

Расчет напряженно-деформированного состояния основания в области карстового провала

А.Н. Шебуняев, И.М. Юдина

Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: в статье приводится решение задачи о напряженно-деформированном состоянии основания в области карстового провала. Рассматривается задача в линейной постановке для слоя ограниченной мощности, ослабленного цилиндрическим вырезом. Решение получено в полиномах на основе применения функций напряжений Соляника-Красса, удовлетворяющих дифференциальному уравнению квазигармонического типа. Основная задача решалась на основе использования принципа суперпозиции. Проверка полученного решения проведена на основе сравнение компонентов тензора напряжений и перемещений с результатами численных решений. Рассматривались графики, построенные с помощью математического комплекса Mathcad и программного комплекса Plaxis. Их анализ показал хорошую сходимость результатов.

Ключевые слова: карст, цилиндрическая полость, напряжения, перемещения, изополя, линейная постановка, смешанная задача.

1. Введение

Вопросы проектирования фундаментов зданий и сооружений в зонах карстово-суффозионной опасности приобретают особую важность в связи со значительным увеличением количества опасных явлений, связанных с оседаниями и провалами дневной поверхности земли [1-4]. Критический анализ геологических условий площадки строительства и предупреждение подобных проявлений является важнейшей задачей геомеханики. Для ее решения необходимо рассмотрение задач, представленных в данной статье.

2. Постановка задачи

Гибкая нагрузка интенсивностью p_0 приложена к невесомому слою мощностью H с деформационными характеристиками грунта E , и ν . Слой ослаблен цилиндрической полостью диаметром $2b$, распространяющейся на всю глубину H . Снизу слой имеет ограничение перемещений в вертикальном направлении.

Толщина слоя H выбирается исходя из инженерно-геологических условий площадки строительства и соответствует мощности пород, перекрывающих

карстующие породы. Диаметр провала $2b$ согласно п.6.12.12 (СП 22.13330.2016) принимается по результатам расчета.

Расчетная схема задачи представлена на Рис.1.

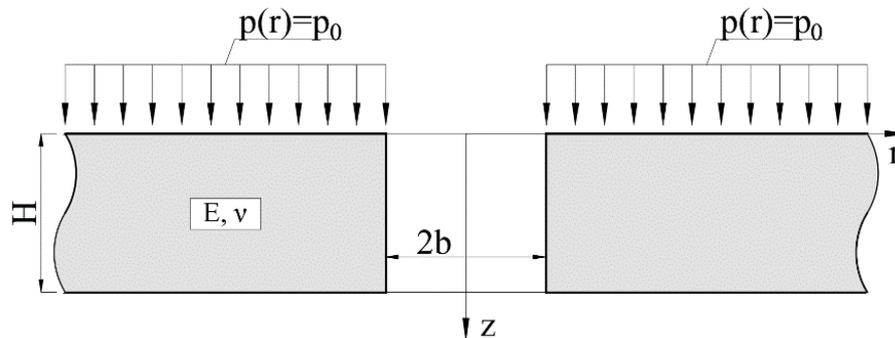


Рис.1 Основная расчетная схема

Граничные условия – следующие (1):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \\ \sigma_z(r, 0) &= p_0 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} b \leq r < \infty \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(b, z) &= 0 \\ \tau_{rz}(b, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} r = b \\ 0 \leq z \leq H \end{cases} \quad (1)$$
$$w(r, H) = 0 \text{ при } \begin{cases} b \leq r < \infty \\ z = H \end{cases}$$

Данная задача является смешанной [5-7], так как представлены как статические граничные условия (напряжения на верхней горизонтальной и цилиндрической поверхностях), так и кинематические граничные условия (отсутствие вертикальных перемещений по нижней горизонтальной поверхности слоя).

С точки зрения удобства, решение задачи можно представить в виде линейной комбинации двух вспомогательных задач по следующим схемам (Рис.2).

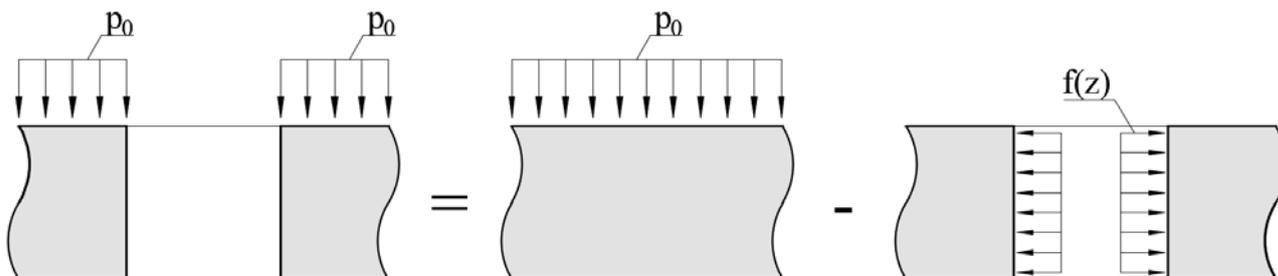


Рис.2. Схемы для вспомогательных задач

Ниже приводятся решения этих задач

3. Первая вспомогательная задача

Сплошной линейно-упругий слой мощностью H , нагружен гибкой равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p_0 по его верхней поверхности (Рис.3).

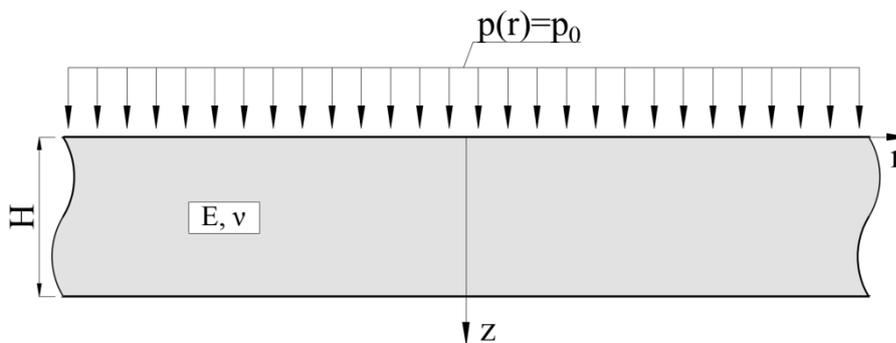


Рис.3 Расчетная схема сплошного слоя

Граничные условия для первой задачи представлены в виде (2):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) = 0 \\ \sigma_z(r, 0) = p_0 \end{aligned} \right\} \text{при} \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$w(r, H) = 0 \text{ при} \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ z = H \end{cases}$$

Решение данной задачи о напряженно-деформированном состоянии слоя можно получить достаточно просто без привлечения аппарата математической физики.

Вертикальные напряжения σ_z не являются функцией координат и принимают постоянное значение p_0 . Принимая во внимание отсутствие радиальных деформаций $\varepsilon_r = 0$ и равенство боковых напряжений $\sigma_r = \sigma_\varphi$, получаем значение боковых напряжений из физического уравнения [8] (Закон Гука), (3):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\varphi)] = 0 \rightarrow \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{\nu}{1-\nu} p_0 \quad (3)$$

Вертикальные деформации определяем по формуле (4):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] = \frac{\sigma_z}{E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) = \beta \frac{p_0}{E} \quad (4)$$

Интегрируя выражение для вертикальных деформаций по z , получаем уравнение для вертикальных перемещений (5):

$$w(z) = \int \varepsilon_z dz = w_0 + \frac{z\beta p_0}{E} \quad (5)$$

Из кинематических граничных условий $w|_{z=H}$ находим постоянную интегрирования w_0 и окончательное выражение для вертикальных перемещений (6):

$$w(z) = \frac{(H-z)\beta p_0}{E} \quad (6)$$

Таким образом, первая задача решена - найдены все 15 компонентов НДС (7):

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= p_0, & \sigma_r &= \sigma_\varphi = \frac{\nu}{1-\nu} p_0, \\
 \tau_{r\varphi} &= \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0, \\
 \varepsilon_z &= \beta \frac{p_0}{E}, & \varepsilon_r &= \varepsilon_\varphi = 0, \\
 \gamma_{r\varphi} &= \gamma_{\varphi z} = \gamma_{zr} = 0, \\
 w &= \frac{(H-z)\beta p_0}{E}, & v &= u = 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

4. Вторая вспомогательная задача

Слой мощностью H с вырезом диаметром $2b$, нагружен по цилиндрической поверхности нагрузкой $f(z)$, значение которой определяется из решения первой вспомогательной задачи и составляет:

$$f(z) = \frac{\nu}{1-\nu} p_0
 \tag{8}$$

Расчетная схема к данной задаче приведена на Рис.4.

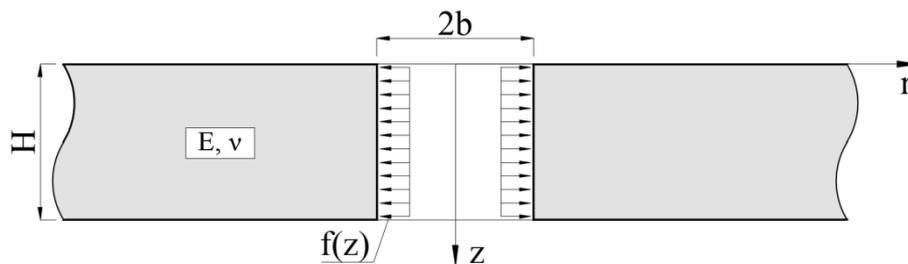


Рис.4 Расчетная схема слоя с цилиндрическим вырезом

Граничные условия для второй вспомогательной задачи имеют вид (9):

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \\
 \sigma_z(r, 0) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} b \leq r < \infty \\ z = -h \end{cases}
 \tag{9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r(b, z) &= f(z) \\
 \tau_{rz}(b, z) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} r = b \\ -h \leq z \leq h \end{cases}$$

$$w(r, H) = 0 \text{ при } \begin{cases} b \leq r < \infty \\ z = h \end{cases}$$

Решение задачи можно получить на основе применения функций напряжений, полученных для пространственных осесимметричных задач Соляником-Красса [9]. Для решения используется квазигармоническое уравнение вида (10):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

Задаемся двумя базовыми функциями напряжений θ и ψ , которые удовлетворяют уравнению (10). С их помощью получаем формулы для напряжений и перемещений (11):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= \frac{1}{2Gr} [\Phi + 2(1-\nu)\theta] \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2Gr} \frac{\partial}{\partial r} [\Phi + 2\nu\theta] \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \psi + z \frac{\partial \theta}{\partial z} \text{ или } \Phi = \psi - r \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ \Omega &= \frac{\Phi + 2(1-\nu)\theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Граничные условия для функции напряжений Φ следующие (13):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = r p_z \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = r(\Omega + p_r) \quad (13)$$

Наибольшей популярностью при решении квазигармонического уравнения (10) пользуются решения, полученные в полиномах и цилиндрических

функциях. Первые используются при решении относительно простых задач, когда нагружение тел вращения происходит по степенному закону. Решения в цилиндрических функциях используются для более сложного класса задач, например, когда нагрузка приложена локально в определенной области.

В рамках второй вспомогательной задачи граничные условия заданы достаточно просто, поэтому следует использовать решение в полиномах [10].

С учетом граничных условий и геометрии тела в качестве базовых функции напряжений θ и ψ принимаем следующие функции (14):

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, z) &= Ar^2 + B \\ \theta(r, z) &= Cr^2 + D \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и соответствующие им Φ и Ω (15):

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= Ar^2 + B \\ \Omega &= A - 2(1 + \nu)C + \frac{1}{r^2} [B + 2(1 - \nu)D] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Составляющие тензора напряжений и перемещений представлены следующими выражениями (16):

$$\sigma_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2A$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega = A + 2(1 + \nu)C - \frac{1}{r^2} [B + 2(1 - \nu)D]$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (Ar^2 + B) = 0 \quad (16)$$

$$u = \frac{1}{2Gr} [\Phi + 2(1 - \nu)\theta] = \frac{1}{2Gr} [Ar^2 + B + 2(1 - \nu)(Cr^2 + D)]$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2Gr} \frac{\partial}{\partial r} [\Phi + 2\nu\theta] = -\frac{1}{2Gr} [2Ar + 4\nu Cr]$$

Постоянные интегрирования A , B , C и D определяются из граничных условий рассматриваемой задачи (9).

Также следует отметить, что на цилиндрической поверхности ($r = b$) функция напряжений $\Phi = 0$, т.к. $p_z = 0$. В таком случае, получаем еще одно выражение для определения постоянных интегрирования (17):

$$\Phi|_{r=b} = Ab^2 + B = 0 \quad (17)$$

Выполнив граничные условия на верхней плоскости ($z = 0$), получаем следующие выражения (18):

$$\sigma_z|_{z=0} = -2A = 0 \rightarrow A = 0 \quad (18)$$

$$\Phi|_{r=b} = Ab^2 + B = 0 \rightarrow B = 0$$

Важно учесть стремление к нулю компонентов тензора напряжений при бесконечном возрастании координат. Тогда, рассмотрев выражение для радиальных напряжений σ_r , получаем еще одну постоянную интегрирования (19):

$$\sigma_r \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = 2(1 + \nu)C - \frac{2(1 - \nu)D}{r^2} = 0 \rightarrow C = 0 \quad (19)$$

Постоянную интегрирования D определяем из граничных условий на цилиндрической поверхности ($r = b$):

$$\sigma_r \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

$$\sigma_r|_{r=b} = -\frac{2(1 - \nu)D}{b^2} = \frac{\nu}{1 - \nu} p_0 \rightarrow D = -\frac{\nu p_0 b^2}{2(1 - \nu)^2} \quad (20)$$

С помощью несложных математических преобразований все постоянные интегрирования определены. Таким образом, искомые выражения для компонентов тензора напряжений и перемещений принимают следующий вид (21):

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_r = \frac{\nu p_0}{(1 - \nu)} \left(\frac{b}{r}\right)^2, \quad (21)$$
$$\tau_{rz} = 0, \quad u = \frac{\nu p_0 b^2}{2rG(1 - \nu)}, \quad w = 0$$

5. Использование принципа суперпозиции для полученных решений

Решение основной задачи получаем линейной комбинацией полученных решений. Компоненты тензора напряжений и перемещений приведены ниже (22):

$$\sigma_z = p_0, \quad \sigma_r = \frac{\nu p_0}{(1 - \nu)} \left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right], \quad \sigma_\varphi = \frac{\nu p_0}{(1 - \nu)} \left[1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2\right] \quad (22)$$

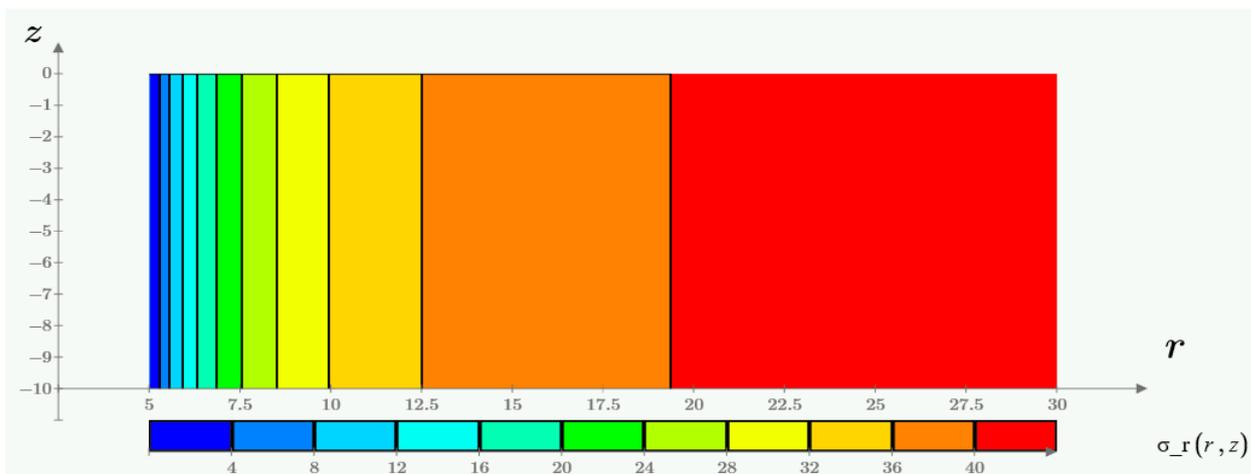
$$w = \frac{(H - z)\beta p_0}{E}, \quad u = -\frac{\nu p_0 b^2}{2rG(1 - \nu)}$$

Для проверки полученного решения проведено сравнение компонентов тензора напряжений и перемещений с результатами численных решений. Сравнению подлежат графики, построенные с помощью математического комплекса Mathcad и программного комплекса Plaxis.

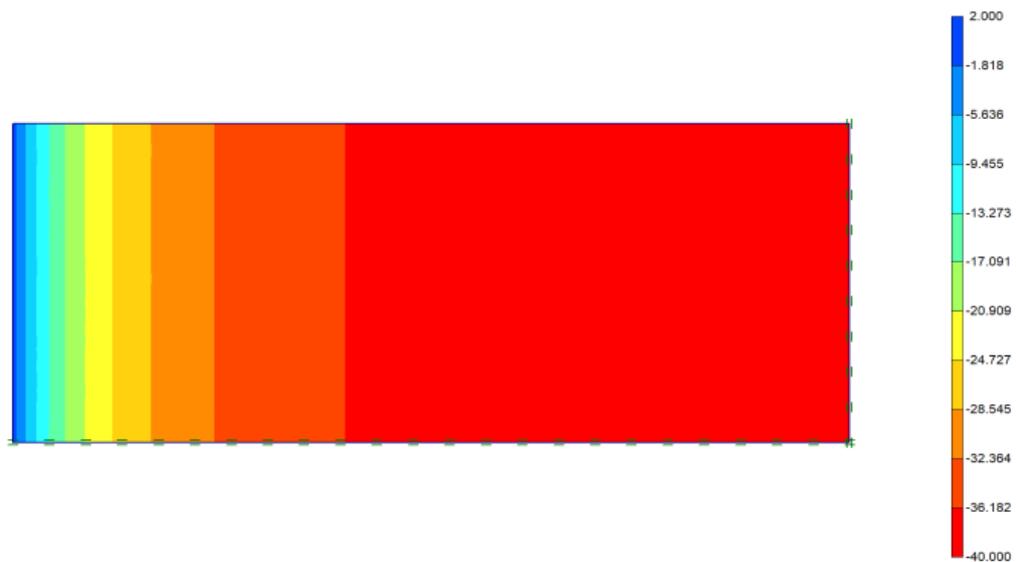
Заданные параметры для решения задачи:

- модуль деформации слоя $E = 20$ МПа;
- коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$;
- мощность слоя $H = 10$ м;
- радиус цилиндрической полости $b = 5$ м;
- нагрузка $p = 100$ кПа.

Значения радиальных напряжений σ_r , полученные по выведенным формулам, представлены на Рис.5; где Рис.5 (а) – результаты расчетов в программе Mathcad, а Рис.5 (б) – в программе Plaxis.



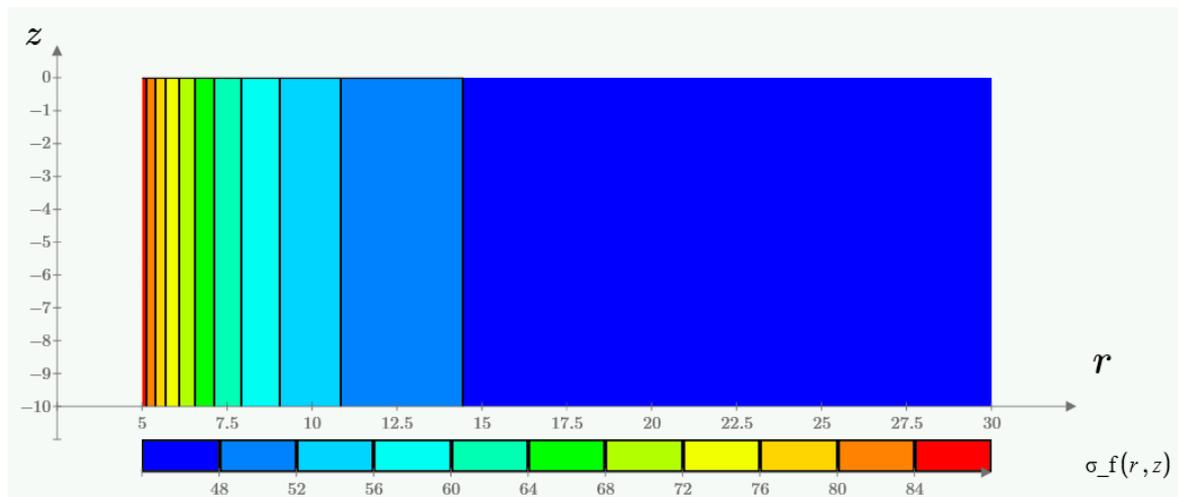
(а)



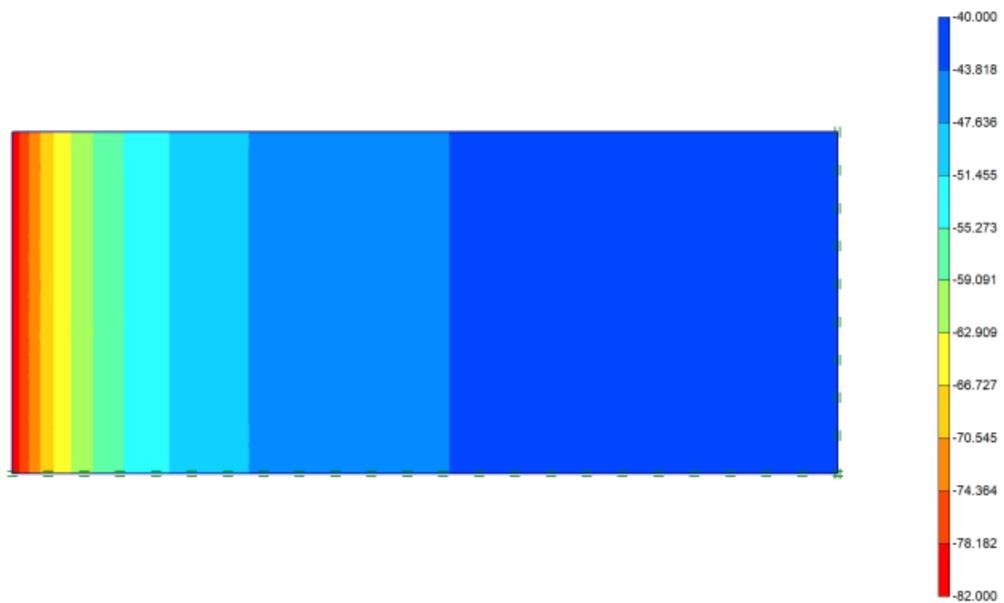
(б)

Рис.5 Изополя радиальных напряжений σ_r

Значения тангенсальных напряжений σ_φ , полученные в Mathcad, приведены ниже на Рис.6 (а), а значения, полученные в Plaxis – на Рис.6 (б).



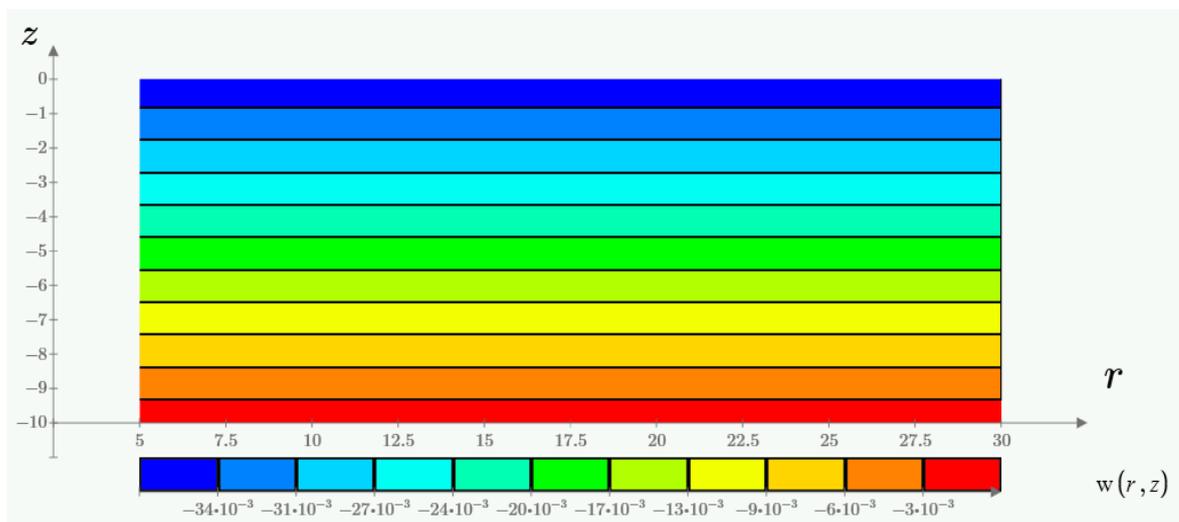
(а)



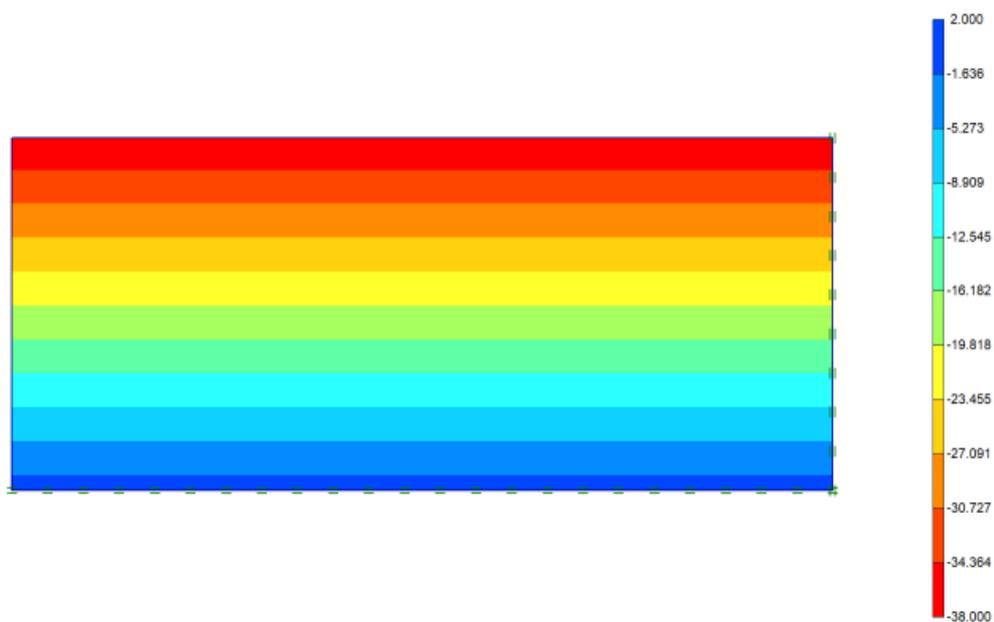
(б)

Рис.6 Изополю тангенсальных напряжений σ_ϕ

Значения вертикальных перемещений w , полученные в Mathcad и Plaxis представлены соответственно на Рис.7 (а) и Рис.7 (б).



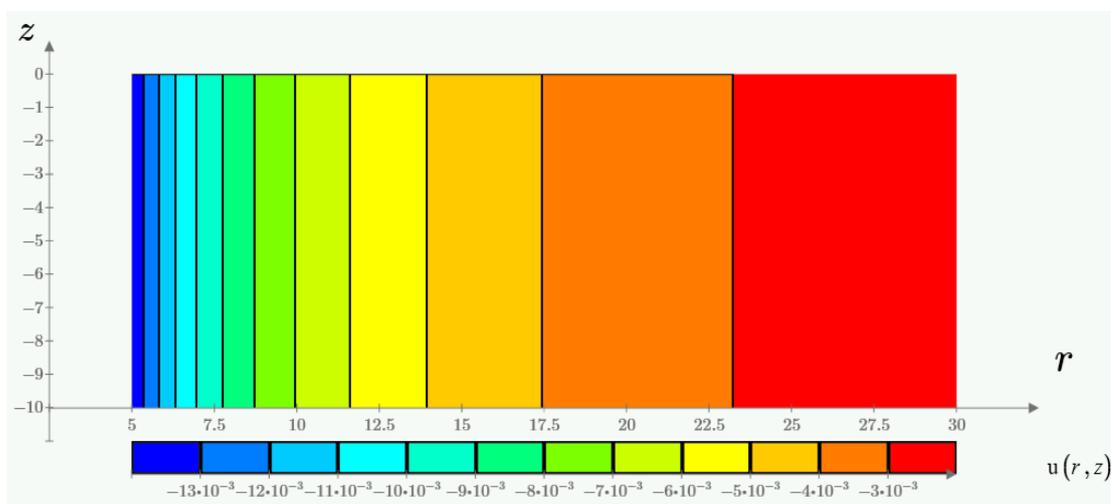
(а)



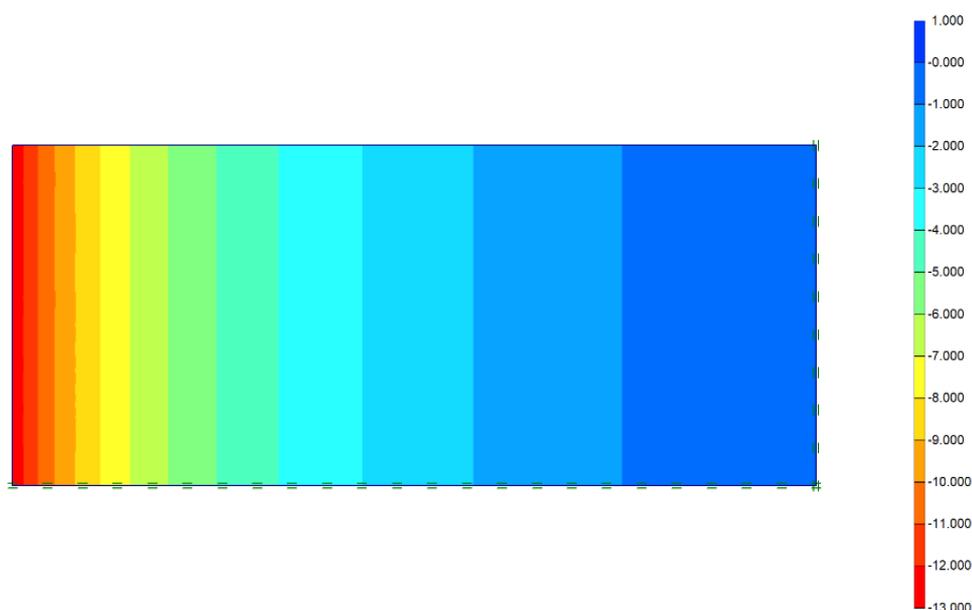
(б)

Рис.7 Изополя вертикальных перемещений w

Значения радиальных перемещений w , представлены соответственно на рис. 8(a) и 8 (б).



(а)



(б)

Рис.8 Изополя радиальных перемещений u

Хорошая сходимость результатов расчета говорит о правильности полученных решений. Существенно отметить, что значения для перемещений (w и u) получены в линейной постановке смешанной задачи теории упругости. Учет других особенностей работы грунтового основания: нелинейной деформируемости грунтов и, что важно, различного сопротивления сдвиговым и объемным деформациям является актуальным продолжением данной работы.

Литература

1. Готман Н.З., Готман Ю.А., Каюмов М.З. Расчет фундаментов заглубленных зданий над карстовой полостью. // Геотехнические проблемы мегаполисов. Тр. междунар. конф. по геотехнике. НИИОСП, М., 2010.Т.4. С. 1379-1384.
2. Готман А.Л., Готман Н.З., Каюмов М.З. Методика расчета фундаментов заглубленных сооружений на закарстованных территориях. // Жилищное строительство, 2011. №9. С. 13-15.

3. Востриков Н.Г., Антошкина Е.В., Максимов Д.В. Геоэкологические последствия просадочно-суффозионных процессов. // Инженерный вестник Дона, 2012. №4, ч.2. - URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1414.

4. Страданченко С.Г., Плешко М.С., Армейсков В.Н. О необходимости проведения комплексного мониторинга подземных объектов на различных стадиях жизненного цикла. // Инженерный вестник Дона, 2013. №4. - URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994.

5. Лурье А.И. Теория упругости. Изд-во «Наука», Москва, 1970. - 939 с.

6. Terzaghi K., Ralfh B. Peck, Cholamreza Mesri. Soil Mechanics in Engineering Practice, Third Edition, 1995. 549 p.

7. Mitihell James K. Fundamentals of soil behavior. Second Edition, 1993. 437 p.

8. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н. Механика грунтов, основания и фундаменты. – М., Высш. шк., 2007. – 566 с.

9. Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости. – М., Стройиздат, 1987. – 336 с.

10. Васильев В.З. Основы и некоторые специальные задачи теории упругости. Монография. М., ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2012. – 216 с.

References

1. Gotman N.Z., Gotman Yu.A., Kayumov M.Z. Geotekhnicheskiye problemy megapolisov. Tr. mezhdunar. konf. po geotekhnike. NIIOSP. M., 2010. T. 4. pp. 1379-1384.



2. Gotman N.Z., Gotman Yu.A., Kayumov M.Z. Zhilishchnoye stroitel'stvo. 2011. №9. pp. 13-15.
3. Vostrikov N.G., Antoshkina E.V., Maksimov D.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012. № 4. ch. 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1414.
4. Stradanchenko S.G., Pleshko M.S., Armeyskov V.N. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994.
5. Lurie A.I. Teoriya uprugosti. [Theory of elasticity]. Izdatel'stvo Nauka. M., 1970. 939 p.
6. Terzaghi K., Ralfh B. Peck, Cholamreza Mesri. Soil Mechanics in Engineering Practice. Third Edition, 1995. 549 p.
7. Mitihell James K. Fundamentals of soil behavior. Second Edition, 1993. 437 p.
8. Ukhov S.B., Semenov V.V., Znamensky V.V., Ter-Martirosyan Z.G., Chernyshev S.N. Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenty [Soil mechanics, bases and foundations]. Vysshaya shkola, M., 2007. 566 p.
9. Solyanik-Krassa K.V. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti. [Axisymmetric problem of the theory of elasticity]. Stroyizdat, M., 1987. 336 p.
10. Vasiliev V.Z. Osnovy i nekotoryye spetsial'nyye zadachi teorii uprugosti. [Fundamentals and some special problems of the theory of elasticity]. Monografiya. FGBOU Uchebno-metodicheskiy tsentr po obrazovaniyu na zheleznodorozhnom transporte, M., 2012. 216 p.