

Расчет эволюции возмущений свободной поверхности при помощи метода конечных элементов для различных вариантов уравнений мелкой воды

М. Ю. Жуков, Е.В. Ширяева, В. Б. Малаховская

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Уравнения мелкой воды на плоскости, сфере, и в приближении бета-плоскости исследованы численно при помощи метода конечных элементов. Показано, что полунявная аппроксимация по времени позволяет получать стабильное решение в случае локализованных начальных возмущений свободной поверхности вращающейся жидкости.

Ключевые слова: метод конечных элементов, уравнения мелкой воды, бета-плоскость, возмущение свободной поверхности.

Введение

Одна из простейших моделей геофизической гидродинамики – уравнения мелкой воды, достаточно хорошо описывают атмосферные и океанические течения во вращающихся областях. Всевозможные асимптотические варианты таких уравнений, в частности, приближение бета-плоскости, сравнительно полно исследованы аналитическими и численными методами. При использовании численных методов чаще всего применяются специальные конечно-разностные схемы, предотвращающие влияние сеточной вязкости и других паразитных эффектов (см., например [1]).

Целью настоящей работы является демонстрация эффективности применения метода конечных элементов (МКЭ). Показано, что уже простейшие варианты полунявных временных схем МКЭ позволяют строить решения для локализованных начальных возмущений свободной поверхности во вращающейся жидкости. Привлекательность использования МКЭ, в частности, обусловлено тем, что для построения решения в областях со сложными границами (озера, внутренние моря и т. п.) не требуется

конструирования сложных сеточных схем, легко реализуются различные краевые условия, гладкость решения не имеет существенного значения, и без труда учитываются различные физические нелинейности.

Программная реализация МКЭ осуществлялась при помощи пакета FreeFem++, предназначенного для численного решения широкого класса задач математической физики (см., например, [2–4]).

1. Уравнения мелкой воды на произвольной поверхности

Уравнения мелкой воды хорошо известны и в безразмерных переменных имеют вид (см., например, [5–9], в [5] дан детальный анализ свойств различных моделей, обладающих гамильтоновой структурой)

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} - \left[f + \frac{1}{H_1 H_2} \left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial q^1} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial q^2} \right) \right] u_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial(gh)}{\partial q^1} &= 0, \\ \frac{du_2}{dt} + \left[f + \frac{1}{H_1 H_2} \left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial q^1} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial q^2} \right) \right] u_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial(gh)}{\partial q^2} &= 0, \\ \frac{\partial(hD)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^1} \left(hD \frac{\partial u_1}{\partial H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(hD \frac{\partial u_2}{\partial H_2} \right) &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q^2}. \end{aligned}$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$ – скорость, h – возвышение свободной поверхности, q^1, q^2 – криволинейные координаты, g – ускорение силы тяжести H_1 и H_2 – коэффициенты Ламе, $D = H_1 H_2$, $f = f(q^1, q^2)$ – функция Кориолиса.

Приведенные уравнения справедливы для произвольной достаточно гладкой поверхности, что позволяет использовать их при описании сложных рельефов, в частности, учитывать, что поверхность Земли является геоидом.

В простейшем случае плоской поверхности (классический вариант уравнений мелкой воды) имеем ($x = q^1$, $y = q^2$, $H_1 = H_2 = 1$, $u = u_1$, $v = u_2$) [5]

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial(gh)}{\partial x} - bu = 0, \quad \frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial(gh)}{\partial y} - bv = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0,$$

где функция Кориолиса $f = f(x, y)$ аппроксимирована либо константой $f = f_0$ (f -плоскость), либо линейной функцией $f = f_0 + \beta y$ (бета-плоскость); b – коэффициент вязкого сопротивления.

Обратим внимание, что коэффициент вязкого сопротивления отсутствует в классических уравнениях и в [5, 6, 9]. Возможность учета вязкого сопротивления обсуждается, в частности, в [8].

Основным объектом исследования в работе являются уравнения в приближении бета-плоскости, которые записываются в форме [5]:

$$\begin{aligned} L \frac{du}{dt} - \left[2\Omega_0 \frac{L}{a} Lm + (1 + \delta) \frac{L^2}{a^2} mu \right] v + (1 + \delta) \frac{\partial(gh)}{\partial l} - \frac{bu}{L} &= 0, \\ L \frac{dv}{dt} + \left[2\Omega_0 \frac{L}{a} Lm + (1 + \delta) \frac{L^2}{a^2} mv \right] u + (1 - \varepsilon) \frac{\partial(gh)}{\partial m} - \frac{bv}{L} &= 0, \\ L \frac{\partial h}{\partial t} + (1 + \delta) \frac{\partial(hu)}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial m} ((1 - \varepsilon)hv) &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{L} \left(L \frac{\partial}{\partial t} + (1 + \delta)u \frac{\partial}{\partial l} + (1 - \varepsilon)v \frac{\partial}{\partial m} \right). \end{aligned}$$

Здесь использованы безразмерные координаты l , m , связанные с долготой $\lambda = q^1$ и широтой $\varphi = q^2$: $l = (a/L)\lambda$ и $m = (a/L)\sin \varphi$, где L – характерный масштаб движений, a – радиус сферы, $f = 2\Omega_0 \sin \varphi$, Ω_0 – угловая скорость вращения.

В случае $L \ll a$ имеем малый параметр L/a и вспомогательные малые

функции $\varepsilon \approx \frac{L^2 m^2}{2a^2} + \frac{L^4 m^4}{8a^4}$, $\delta \approx \frac{L^2 m^2}{2a^2} + \frac{3L^4 m^4}{8a^4}$.

2. Численная реализация МКЭ

Приведем схему реализации МКЭ, используя для сокращения выражений уравнения мелкой воды на плоскости. На интервале времени $[0, T]$ зададим $t_m = m\tau$, где τ – шаг по времени. Введем обозначения $u^m(X) = u(X, t_m)$, $v^m(X) = v(X, t_m)$, $h^m(X) = h(X, t_m)$, $X = (x, y)$. Для аппроксимации производных по времени используем полуявные схемы [2–4]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(X,t)\Big|_{t=t_m} &\equiv \frac{d}{dt}u^m(X) \approx \frac{u^{m+1}(X) - u^m(X)}{\tau} + u^m(X) \frac{\partial u^{m+1}(X)}{\partial x} + v^m(X) \frac{\partial u^{m+1}(X)}{\partial y}, \\ \frac{d}{dt}v(X,t)\Big|_{t=t_m} &\equiv \frac{d}{dt}v^m(X) \approx \frac{v^{m+1}(X) - v^m(X)}{\tau} + u^m(X) \frac{\partial v^{m+1}(X)}{\partial x} + v^m(X) \frac{\partial v^{m+1}(X)}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial t}h(X,t)\Big|_{t=t_m} &\equiv \frac{\partial}{\partial t}h^m(X) \approx \frac{h^{m+1}(X) - u^m(X)}{\tau}.\end{aligned}$$

Тогда полуневявная аппроксимация уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{du^m}{dt} - fv^{m+1} + \frac{\partial(gh^{m+1})}{\partial x} - bu^{m+1} &= 0, \\ \frac{dv^m}{dt} + fu^{m+1} + \frac{\partial(gh^{m+1})}{\partial y} - bv^{m+1} &= 0, \\ \frac{\partial h^m}{\partial t} + \frac{\partial(hu^{m+1})}{\partial x} + \frac{\partial(hv^{m+1})}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Для применения МКЭ используем слабую формулировку задачи, которая получена умножением уравнений на тестовые функции $g_u(X)$, $g_v(X)$, $g_h(X)$ с последующим интегрированием по области D , применением формулы интегрирования по частям и учетом краевых условия на границе ∂D

$$\begin{aligned}\iint_D g_u \left(\frac{du^m}{dt} - fv^{m+1} + \frac{\partial(gh^{m+1})}{\partial x} - bu^{m+1} \right) dx dy + \iint_D g_v \left(\frac{dv^m}{dt} + fu^{m+1} + \frac{\partial(gh^{m+1})}{\partial y} - bv^{m+1} \right) dx dy + \\ + \iint_D g_h \left(\frac{\partial h^m}{\partial t} + \frac{\partial(hu^{m+1})}{\partial x} + \frac{\partial(hv^{m+1})}{\partial y} \right) dx dy = 0.\end{aligned}$$

Здесь для простоты предполагается, что заданные краевые условия приводят к исчезновению интегралов по границе области ∂D .

3. Вычислительный эксперимент

Основная цель вычислительного эксперимента – сравнение результатов решения задачи для различных моделей мелкой воды. В качестве начальных данных

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad h|_{t=0} = h_0(x)$$

в частности, выбиралось вращательное течение с дрейфом центра вращения и локализованным возмущением свободной поверхности типа «горб» – «яма»

$$u_0 = -\alpha(\varphi_0 - \varphi) + S_u, \quad v_0 = \alpha(\lambda_0 - \lambda) + S_v,$$
$$h_0 = H_0 \cos(\gamma_1 \sqrt{R}) \exp(\gamma_2 R), \quad R^2 = (\varphi_0 - \varphi)^2 + (\lambda_0 - \lambda)^2,$$

где α , S_u , S_v задают интенсивность и дрейф вращения с центром в точке (λ_0, φ_0) , параметры H_0 , γ_1 , γ_2 характеризуют возмущение свободной поверхности и степень локализации.

Вычисления проводились в окрестности точки с координатами $\lambda_0 \approx 39^\circ$, $\varphi_0 \approx 47^\circ$ с характерным размером области $L=1$ для параметров $\Omega_0=10$, $a=10$, $b=10$. Для расчетов использовались кусочно-квадратичные конечные элементы и триангуляция области с характерным относительным размером треугольников 0.005. Компьютерный эксперимент показал, что предложенная схема аппроксимации и МКЭ позволяют проводить расчеты на достаточно большом интервале времени порядка $O(1)$ с относительной погрешностью 10^{-3} . При использовании быстрых алгоритмов решения систем линейных уравнений (см., например [7]), требующихся для численной реализации МКЭ, скорость вычислений существенно увеличивается.

Для указанных начальных данных с течением времени происходит разрушение начального возмущения свободной поверхности. В среднем для всех моделей получаются примерно одинаковые сценарии эволюции течения и возмущения свободной поверхности. Регулярная структура возмущения сохраняется на интервале времени $0 < t \leq 0.2$ и начинает достаточно быстро разрушаться при $t > 0.2$. Для неподвижного центра вращения ($S_u = 0$, $S_v = 0$) времени сохранения регулярной структуры увеличивается. Параметры α , γ_0 , γ_1 , γ_2 варьировались в окрестности значений $\alpha = 0.1$, $\gamma_0 = 0.005$, $\gamma_1 = 30$, $\gamma_2 = -1000$ и их изменения (примерно на 100 процентов) слабо влияют на эволюцию структуры возмущения. Выбор для проведения расчетов

различных моделей оказывает существенное влияние лишь на этапах эволюции при $t > 0.2$. Например, разрушение возмущения свободной поверхности в случае использования модели для касательной плоскости или модели для бета-плоскости происходит примерно в два раза медленнее, чем в случае использования модели для сферы, что естественно связано с учетом кривизны поверхности. В заключение приведем рисунок, демонстрирующий распад начального возмущения для модели бета-плоскости.

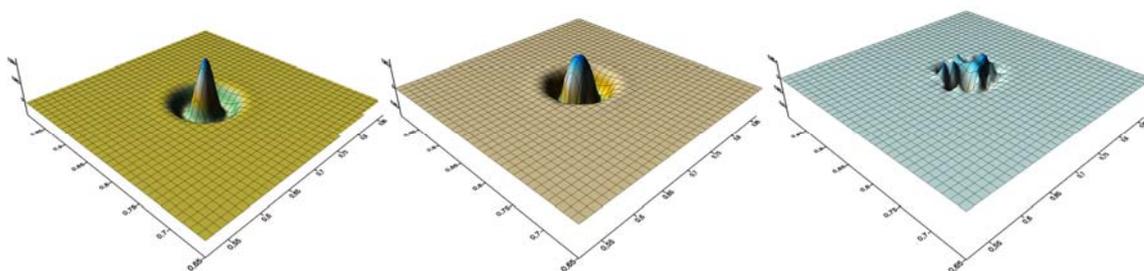


Рис. 1. Поверхность $h = h(\lambda_0, \sin \varphi_0)$ для моментов $t = 0$, $t = 0.2$, $t = 0.3$

3. Заключение

Анализ результатов показывает, что все три модели, описывающие поведение мелкой воды, с начальным распределением, соответствующим вихревому течению и локализованному возмущению свободной поверхности, на сравнительно малых интервалах времени демонстрируют примерно одинаковое поведение. Различие моделей сказывается лишь на эволюцию структуры возмущений для больших времен. МКЭ успешно применим к рассмотренному классу задач и позволяет проводить стабильные вычисления на достаточно большом интервале времени. Метод позволяет эффективно предотвратить паразитные дисперсионные эффекты и эффекты сеточной вязкости.

Литература

1. Сухинов А. И., Белова Ю. В. Математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в движущейся турбулентной водной среде

в задачах динамики планктонных популяций // Инженерный вестник Дона. 2015. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3182.

2. Hecht, F. FreeFem++. Third Edition, Version 3.40. 2015. URL: freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf

3. Hecht F. New development in FreeFem++ // J. Numer. Math. 20. No. 3–4, 2012.

4. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008.

5. Медведев С.Б. Геометрические приближения для уравнений вращающейся мелкой воды // Вычислительные технологии. 2013. Т. 125, № 1.

6. Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. Вывод и общие свойства // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 2.

7. Stefani F., Xu M., Sorriso-Valvo L., Gerbeth G., Gunter U. Oscillation or rotation: a comparison of two simple reversal models // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. Vol. 101, no. 3–4. pp.227–248.

8. Должанский Ф. В. Лекции по геофизической гидродинамике. М.: ИВМ РАН, 2006.

9. Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part I. The Shallow Water Equations // arXiv:1410.2832. 2014. 19 p.

10. Есаулов В. А. Итерационный метод решения системы линейных уравнений с использованием вейвлет-фильтров // Инженерный вестник Дона, 2015, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3372.

References

1. Suhinov A. I., Belova Yu. V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3182



2. Hecht F. FreeFem++. Third Edition, Version 3.40. 2015. URL: freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf
3. Hecht F. J. Numer. Math. 20. No. 3–4. 2012.
4. Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. Ispolzovanie paketa konechnykh ehlementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, ehlektroforeza i biologii [Using the finite element package FreeFem ++ for hydrodynamics problems, electrophoresis and biology]. Rostov n/D: Izd-vo SFU, 2008.
5. Medvedev S.B. Vychislitelnye tekhnologii. 2013. T. 125, № 1.
6. Cherevko A.A., Chupahin A.P. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2009. T. 50. № 2.
7. Stefani F., Xu M., Sorriso-Valvo L., Gerbeth G., Gunter U. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. Vol. 101, no. 3–4. pp.227–248.
8. Dolzhanskiy F.V. Lekcii po geofizicheskoy gidrodinamike [Lectures on geophysical hydrodynamics]. M.: IVM RAN, 2006.
9. Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu. Curro C., Fusco D., Manganaro N. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. The Shallow Water Equations. arXiv:1410.2832. 2014. 19 pp.
10. Esaulov V. A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2015. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3372.