Связи между температурами внутри многомерных тел, прогреваемых радиацией

В.В. Иванов, Л.В. Карасева

Донской государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры, Ростов – на – Дону

Аннотация: Представлена схема расчета нестационарных температур в прогреваемых радиацией телах на основе установленных зависимостей между ними. Для исследования процесса радиационного прогрева тел используется линеаризующее преобразование, с помощью которого нелинейные граничные условия приводятся к линейной форме третьего рода. Предложенные формулы позволяют рассчитывать температурные поля в многомерных телах, если известно распределение температуры вдоль координатных осей или на поверхности. При этом нет необходимости знать физические параметры материала и степень черноты поверхности тела.
Ключевые слова: Температурное поле, радиационный нагрев, линеаризующее преобразование, линейные граничные условия третьего рода.

В работе [1] показаны связи между нестационарными температурами внутри тела с распределением температуры вдоль координатных осей при линейных граничных условиях третьего рода. Эти связи имеют большие практические приложения, так как дают возможность определить тепловое состояние нагреваемого объекта по температурам, замеренным в небольшом числе точек объема тела. Особую ценность полученные зависимости представляют тогда, когда необходимо знать температурное поле по значениям его поверхностных температур, а к центральным точкам объема невозможно проникнуть с термодатчиком.

Зависимость [1], справедливая в стадии регулярного теплового режима, выполняется не всегда с заданной точностью при других стадиях тепловых процессов. В [2] дана формулировка условий, когда будет точно выполняться связь [1].

Используя идею работы [1], удалось получить закономерности, позволяющие «прослушивать» температурное поле внутри нагреваемых радиацией тел, если найдены температуры вдоль координатных осей, идущих перпендикулярно соответствующим поверхностям. Начало координат может быть расположено в любой точке объема.

Получение искомой закономерности будет показано на примере радиационного нагрева двухмерного тела с размерами $2R_1 \times 2R_2$ и начальной температурой θ_0.

Математическая постановка задачи в обобщенных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\Gamma}{X}\frac{\partial \theta}{\partial X} + b_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\ ; \tag{1}$$

$$\theta = \theta_0, \quad Fo = 0\ ; \tag{2}$$

$$\partial\theta / \partial X = 0, \quad X = 0; \tag{3}$$

$$\partial\theta / \partial Y = 0, \quad Y = 0; \tag{4}$$

$$\partial\theta / \partial X = Sk_1\,(1-\theta^4), \quad X = 1; \tag{5}$$

$$\partial\theta / \partial Y = Sk_2\,(1-\theta^4), \quad Y = 1. \tag{6}$$

Здесь

$$\theta_0 \le \theta = T / T_c < 1; \quad \theta = \theta(X, Y, Fo);$$

$$Fo = a\tau / R_1^2; \quad b_0^2 = R_1^2 / R_2^2;$$

$$X = x / R_1; \quad Y = y / R_2;$$

$$Sk_1 = \varepsilon_1\,\sigma_0\,T_c^3\,R_1 / \lambda; \quad Sk_2 = \varepsilon_2\,\sigma_0\,T_c^3\,R_2 / \lambda\ .$$

Для решения задачи (1) – (6) использован метод линеаризующих функций [3-6]. Не повторяя основных положений работ [3,4], будут приведены лишь окончательные результаты.

Линеаризующая функция

$$W=\exp(-m\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{1-\theta^4})=\exp\left[-\frac{m}{2}\left(Arth\,\theta+arctg\,\theta\right)\right],\qquad(7)$$

в которой m – корректирующий параметр, не изменяя условий симметрии (3), (4)

$$\partial W/\partial X=0,\quad X=0,\qquad(8)$$

$$\partial W/\partial Y=0,\quad Y=0,\qquad(9)$$

линеаризует граничные условия (5), (6), приводя их к линейным граничным условиям третьего рода:

$$\partial W/\partial X=-m\,Sk_1\,W;\quad X=1;\qquad(10)$$

$$\partial W/\partial Y=-m\,Sk_2\,W;\quad Y=1.\qquad(11)$$

Начальная температура (2) запишется тогда как

$$W=f_0\,(m,\theta_0\,)=W_0;\quad Fo=0,\qquad(12)$$

а уравнение теплопроводности (1) для новой переменной W примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial Fo}=\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\Gamma}{X}\frac{\partial W}{\partial X}+b_0^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+\psi\,(X,Y,Fo),\qquad(13)$$

где

$$\psi\,(X,Y,Fo)=m\,W\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^2+b_0^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right)\right]\frac{\left(4\theta^3-m\right)}{\left(1-\theta^4\right)^2}\,.\qquad(14)$$

Минимизация нелинейного комплекса (14) производится из условия $\psi\,(X,Y,Fo)\to 0$, когда $m\to 4\theta^3$. Учитывая, что θ в процессе нагрева меняется от θ_0 до 1, можно принять $\psi\approx 0$, когда $m=4\left[\left(\theta_0+1\right)/2\right]^3$. Чтобы повысить точность расчета, область изменения θ разбивалась на несколько интервалов, и для каждого интервала выбирался m_i по соотношению $m_i=4\theta_i^3$ [3,4].

Решение задачи для новой переменной $\psi(X,Y,Fo)$ при $\psi(X,Y,Fo)=0$, как показано в [7-9], находится путем перемножения соответствующих решений одномерных задач переноса.

Подстановка в (7) дает окончательное решение задачи (1) – (6).

В стадии упорядоченного температурного режима величина W при ψ =0 может быть выражена в форме [7-11]

$$W(x,y,Fo)=F(Fo)\,X(x)\,Y(y)\ . \qquad (15)$$

Так как $W=\exp\left[-\frac{m}{2}\left(Arth\,\theta+arctg\,\theta\right)\right]$, то

$$F(Fo)\,X(x)\,Y(y)=\exp\left\{-\frac{m}{2}\left[Arth\,\theta(x,y,Fo)+arctg\,\theta(x,y,Fo)\right]\right\}. \qquad (16)$$

Задаемся некоторыми фиксированными значениями координат $x = x_0$, а затем $y = y_0$. В результате получим

$$Y(y)=\frac{\exp\left\{-\frac{m}{2}\left[Arth\,\theta(x_0,y,Fo)+arctg\,\theta(x_0,y,Fo)\right]\right\}}{F(Fo)\,X(x_0)}\ ; \qquad (17)$$

$$X(x)=\frac{\exp\left\{-\frac{m}{2}\left[Arth\,\theta(x,y_0,Fo)+arctg\,\theta(x,y_0,Fo)\right]\right\}}{F(Fo)\,Y(y_0)}\ . \qquad (18)$$

Объединяя (15) – (18), после преобразований получим зависимость между температурами внутри тела и распределением температуры вдоль координат x_0, y_0:

$$Arth\,\frac{\theta(x,y,\,Fo)+\theta(x_0,y_0,\,Fo)}{1+\theta(x,y,\,Fo)\cdot\theta(x_0,y_0,\,Fo)}+arctg\,\frac{\theta(x,y,\,Fo)+\theta(x_0,y_0,\,Fo)}{1-\theta(x,y,\,Fo)\cdot\theta(x_0,y_0,\,Fo)}=$$

$$=Arth\,\frac{\theta(x_0,y,\,Fo)+\theta(x,y_0,\,Fo)}{1+\theta(x_0,y,\,Fo)\cdot\theta(x,y_0,\,Fo)}+arctg\,\frac{\theta(x_0,y,\,Fo)+\theta(x,y_0,\,Fo)}{1-\theta(x_0,y,\,Fo)\cdot\theta(x,y_0,\,Fo)}\ . \qquad (19)$$

На основе уравнения (19) можно найти ряд частных случаев, например:

$$Arth\,\frac{\theta(x,y,\,Fo)+\theta(0,0,\,Fo)}{1+\theta(x,y,\,Fo)\cdot\theta(0,0,\,Fo)}+arctg\,\frac{\theta(x,y,\,Fo)+\theta(0,0,\,Fo)}{1-\theta(x,y,\,Fo)\cdot\theta(0,0,\,Fo)}=$$

$$= Arth\,\frac{\theta(0,y,\,Fo)+\theta(x,0,\,Fo)}{1+\theta(0,y,\,Fo)\cdot\theta(x,0,\,Fo)} + arctg\,\frac{\theta(0,y,\,Fo)+\theta(x,0,\,Fo)}{1-\theta(0,y,\,Fo)\cdot\theta(x,0,\,Fo)}\quad. \qquad (20)$$

Аналогичные зависимости получаются для трехмерных тел. Следует подчеркнуть, что при использовании уравнений типа (19) совсем нет необходимости знать физические параметры материала, а также степень черноты поверхности тела и температуру греющей среды.

Выполненные расчеты, а также анализ ряда экспериментальных данных подтверждают теоретические уравнения (19), (20). В качестве примера рассмотрен радиационный разогрев квадратной заготовки 78 x 78 мм^2 в печи с температурой 1500ºС. В таблице приведено сравнение температур, определенных по уравнению (20), с экспериментальными и расчетными данными, полученными в работе [12].

Таблица

Значения относительных температур, полученных в [12]
и вычисленных по формуле (20)

Fo	θ(0, 0, Fo)			θ(0,795; 0,795; Fo)		θ(0; 0,795; Fo) = = θ(0,795; 0; Fo)	
	Согласно (20)	Опытные данные	Расчет	Опытные данные	Расчет	Опытные данные	Расчет
0,75	0,310	-	0,323	-	0,425	-	0,370
1,50	0,382	0,399	0,3795	0,514	0,532	0,455	0,444
2,25	0,4805	-	0,4705	0,661	0,655	0,576	0,571
3,00	0,588	0,584	0,553	0,729	0,728	0,656	0,656
3,75	0,637	-	0,635	0,818	0,800	0,735	0,729
4,5	0,714	0,717	0,718	0,878	0,876	0,808	0,793

Литература

1. Бойков Г.П. Закон связи между избыточными температурами тел конечных размеров // Инженерно-физический журнал. 1962. Т. №1. С. 107-109.

2. Логинов В.С. Приближенные методы теплового расчета активных элементов электрофизических установок. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

3. Иванов В.В. Исследование процессов переноса при нелинейных граничных условиях // Теплофизика высоких температур. 1973. Т. XI. № 1. С. 128-132.

4. Иванов В.В., Кореньков А.И. Решение задач тепломассопереноса при нелинейных граничных условиях // Изв. СКНЦ. ВШ. Технические науки. 1982. №2. С. 21-25.

5. Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А., Пономаренко А.С. Пограничные слои на стенках, подвергаемых с противоположной стороны нагреву конвекцией и радиацией одновременно // Инженерный вестник Дона, 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4188.

6. Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А. Теплообмен в пограничных слоях на излучающих поверхностях при градиентном течении // Инженерный вестник Дона, 2017, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4317.

7. Карлслоу Г.С., Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

8. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.

9. Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.

10. Lotkin M. The numerical of heat conduction equations // J. Math and Phys. 1958. Vol.37. № 2. pp.178-187.

11. Keramidas G.A., Edward C. Ting. Variational formulations for heat conduction problems // J. Appl. Phys. 1979. Vol.50. № 2. pp.673-677.

12. Портнов А.А. Исследование опытной секционной печи при нагреве квадратных заготовок // Сталь. 1965. № 4. С. 370-372.

References

1. Boykov G.P. Injenerno-fizicheskiy jurnal. 1962. vol. № 1. pp.107-109.

2. Loginov V.S. Priblijonnye metody teplovogo raschyota aktivnyh elementov elektrofizicheskih ustanovok [Approximate methods of thermal calculation of active elements of electrophysical installations]. Moscow, 2009. 272 p.

3. Ivanov V.V. Teplofizika vysokih temperatur. 1973. vol. XI, № 1. pp. 128-132.

4. Ivanov V.V., Korenkov A.I. Izvestiya SKNC. VSh. Tehnicheskie nauki. 1982. № 2. pp. 21-25.

5. Ivanov V.V., Karaseva L.V., Tihomirov S.A., Ponomarenko A.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4188.

6. Ivanov V.V., Karaseva L.V., Tihomirov S.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4317.

7. Carslaw H., Jaeger J. Teploprovodnost tvyordyh tel [Conduction of Heat in Solids]. Moscow, 1964. 487 p.

8. Lykov A.V., Mikhailov Yu.A. Teoriya teplo- i massoperenosa [Theory of heat and mass transfer]. Moscow, 1963. 536 p.

9. Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti [Analytical methods in the theory of thermal conductivity]. Moscow: ,1985. 480 p.

10. Lotkin M. J. Math and Phys. 1958. Vol.37. № 2. pp.178-187.

11. Keramidas G.A., Edward C. Ting. J. Appl. Phys. 1979. Vol.50. № 2. pp.673-677.

12. Portnov A.A. Stal. 1965. № 4. pp. 370-372.