить координаты точки $K(x_k, y_k, z_k)$ и длины отрезков $l_{ik}=l_{kj}$.

Из формулы для отыскания длины отрезка, концы которого принадлежат сфере, $l_{ij}=2r\sin\frac{\theta_{ij}}{2}$ (2)

определяем центральный угол θ_{ij} . Используя формулу (2), находим также длины отрезков ik и kj .

$$l_{ik}=l_{kj}=2r\sin\frac{\theta_{ij}}{4} \quad (3)$$

Координаты точки K' можно получить с помощью следующих формул:

$$x_k = \frac{x_i + x_j}{2}; y_k = \frac{y_i + y_j}{2}; z_k = \frac{z_i + z_j}{2} \quad (4)$$

Затем находим угол ψ_k между положительным направлением оси OZ и лучом ОК:

$$\psi_k = \arccos \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}} \quad (5)$$

и угол φ_k между положительным направлением оси OX и проекцией луча ОК на плоскость XOY

$$\varphi_k = \arctg \frac{y_k}{x_k} \quad (6)$$

С помощью формул перехода от сферической системы координат к прямоугольной декартовой находим:

$$\begin{aligned} x_k &= r \cos \varphi_k \sin \psi_k \\ y_k &= r \sin \varphi_k \sin \psi_k \\ z_k &= r \cos \psi_k \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, определяются координаты всех узловых точек секториальной части полученного 80-гранника. Координаты остальных узловых точек сети находятся с использованием формул поворота декартовой системы координат вокруг оси OZ.

Выполняя первую операцию дублирования над икосаэдром, получаем полуправильный 80-гранник, который характеризуется двумя типами треугольных граней (рис. 3). Полученный многогранник в диаметральных плоскостях трех направлений образует правильные десятиугольники, что позволяет, используя процедуру дублирования, получать пространственные конфигурации для построения конструктивных сетей куполов в виде полусферы с плоским опорным контуром многоугольного очертания.

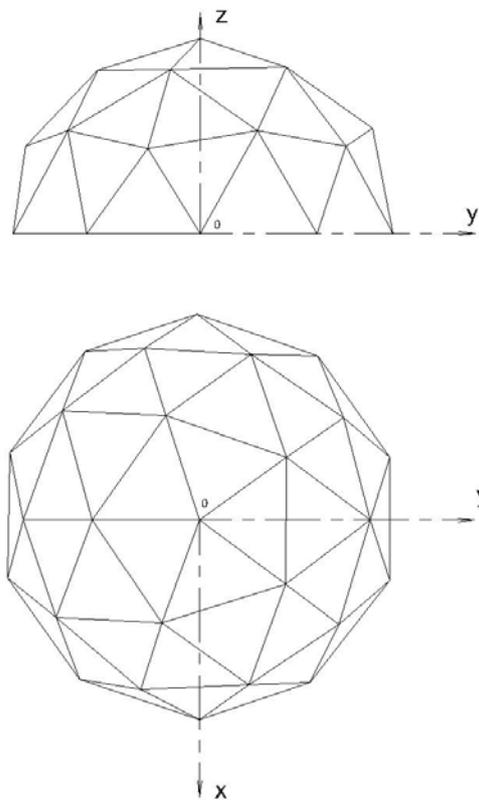


Рис. 3.

Выполнение второй и третьей процедур дублирования над икосаэдром позволяет с помощью изложенного алгоритма последовательно определить координаты узлов построенных конфигураций в форме 320- и 1280-гранников. Геометрические схемы этих многогранников представлены на рис. 4 и 5. Выполнение последующих процедур дублирования приводит к образованию многогранников со значительно большим числом граней (5120 и более), что усложняет использование таких конфигураций в качестве поверхностей купольных покрытий.

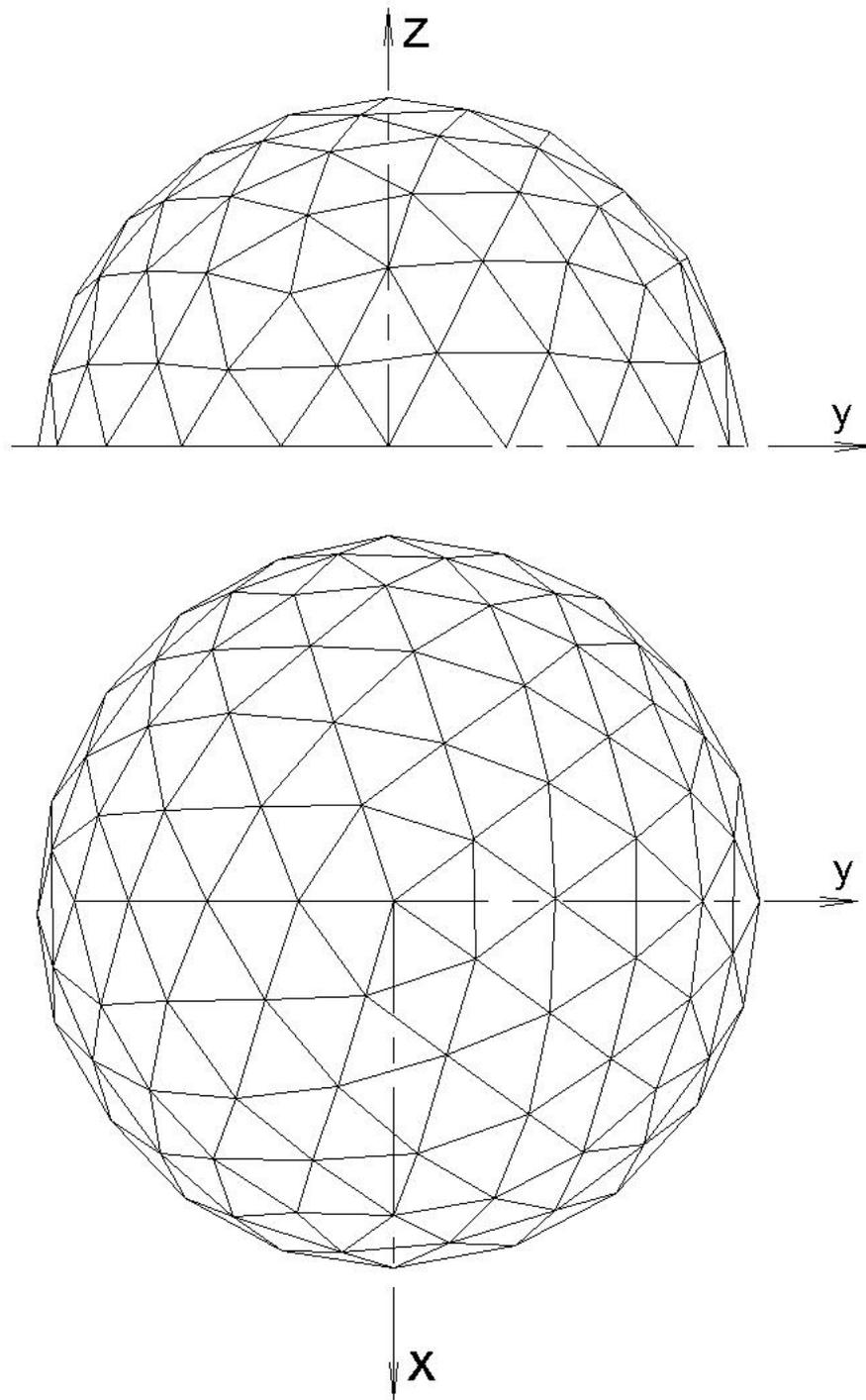


Рис. 4

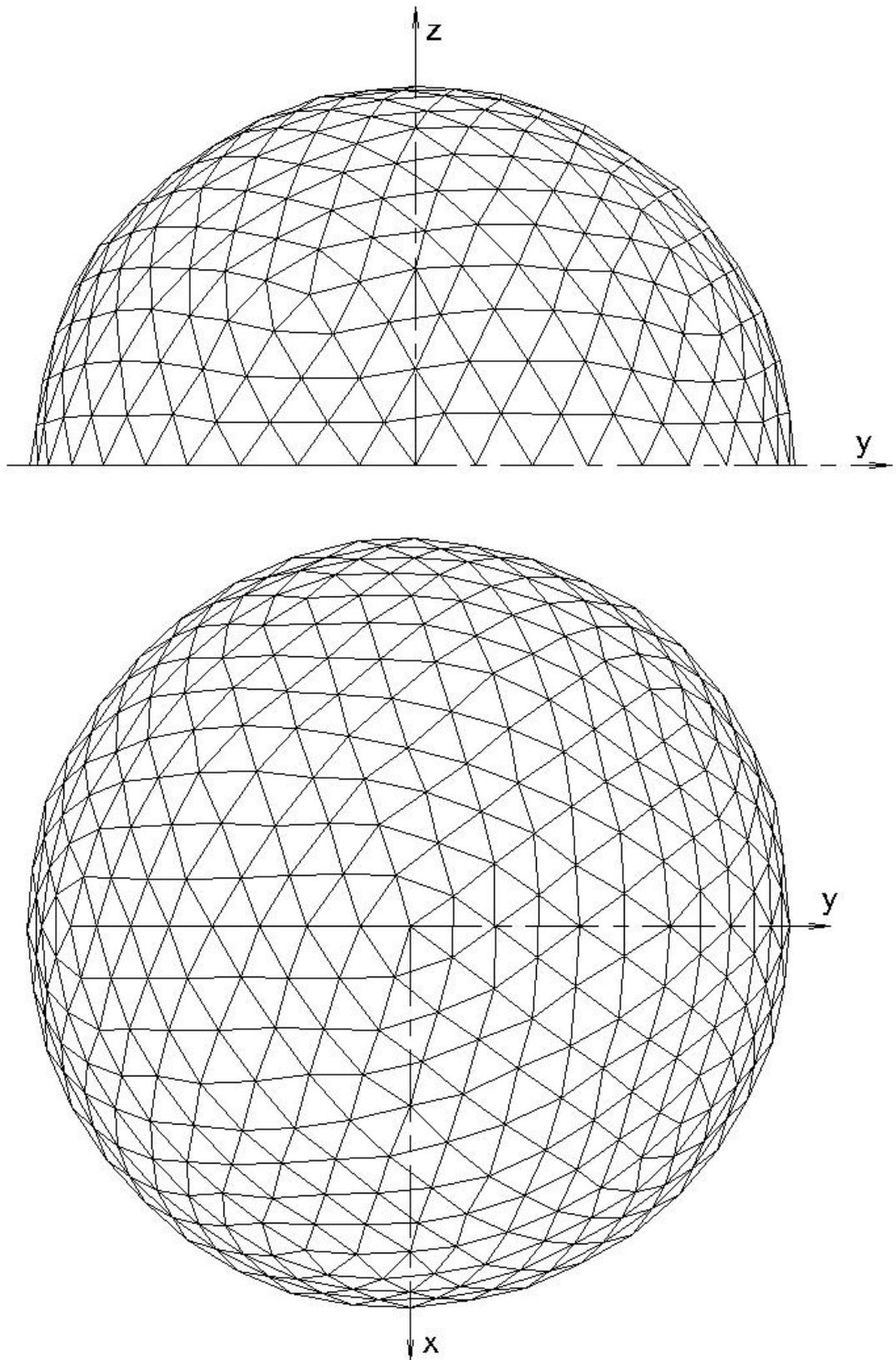


Рис. 5

На рис. 6 и 7 представлены геометрические схемы секториальных частей полусферических куполов по разрезке 320- и 1280-гранников с обозначением типовых узлов и треугольных панелей. В таблицах 2 и 3 приведены значения длин ребер соответствующих типоразмеров.

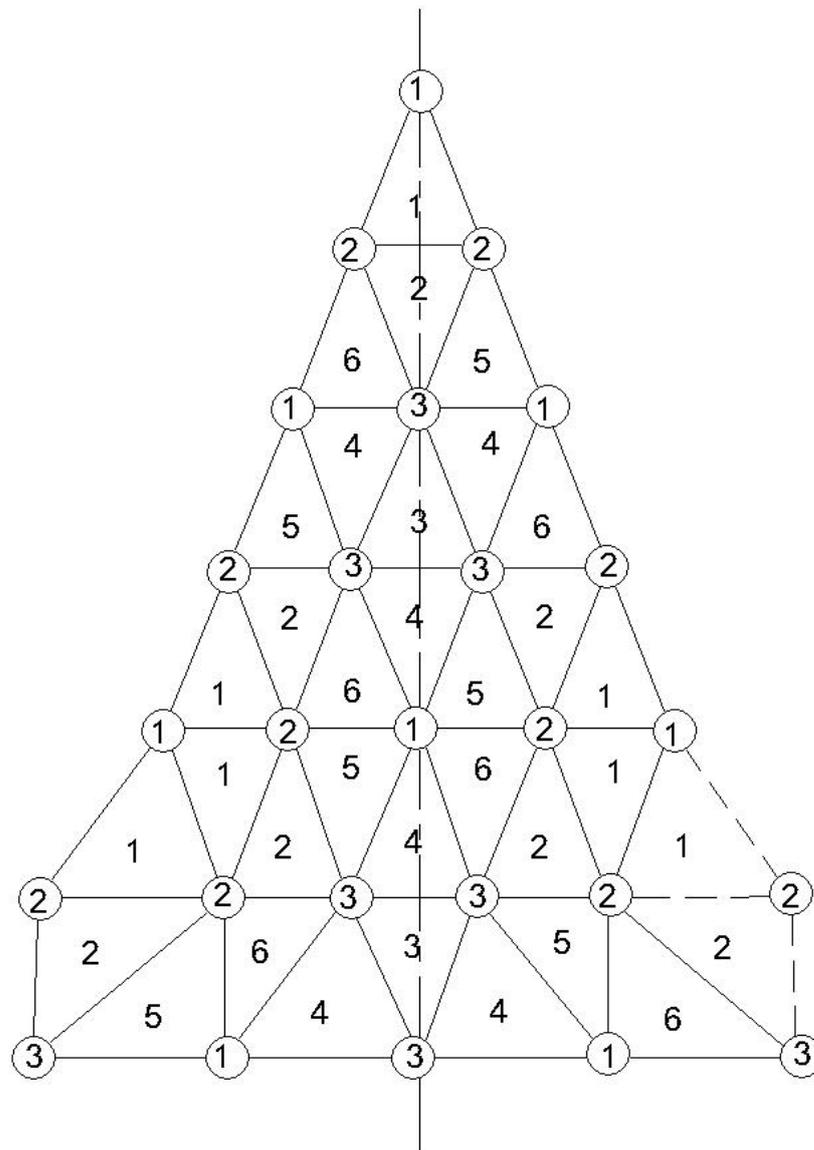


Рис. 6

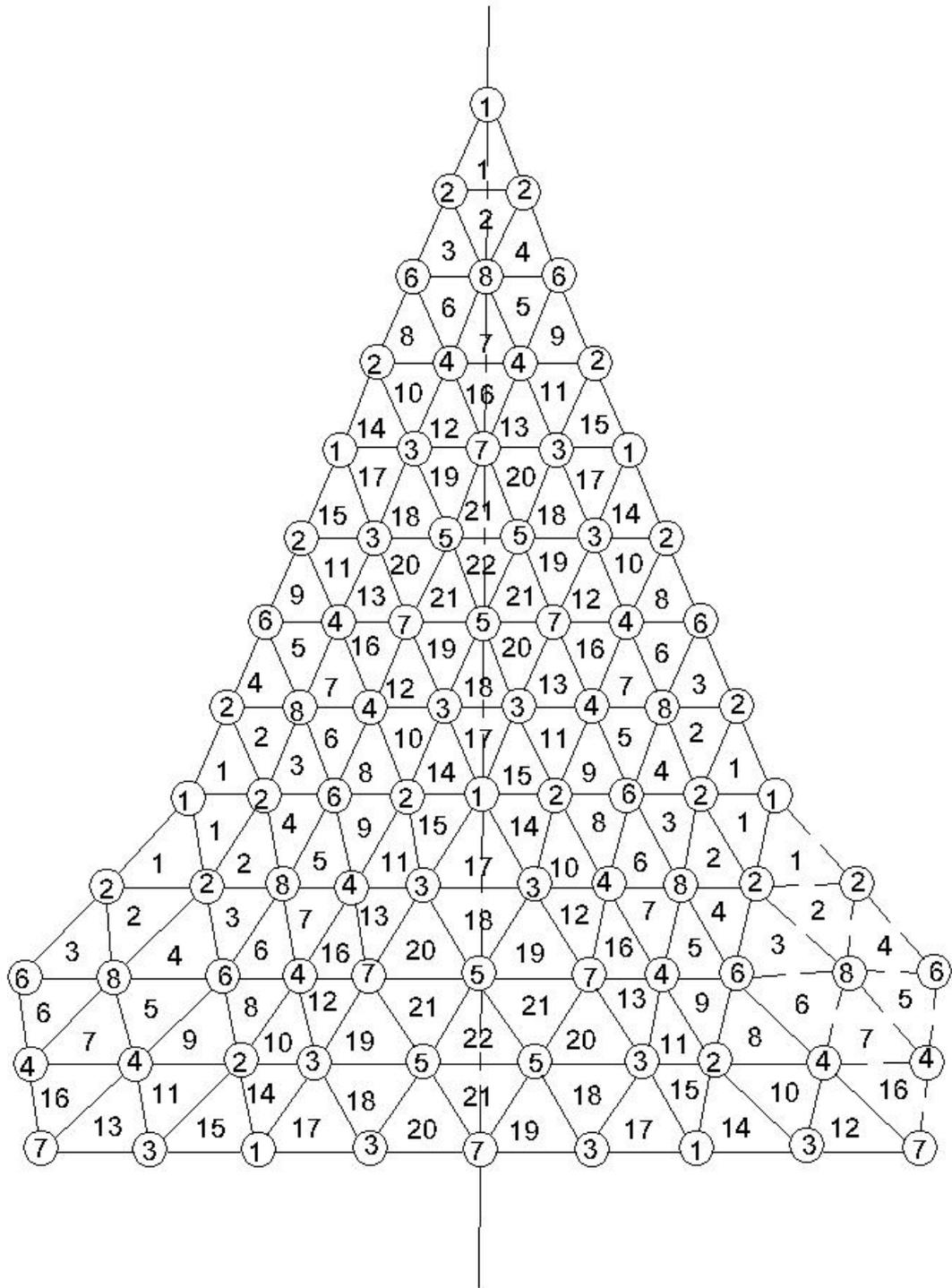


Рис. 7

Таблица 2

Элемент	Длины ребер в долях радиуса гописанной сферы
1-2	0,275900
1-3	0,312869
2-2	0,321244
2-3	0,285473
3-3	0,324920

Таблица 3

Элемент	Длины ребер в долях радиуса гописанной сферы
1-2 (2-6)	0,138280
1-3 (3-7)	0,156918
2-2	0,162173
2-3	0,144288
2-4	0,157997
2-8	0,139481
3-3	0,164484
3-4	0,139510
3-5	0,158458
4-4	0,162284
4-6 (4-7)	0,143102
4-8	0,144388
5-5	0,164648
5-7	0,163002
6-8	0,161146

Рассмотренная методика может быть использована при разработке архитектурных решений купольных сооружений (спортивных, выставочных и д.р.), состоящих их треугольных ячеек, в т.ч. при проектировании уникальных зданий и сооружений [9,10].

Литература

1. Ермолов В.В. Построение сетки геодезических куполов способом центральной проекции. - Строительная механика, расчет и конструирование сооружений: МАрхи, Москва, 1976, вып. 5, с. 79-83
 2. Robert Jyhvyl; Translator: Ghanbar Ebrahimi - Housing and Building Research - Volume 2 - Edition 1, 1986, 354 p.
 3. Василькин А.А., Рахмонов Э.К. Системотехника оптимального проектирования элементов строительных конструкций // Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2203.
 4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1984-832с.
 5. Кабаков С.Ю., Грачев С.Е. Геометрическое формообразование многогранных сферических куполов // Архитектура и градостроительство на Дальнем Востоке. – Хабаровск, 1985. – с. 100-104.
 6. Металлические конструкции. Справочник проектировщика. – Москва: Стройиздат, 1980-776с.
 7. Журавлев А.А., Муро Г.Э. Новое конструктивное решение покрытия системы Цолингера // Инженерный вестник Дона, 2011, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/706.
 8. Gotz K.H., Hoor D., Mohler K., Holzbau Atlas. Munchen, 1978, 272 p.
 9. Ammer Th., Brunaner A. Zollingers Rauten neu entdeckt. Bauen mit Holz, H.6, 1999. – pp.24-28
 10. Фурсов В.В., Пурязданхах М., Бидаков А.Н. Сравнительный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований натурной арки из клееной древесины // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1608.
-

References

1. Ermolov V.V. Postroenie setki geodezicheskikh kupolov sposobom central'noj proekcii. [A Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers] - Stroitel'naja mehanika, raschet i konstruirovaniye sooruzhenij: MArhi, Moskva, 1976, ed. 5, pp. 79-83
2. Robert Jyhvyl; Translator: Ghanbar Ebrahimi - Housing and Building Research. Volume 2 - Edition 1, 1986, 354 p.
3. Vasil'kin A.A., Rahmonov Je.K. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2203.
4. Korn G., Korn T. Moskva: Nauka, 1984-832p.
5. Kabakov S.Ju., Grachev S.E. Arhitektura i gradostroitel'stvo na Dal'nem Vostoke. Habarovsk, 1985. pp. 100-104.
6. Metallicheskie konstrukcii. Spravochnik proektirovshhika. [Metal constructions. Reference book of the designer.] Moskva: Strojizdat, 1980-776 p.
7. Zhuravlev A.A., Muro G.Je. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2011, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/706.
8. Gotz K.H., Hoor D., Mohler K., Holzbau Atlas. Munchen, 1978, 272 p.
9. Ammer Th., Brunaner A. Zollingers Rauten neu entdeckt. Bauen mit Holz, H.6, 1999. pp.24-28
10. Fursov V.V., Purjazdanhah M., Bidakov A.N. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1608.