

Многофакторная модель измерения производительности труда

М.А. Масыч, И.С. Богомолова, Е.В. Жертовская, Е.К. Задорожная

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Проведен анализ и систематизация методов оценки многофакторной производительности труда; построена многофакторная модель измерения производительности труда в сферах материального и нематериального производства в системе региональных воспроизводственных пропорций.

Ключевые слова: производительность, результативность, труд, модель, воспроизводство, регион.

В глобализационных условиях экономики знаний одним из ведущих фактором развития региональных воспроизводственных систем становится труд [1, 2]. Специфические особенности труда в сферах материального и нематериального производства инициируют выработку новых подходов к оценке эффективности данного фактора производства в системе региональных воспроизводственных пропорций [3, 4]. Слабая изученность взаимосвязи эффективности труда и сбалансированного развития регионального воспроизводства, необходимость рассмотрения ряда теоретико-методологических и прикладных аспектов производительности и результативности труда в различных секторах экономики предполагает изучение форм, методов и технологий использования воспроизводственных пропорций как индикаторов процесса повышения эффективности труда [5-7].

Воспроизводственная пропорция региона между сферами материального и нематериального производства характеризуется их взаимодействием и взаимопроникновением, то есть конвергенцией, что отражает современные особенности регионального развития. В связи с этим особую актуальность приобретает исследование подходов к оценке эффективности данных секторов. Наибольший интерес вызывают вопросы разделения труда на производительный и непроизводительный, пропорциями воспроизводства между материальным и нематериальным производством.

Характеристика видов производительности, соответствующих требованиям рыночного ведения хозяйственной деятельности представлена в таблице №1.

Таблица №1

Виды производительности в рыночной экономике [8]

Виды производительности	Характеристика	Расчет
Совокупная факторная производительность	Эффективность использования всех введенных ресурсов	Объем реализованной продукции/все элементы затрат (V/Z)
Многофакторная производительность	Эффективность использования суммы выборочных ресурсов	$V/Z_m + Z_m$; $V/Z_k + Z_k$; $V/Z_k + Z_m$
Частная производительность	Эффективность использования одного вида ресурсов	V/Z_m ; V/Z_k ; V/Z_m ; V/Z_{mi}
Производительность совокупного труда	Эффективность использования живого и прошлого труда	$ДС / (Z_m + Z_k + Z_m)$

Примечание: V – объем реализованной продукции; Z_m – затраты живого труда; Z_k – затраты основного капитала; Z_m – материальные затраты; Z_{mi} – отдельные виды материальных затрат; $ДС$ – добавленная обработкой стоимость.

Особую значимость в экономической науке в целом и экономике труда в частности приобретают исследования проблем измерения уровня многофакторной производительности. Для этого применяется различный спектр экономико-математических моделей. Рассмотрим в таблице №2 наиболее распространенные и имеющие высокую теоретико-практическую значимость.

Производительность труда является одним из основных факторов развития региона и страны в целом. В связи с этим представляется необходимым разработать многофакторную модель измерения производительности труда в сферах материального и нематериального производства в системе региональных воспроизводственных пропорций.

Таблица №2

Подходы и модели оценки производительности труда [8-11]

Название модели	Суть модели
1. Индекс многофакторной производительности Д. Кендрика	$\Delta = \frac{Y}{\alpha K + (1 - \alpha)L}$ <p>где Δ - уровень многофакторной производительности; Y - валовой внутренний продукт; α - доля капитала в валовом внутреннем продукте; $(1-\alpha)$ - доля труда в этом продукте; K - объем используемого капитала; L - объем используемого труда.</p>
2. Индекс многофакторной производительности Д. Черникова	$\Delta = \frac{Y}{L + \pi K}, \pi = \frac{L_0}{K_0} Y$ <p>где π - коэффициент замещения живого труда; Y - коэффициент эластичности производительности труда по его фондовооруженности, показывающий, на сколько процентов растет производительность труда при росте фондовооруженности последнего на один процент.</p>
3. Производственная функция	$Y = AX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$ <p>где Y - конечный продукт; A - параметр, играющий двоякую роль: характеризует долю неучтенных в модели факторов и обеспечивает приведение к единой размерности всех факторов; X_1, X_2, X_n - важнейшие факторы производства; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ - коэффициенты эластичности, характеризующие степень воздействия факторных признаков на результативный. Сумма коэффициентов эластичности может быть больше, меньше или равна 1.</p>
4. Производственная функция Кобба - Дугласа	$Y = AL^{\alpha} K^{\beta}$ <p>где L - объем трудовых ресурсов; α - коэффициент эластичности труда; K - объем основного капитала; β - коэффициент эластичности капитала. В данной модели $\alpha + \beta = 1$.</p>
5. Усовершенствованная функция Кобба-Дугласа Я. Тинбергенем	$Y = AL^{\alpha} K^{\beta} e^{nt}$ <p>где e - основание натуральных логарифмов; n - коэффициент эластичности фактора НТП, т.е. параметр приростной совокупной эффективности факторов (данная величина и характеризует показатель многофакторной производительности как темп прироста выпуска продукции в дополнение к приросту, обусловленному экстенсивными факторами); t - период, для которого определяются параметры роста.</p>

Окончание таблицы №2

Название модели	Суть модели
<p>6. Многофакторная модель измерения производительности (МФМИП) Американского центра производительности</p>	$\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i1} P_{i1}}{I_{ij1} P_{ij1}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n Q_{i2} P_{i1}}{I_{ij2} P_{ij1}},$ <p>где Q_{i1} и Q_{i2} - объемы i-го продукта в базисный и текущий периоды; P_{i1} - цена i-го продукта в базисный период; I_{ij1} и I_{ij2} - представляют последовательно затраты элемента i, фактора j и совокупности всех затрат в базисный и текущий периоды.</p> <p>Коэффициенты в базисный период измеряют реальные экономические процессы в этот период, в них используются сформировавшиеся в одних и тех же условиях совместные объемы продукции и затрат, а также их цены. В коэффициентах текущего периода продукция и затраты соответствуют одному уровню, а веса (цены) - другому уровню производительности. Сравнением последних в двух периодах определяется изменение физического объема продукции на единицу реального ресурса, фактора производства и совокупности реальных затрат.</p> <p>В результате рассчитывается общий динамический индекс производительности:</p> $\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i2} P_{i1}}{\sum_{i=1}^n Q_{i1} P_{i1}} / \frac{I_{ij2} P_{ij1}}{I_{ij1} P_{ij1}}.$

В настоящее время в большинстве регионах ЮФО наблюдается положительная тенденция роста производительности труда, что представлено в таблице №3, но, несмотря на это, ЮФО в целом отстает по данному показателю от других регионов и в среднем по России, что актуализирует разработку многофакторной модели измерения производительности труда с учетом специфики структуры региональных воспроизводственных пропорций.

Проведем корреляционно-регрессионный анализ на основе приведенных статистических данных за 2012г. и попытаемся построить многофакторную линейную модель производительности труда от остальных приведенных факторов. Исходные данные для построения модели приведены в таблице №4.

Таблица №3

Производительность в среднем по экономике регионов ЮФО, рублей
на одного занятого [12]

Регион ЮФО	2011	2012	Динамика производительности труда, % (2012/2011г.)
Средняя производительность по РФ	808269	864376	106,9
Ростовская обл.	546650	614066	112,3
Волгоградская обл.	1018990	974563	95,6
Краснодарский край	747293	884509	118,4
Астраханская обл.	271960	338749	124,6
Респ. Калмыкия	85993	92124	107,1
Респ. Адыгея	197373	249343	126,3

Таблица №4

Исходные данные для построения многофакторной модели

Регион ЮФО	Среднего- довая числен- ность занятых в экономик е (тыс.чел.)	Среднемесяч- ная номинальная начисленная з/п работников организаций (руб.)	Величина прожиточ- ного минимума (руб.)	Стоимость основных фондов по учётной стоимости (млн.руб.)	Иннова- ционная активность предприя- тий в %	Производитель- ность труда в среднем по экономике (руб.)
Ростовская обл.	442,5	19189,4	6233	1880445	8,7	614066
Волгоградс- кая обл.	1252,9	18583,7	6474	1462441	7,1	974563
Краснодарск ий край	2328,3	21409,2	6332	2721779	7,4	884509
Астраханска я обл.	442,5	19522,1	5822	808160	5,8	338749
Респ. Калмыкия	113	15040,7	5722	113022	1,2	92124
Респ. Адыгея	152	16715,2	5525	136241	6,8	249343

Построим корреляционную матрицу (таблица №5).

Таблица №5

Корреляционная матрица

1	0,769173916	0,737010611	0,85319888	0,404910992	0,82440039
0,769173916	1	0,658688099	0,880704568	0,721835593	0,73622064
0,737010611	0,658688099	1	0,851093031	0,522158462	0,939988182
0,85319888	0,880704568	0,851093031	1	0,648217408	0,849064702
0,404910992	0,721835593	0,522158462	0,648217408	1	0,672743739
0,82440039	0,73622064	0,939988182	0,849064702	0,672743739	1

Как видно из приведенной матрицы, данные не просто коррелированы, они сильно коррелированы. От этого нужно избавляться. Вначале переменные нормируем (вычтем среднее значение и полученную разность разделим на среднеквадратическое отклонение (СКО)) (таблица №6).

Таблица №6

Нормирование переменных

Нормированные переменные	x1	x2	x3	x4	x5	y
1	-0,44139	0,381085	0,619861	0,736878	1,064004	0,271561
2	0,592338	0,084911	1,314682	0,292683	0,392002	1,377652
3	1,9641	1,466519	0,905285	1,630926	0,518002	1,101345
4	-0,44139	0,543768	-0,56508	-0,40259	-0,154	-0,57318
5	-0,8617	-1,64754	-0,85339	-1,14128	-2,08601	-1,32988
6	-0,81195	-0,82874	-1,42136	-1,11661	0,266001	-0,8475

Далее перейдем к главным компонентам (таблица №7).

Таблица №7

Таблица главных компонент

z1	z2	z3	z4	z5
1,022644	0,882637	0,62533	0,315359	0,289895
1,174923	-0,34935	0,804655	-0,26484	-0,3251
2,96398	-0,68247	-0,68027	-0,13472	0,155864
-0,44658	0,383887	-0,56222	0,482723	-0,31577
-2,88448	-1,20733	0,154544	0,119501	0,152124
-1,83049	0,972631	-0,34204	-0,51802	0,042989

Собственные числа, соответствующие главным компонентам, следующие:

$$\lambda_1=3,8469596, \lambda_2=0,652981, \lambda_3=0,326373, \lambda_4=0,117232, \lambda_5=0,056454.$$

Последнюю главную компоненту придётся отбросить, потому что не обеспечивается минимальное число степеней свободы $n-k-1>0$, где $n=6$ субъектов округа, $k=5$ показателей.

Регрессию нормированной переменной y на главные компоненты z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 выполнить, в принципе, можно (коэффициенты регрессии следующие: $\beta_1=0,468076, \beta_2=-0,11026, \beta_3=0,477851, \beta_4=-0,60304, \beta_5=-0,75351$), но проверка на адекватность будет невозможна.

Ещё более разительно выглядят собственные числа ковариационной матрицы исходных, а не нормированных переменных: $\lambda_1=8,85558E+11, \lambda_2=943938,6, \lambda_3=166354,7, \lambda_4=28415,87, \lambda_5=2,131682$. Такие значения говорят о том, что пятая главная компонента действительно должна быть отброшена, так как соответствующее ей собственное число в $10^4 \div 10^6$ раз меньше собственных чисел, соответствующих четвёртой, третьей и второй компонентам. А то, что сами собственные числа, соответствующие второй, третьей и четвёртой компонентам, в $10^5 \div 10^7$ раз меньше собственного числа, соответствующего первой компоненте, предварительно говорит о том, что, вероятно, придётся отбросить и эти компоненты, оставив только первую главную компоненту. Кстати, на практике так чаще всего и выходит. Дело в том, что при таких собственных числах, учёт главных компонент, кроме первой, не увеличит точность модели, но увеличит ошибки модели.

Для дальнейшего понадобится сумма квадратов значений нормированной переменной y :

$$Q_y = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = n = 6.$$

Проверка адекватности модели линейной регрессии на четыре главные компоненты

Оценками коэффициентов линейной регрессии на главные компоненты z_1, z_2, z_3, z_4 являются: $\beta_1=0,468076, \beta_2=-0,11026, \beta_3=0,477851, \beta_4=-0,60304$.

Остаточная сумма квадратов $Q_\varepsilon = Q_y - Q = 0,192321$,

$$\text{где } Q = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = 5,807678897.$$

Предположим, что ошибки наблюдений независимы, имеют равные дисперсии и нормально распределены. В этом случае можно проверить гипотезу $H_0: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$. Эта гипотеза позволяет установить, находятся ли переменные z_1, z_2, z_3, z_4 во взаимосвязи с y . Статистикой критерия для проверки гипотезы является отношение $F = \frac{Q/k}{Q_\varepsilon/(n-k-1)}$, где в данном случае $n=6, k=4$. Если выборочное значение этой статистики $F_s > F_{1-\alpha}(k, n-k-1)$, то гипотеза H_0 отклоняется. В данном случае $F_s = 7,549456 < F_{0,9}(4,1) = 55,83$ (здесь и далее в качестве доверительной вероятности выбрано значение 0,9) следует считать, что взаимосвязи y с переменными z_1, z_2, z_3, z_4 нет. Ещё раз подчеркнём, что если в дальнейшем окажется, что взаимосвязи y с переменными z_1, z_2, z_3, z_4 нет, а взаимосвязь y с переменной z_1 есть, то это означает, что ошибка, вносимая главными компонентами z_2, z_3, z_4 , не позволяет на фоне этой ошибки установить взаимосвязь с главной компонентой z_1 .

Проверка адекватности модели линейной регрессии на три главные компоненты

Оценками коэффициентов линейной регрессии на главные компоненты z_1, z_2, z_3 являются: $\beta_1=0,468076, \beta_2=-0,11026, \beta_3=0,477851$.

Остаточная сумма квадратов $Q_\varepsilon = Q_y - Q = 0,448116$,

$$\text{где } Q = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 5,55188441.$$

Проверим гипотезу $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. В данном случае $n=6$, $k=3$, $F_s = 8,259602 < F_{0,9}(3,2) = 9,16$ следует считать, что взаимосвязи y с переменными z_1, z_2, z_3 нет.

Проверка адекватности модели линейной регрессии на две главные компоненты

Оценками коэффициентов линейной регрессии на главные компоненты z_1, z_2 являются: $\beta_1 = 0,468076$, $\beta_2 = -0,11026$.

Остаточная сумма квадратов $Q_\varepsilon = Q_y - Q = 0,895263$,

$$\text{где } Q = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 5,104736687.$$

Проверим гипотезу $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$. В данном случае $n=6$, $k=2$, $F_s = 8,5529082 > F_{0,9}(2,3) = 5,46$ гипотеза H_0 отклоняется.

Границами доверительных интервалов для параметров β_1 и β_2 являются:

$$\beta_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-k-1)s\sqrt{a_{jj}}, \quad j = 1; 2,$$

где $t_{1-\alpha/2}(n-k-1) = t_{0,95}(3) = 2,353$, $s = \sqrt{Q_\varepsilon / (n-k-1)} = 0,546279328$, a_{jj} –

диагональный элемент матрицы $\left(\begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 23,0817576 & 0 \\ 0 & 3,917885647 \end{pmatrix}$,

то есть:

$$0,200487 < \beta_1 < 0,735666, \quad -0,75975 < \beta_2 < 0,539242.$$

Далее необходимо решить вопрос о целесообразности включения переменной z_1 или z_2 в модель. Для этого проверяются гипотезы $H_0^{(i)}: \beta_j = 0$,

$j=1;2$. Очевидно, что гипотезы могут быть проверены непосредственно по доверительным интервалам для параметров β_1 и β_2 : если доверительный интервал для $\beta_j=0, j=1;2$ накрывает нуль, то гипотеза $H_0^{(j)}: \beta_j=0$ принимается. В противном случае $H_0^{(j)}$ отклоняется.

Доверительный интервал для параметра β_1 не накрывает нуль, следовательно, переменная z_1 значима. Доверительный интервал для параметра β_2 накрывает нуль, следовательно, переменная z_2 может быть исключена из рассмотрения.

Коэффициент множественной корреляции, характеризующий отклонение результатов наблюдений от линейной регрессионной модели равен $R = \sqrt{Q/Q_y} = 0,922382$.

Таким образом, модель линейной регрессии на главные компоненты следующая $y = \beta_1 z_1 = 0,468076 z_1$.

Возвращаясь из пространства главных компонент в пространство исходных переменных, получим: $\beta_0 = -1599963, \beta_1 = 86,28938, \beta_2 = 35,10629, \beta_3 = 193,9349, \beta_4 = 0,080399, \beta_5 = 24103,23$.

Модель линейной регрессии на исходные переменные имеет вид:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 = \\ = -1599963 + 86,28938 x_1 + 35,10629 x_2 + 193,9349 x_3 + 0,080399 x_4 + 24103,23 x_5.$$

Таблица №8

Сопоставление фактических и модельных данных

Производительность труда в среднем по экономике (руб.)	Модель
614066	681568,7596
974563	704799,8022
884509	977730,0579
338749	457431,2884
92124	85516,81524
249343	246307,2766

Для сравнения приведём коэффициенты линейной регрессии на коррелированные переменные

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 =$$
$$= -4134890 + 233,1353x_1 - 7,6929x_2 + 746,2578x_3 - 0,18247x_4 + 55760,36x_5.$$

Но, несмотря на блестящее совпадение с имеющимися данными, проверки на адекватность такая модель не пройдёт. Это говорит о том, что зависимости между представленными переменными имеются, то есть приведенные факторы оказывают влияние на производительность труда, но эта зависимость имеет нелинейный характер. Таким образом, необходимо проверять модель на нелинейные виды зависимостей (квадратическая, кубическая, экспоненциальная и пр.), что может быть проведено в дальнейших исследованиях по данной тематике.

Литература

1. Карпушин Е.С. Актуальность научной категории «труд» в вопросе экономического развития России // Инженерный вестник Дона, 2014, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2525.
2. Xu Y. Functioning, capability and the standard of living – an axiomatic approach. *Economic Theory*. 2002. Т. 20. № 2. pp. 387-399.
3. Konovalova M.E., Balashova O.J. Assessment of economic growth and its dependence on population employment // *Fundamental research*, №4, 2013 г. pp. 940-944.
4. Масыч М.А., Каплюк Е.В. Анализ влияния показателей обновления основных фондов и заработной платы на рост производительности труда // *Экономика и менеджмент инновационных технологий*. 2014. № 11. URL: <http://ekonomika.snauka.ru/2014/11/6428> (дата обращения: 11.05.2015).

5. Богомолова И.С., Жертовская Е.В., Задорожная Е.К., Масыч М.А. Модель прогнозирования динамики воспроизводственных пропорций на региональном уровне: когнитивный подход // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2703

6. Масыч М.А., Каплюк Е.В. Занятость населения как фактор экономического развития территории // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2621

7. Богомолова И.С., Жертовская Е.В., Масыч М.А., Задорожная Е.К. Характеристика пропорций воспроизводства региона и факторов, влияющих на их изменения // Современные проблемы науки и образования, 2014, №6.

8. Кучина Е.В. Современные подходы к измерению и оценке производительности совокупного труда // Вестник Курганского государственного университета. – 2007. – № 2 (10).

9. Черников Д. Макроэкономическая теория (учебник для экономических вузов)// Российский экономический журнал, 1993, №7.

10. Трунин С.Н. Экономика труда / Учебник. М.: 2009. – 496 с.

11. Скотт Д. Синк Управление производительностью: планирование, измерение и оценка, контроль и повышение / Прогресс, 1989. 522 с.

12. http://www.raexpert.ru/rankingtable/?table_folder=/rating_regions/work2013/tab02

References

1. Karpushin E.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, № 3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2525.

2. Xu Y. Functioning, capability and the standard of living – an axiomatic approach. Economic Theory. 2002. T. 20. № 2. pp. 387-399.

3. Konovalova M.E., Balashova O.J. Assessment of economic growth and its dependence on population employment // Fundamental research, №4, 2013 г. pp. 940-944.



4. Masych M.A., Kapljuk E.V. Jekonomika i menedzhment innovacionnyh tehnologij. 2014. № 11. URL: <http://ekonomika.snauka.ru/2014/11/6428> (accessed: 11.05.2015)

5. Bogomolova I.S., Zhertovskaya E.V., Zadorozhnyaya E.K., Masych M.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2703.

6. Masych M.A., Kapljuk E.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2621.

7. Bogomolova I.S., Zhertovskaya E.V., Zadorozhnyaya E.K., Masych M.A. Sovremennye problemi nauki i obrazovaniy, 2014, №6.

8. Kuchina E.V. Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta, 2007, № 2 (10).

9. Chernikov D. Rossiiskiy ekonomicheskij jurnal, 1993, №7.

10. Trunin S.N. Ekonomika truda [Labour Economics], 2009, 496 p.

11. Skott D. Sink Upravlenie proizvoditelnost'yu: planirovanie, izmerenie i ocenka, control i povishenie [Performance management: planning, measurement and evaluation, monitoring and improvement], 1989, 522 p.

12. http://www.raexpert.ru/rankingtable/?table_folder=/rating_regions/work 2013/tab02