Инженерный вестник Дона, №4 (2015)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2015/3490

Оптимизация метода измерения угла фазового сдвига между двумя квазигармоническими сигналами

В.К. Игнатьев, Д.А. Станкевич

Волгоградский государственный университет

Аннотация: В статье предложена модификация ранее описанного метода, позволяющая сократить количество вычислительных операций и повысить точность оценивания угла фазового сдвига, которая приближается к пределу, установленному неравенством Рао-Крамера. Также в статье приведены результаты численного моделирования систематических и случайных погрешностей параметрического оценивания угла фазового сдвига предложенным методом.
Ключевые слова: угол фазового сдвига, квазигармонический сигнал, неравенство Рао-Крамера, параметрический метод.

Введение

Измерение угла фазового сдвига необходимо в задачах радиолокации и навигации, радиоастрономии, радиофизике и в других прикладных областях. Точность измерения угла фазового сдвига существенно зависит от наличия аддитивных и мультипликативных помех, скорости и диапазона изменений огибающей и частоты сигналов. Задача измерения угла фазового сдвига давно исследуется, и разработано множество способов ее решения [1 – 3]. В работах [4 – 7] описаны методы оценивания угла фазового сдвига между двумя квазигармоническими сигналами. Особенностями методов является их устойчивость к частотной и амплитудной модуляции сигналов.

Описание метода

В методе из работы [7] используются комбинации перекрестных произведений отсчетов двух квазигармонических сигналов $x_1(t) = a_1\sin(\theta(t) + \varphi_0) + \eta_1(t)$ и $x_2(t) = a_2\sin(\theta(t)) + \eta_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
B_1(t) &= x_1(t-4\Delta)x_2(t) - x_1(t)x_2(t-4\Delta),\\
B_2(t) &= x_1(t-3\Delta)x_2(t-\Delta) - x_1(t-\Delta)x_2(t-3\Delta),\\
B_3(t) &= x_1(t-3\Delta)x_2(t-\Delta) - x_1(t-2\Delta)x_2(t-2\Delta),\\
B_4(t) &= x_1(t-\Delta)x_2(t-3\Delta) - x_1(t-2\Delta)x_2(t-2\Delta),
\end{aligned}
$$

где обозначено η_1, η_2 – шумовые составляющие первого и второго сигнала, соответственно, Δ – некоторый временной интервал, такой, что $\omega(t)\Delta \ll 1$, $\omega(t) = d\theta/dt$. Показано, что из этих комбинаций можно построить оценку угла фазового сдвига между двумя сигналами φ_0:

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) \approx \pm \frac{B_3 - B_4}{B_3 + B_4}\sqrt{\frac{2B_2 - B_1}{2B_2 + B_1}} + \chi_0, \qquad (1)$$

где χ_0 – флуктуационная составляющая, которая определяется шумовыми составляющими $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ сигналов, а также скоростью изменения амплитуды и мгновенных значений частот этих сигналов. В выражении (1) необходимо использовать знак «+», если сумма в числителе отрицательна и «–» – если положительна.

Оценка (1) угла сдвига фазы квазигармонических сигналов получается по пяти отсчетам, что при наличии шума приведет к значительному смещению и большой неопределенности оценки. Аналитическое исследование и численное моделирование показывают, что χ_0 осциллирует с частотой ω, а среднее значение на интервале $T \gg 2\pi/\omega$ близко к нулю. В работе [7] для уменьшения влияния шумов предлагается использовать метод наименьших квадратов совместно с цифровым полосовым фильтром, однако при малом отношении сигнал/шум применение фильтра приводит к значительному смещению оценки при приемлемой ее неопределенности.

Детальный анализ показал, что каждая из комбинаций B_1-B_4 содержит, кроме полезной постоянной составляющей, которая используется для формирования оценки, аддитивные шумовые компоненты в виде перекрестных произведений отсчетов $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ и гармонических функций со случайной амплитудой. Отсюда следует, что для увеличения точности метода необходимо использовать средние значения величин B_1-B_4:

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) \approx \pm \frac{\overline{B}_3 - \overline{B}_4}{\overline{B}_3 + \overline{B}_4}\sqrt{\frac{2\overline{B}_2 - \overline{B}_1}{2\overline{B}_2 + \overline{B}_1}}\,. \qquad (2)$$

В этом случае, если отсчеты шумовой составляющей сигнала дельта-коррелированы, аддитивные шумовые компоненты будут в среднем равны нулю.

Результаты

Наиболее простым критерием качества оценок параметров сигналов при априорной неопределенности этих параметров являются неравенства Рао-Крамера. Сравним погрешности описанного метода и методов [4], [7] с пределом Рао-Крамера, для этого рассмотрим задачу определения параметров двух синхронно дискретизированных сигналов ($t = n\Delta t$, $n = 0,\dots, N - 1$) с одинаковыми частотами f и фазовым сдвигом φ_0:

$$x_1[n] = a_1 \sin(2\pi fn + \varphi_0) + \eta_1[n], \qquad x_2[n] = a_2 \sin(2\pi fn) + \eta_2[n].$$

Будем также предполагать, что амплитуды сигналов можно считать постоянными на интервале наблюдения, тогда функция распределения для пары последовательностей из N не коррелирующих между собой отсчетов сигналов имеет вид:

$$P = \frac{1}{(2\pi\sigma_1\sigma_2)^N} \exp\left[-\frac{\sum\limits_{n=0}^{N-1}\left(x_1[n] - a_1\sin(2\pi fn + \varphi_0)\right)^2}{2{\sigma_1}^2} - \frac{\sum\limits_{n=0}^{N-1}\left(x_2[n] - a_2\sin(2\pi fn)\right)^2}{2{\sigma_2}^2} \right].$$

Здесь σ_1, σ_2 – дисперсии нормальных шумовых последовательностей $\eta_1[n]$ и $\eta_2[n]$ соответственно. Коэффициенты информационной матрицы Фишера [8], рассчитанные по этой функции распределения отсчетов, имеют вид:

$$B_{a_1a_1} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial {a_1}^2} \ln P \right\rangle = \frac{1}{{\sigma_1}^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi fn + \varphi_0),\; B_{a_2a_2} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial {a_2}^2} \ln P \right\rangle = \frac{1}{{\sigma_2}^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi fn),$$

$$B_{ff} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial f^2} \ln P \right\rangle = \frac{4{a_1}^2\pi^2}{{\sigma_1}^2} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 \cos^2(2\pi fn + \varphi_0) + \frac{4{a_2}^2\pi^2}{{\sigma_2}^2} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 \cos^2(2\pi fn),$$

$$B_{fa_1} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial f \partial a_1} \ln P \right\rangle = \frac{a_1\pi}{{\sigma_1}^2} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 \sin(4\pi fn + 2\varphi_0),$$

$$B_{fa_2} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial f \partial a_2} \ln P \right\rangle = \frac{a_2 \pi}{\sigma_2^{\ 2}} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 \sin(4\pi f n),\ B_{\varphi_0 a_1} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0 \partial a_1} \ln P \right\rangle = \frac{a_1}{2\sigma_1^{\ 2}} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f n + 2\varphi_0),$$

$$B_{f\varphi_0} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial f \partial \varphi_0} \ln P \right\rangle = \frac{2a_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}} \sum_{n=1}^{N-1} n \cos^2(2\pi f n + \varphi_0),\ B_{\varphi_0 \varphi_0} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^{\ 2}} \ln P \right\rangle = \frac{a_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f n + \varphi_0),$$

Неравенство Рао-Крамера [8, 9] для i-го (a_1, a_2, f, φ_0 – 1…4) оцениваемого параметра имеет вид:

$$\sigma_i^2 \geq \begin{bmatrix} B_{a_1 a_1} & 0 & B_{fa_1} & B_{\varphi_0 a_1} \\ 0 & B_{a_2 a_2} & B_{fa_2} & 0 \\ B_{fa_1} & B_{fa_2} & B_{ff} & B_{f\varphi_0} \\ B_{\varphi_0 a_1} & 0 & B_{f\varphi_0} & B_{\varphi_0 \varphi_0} \end{bmatrix}_{ii}^{-1}.$$

Численное моделирование для оценки точности метода (2) было проведено на дискретизированных сигналах, вычисления производились с использованием арифметики с плавающей запятой двойной точности. Оценки угла фазового сдвига строились по N = 100001 отсчетам при различном отношении сигнал/шум, f = 0,1, φ = 0,15. Точность, а именно среднеквадратичное отклонение оценки от среднего значения σ и модуль среднего смещения от заданного значения b, оптимизированного метода сравнивалась с точностью методов [4] и [7].

При этом перед вычислениями оценок по методам [4] и [7] сигналы обрабатывались цифровыми полосовыми фильтрами с центральной частой f, построенными по методу частотной выборки [10] с полосой $2\cdot10^{-4}f_0$. Для минимизации влияния переходного процесса, вызванного применением фильтра, из начала выборки профильтрованного сигнала отбрасывалось число отсчетов, равное длительности импульсной характеристики фильтра.

Численное моделирование методов проводилось по 50 реализациям сигналов, результаты приведены в таблице 1. По результатам численного моделирования можно сделать вывод, что предложенный метод не уступает в точности описанным ранее методам при большом отношении сигнал шум и превосходит их – при малом.

Стоит отметить, что методу требуется значительно меньше вычислительных операций, поскольку вычисление квадратного корня и арктангенса требуется производить один раз на выбранном интервале наблюдения, и методу не требуется предварительная фильтрация сигналов.

Таблица № 1

Граница Рао-Крамера, СКО оценки σ и модуль среднего смещения от заданного значения *b*, оптимизированного метода (2) и методов [4], [6]

Сигнал / шум, дБ	Метод [4] и ПФ		Метод [7] и ПФ		Метод (2)		Граница Рао -Крамера
	b	σ	*b*	σ	*b*	σ	
80	10^{-7}	$8\cdot10^{-7}$	10^{-7}	$8\cdot10^{-7}$	10^{-7}	$6\cdot10^{-7}$	$5{,}6\cdot10^{-7}$
60	$4\cdot10^{-7}$	$7\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-7}$	$7\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-7}$	$6\cdot10^{-6}$	$5{,}6\cdot10^{-6}$
40	$5\cdot10^{-6}$	$7\cdot10^{-5}$	10^{-6}	$7\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-7}$	$6\cdot10^{-5}$	$5{,}6\cdot10^{-5}$
20	$8\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-5}$	$6\cdot10^{-4}$	$5{,}6\cdot10^{-4}$
0	$6\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	$4\cdot10^{-2}$	10^{-2}	$6\cdot10^{-4}$	10^{-2}	$5{,}6\cdot10^{-3}$

Заключение

В статье предложена оптимизация ранее описанного метода. Модификация метода позволяет сократить количество вычислительных операций и повысить точность оценивания угла фазового сдвига, которая приближается к пределу, установленному неравенством Рао-Крамера.

Теоретическая часть исследования выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-47-0229715. Численное моделирование исследования выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 15-19-00028.

Литература

1. Massimo, C. 6/12-channel synchronous digital phasemeter for ultrastable signal characterization and use // Frequency Control Symposium & the European Frequency and Time Forum (FCS), 2015 Joint Conference of the IEEE International.

2. Kawagoe, J., Kawasaki, T. A New Precision Digital Phase Meter and Its Simple Calibration Method // IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, VOL. 59, NO. 2, FEBRUARY 2010.

3. Дюкин А.Б., Медведев С.Ю., Мишагин К.Г. Перспективный цифровой частотный компаратор/анализатор фазовых шумов // Вестник метролога. 2011. № 2. С. 18 – 20.

4. Игнатьев В.К., Никитин А.В., Бернардо-Сапрыкин В.Х., Орлов А.А. Измерение разности фаз квазигармонических сигналов в реальном времени // Наука и образование. 2013. № 7. URL: http://dx.doi.org/10.7463/0713.0588392 (дата обращения: 21.11.2015).

5. Игнатьев В.К., Никитин А.В., Квочкин А.И. Параметрический метод измерения разности фаз квазигармонических сигналов // Инженерный вестник Дона. 2013. № 3. URL: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_6_Kvochkin.pdf_1749.pdf (дата обращения 21.11.2015).

6. Игнатьев В.К., Станкевич Д.А. Аппаратно-программный комплекс для параметрического анализа сигналов в задачах технической диагностики // Инженерный вестник Дона. 2013. № 3. URL: http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_106_ignatjev.pdf_1843.pdf (дата обращения 21.11.2015).

7. Игнатьев В.К., Никитин А.В., Юшанов С.В. Измерение фазового сдвига квазигармонических сигналов // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т.14. С. 424 – 431.

8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь. 1989. 656 с.

9. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. NJ: Prentice Hall, Upper Sadle River, NJ, 1998. 595 p.

10. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер. 2002. 608 с.

References

1. Massimo, C. 6/12-channel synchronous digital phasemeter for ultrastable signal characterization and use. Frequency Control Symposium & the European Frequency and Time Forum (FCS), 2015 Joint Conference of the IEEE International.

2. Kawagoe, J., Kawasaki, T. A New Precision Digital Phase Meter and Its Simple Calibration Method. IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, VOL. 59, NO. 2, FEBRUARY 2010.

3. Dyukin A.B., Medvedev S.Yu., Mishagin K.G. Vestnik metrologa. 2011. № 2. pp. 18 – 20.

4. Ignat'ev V.K., Nikitin A.V., Bernardo-Saprykin V.Kh., Orlov A.A. Nauka i obrazovanie. 2013. № 7. URL: http://dx.doi.org/10.7463/0713.0588392 (data obrashcheniya: 21.11.2015).

5. Ignat'ev V.K., Nikitin A.V., Kvochkin A.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. № 3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_6_Kvochkin.pdf_1749.pdf (data obrashcheniya 21.11.2015).

6. Ignat'ev V.K., Stankevich D.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. № 3. URL:ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_106_ignatjev.pdf_1843.pdf (data obrashcheniya 21.11.2015).

7. Ignat'ev V.K., Nikitin A.V., Yushanov S.V. Vychislitel'nye metody i programmirovanie. 2013. T.14. pp. 424 – 431.

8. Levin B.R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. M.: Radio i svyaz'. 1989. 656 p.

9. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. NJ: Prentice Hall, Upper Sadle River, NJ, 1998. 595 p.

10. Sergienko A.B. Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. SPb: Piter. 2002. 608 p.