

Моделирование начальной области образования эмульсии

М. Н. Романова, А. Е. Лебедев, Д. В. Лебедев

Ярославский государственный технический университет, Ярославль

Аннотация: В статье рассматривается принцип образования эмульсии в механических абсорберах, где рабочий орган представлен в виде вращающегося цилиндра. Произведён анализ взаимодействия жидкостей в процессе образования эмульсии. Рассмотрено взаимное влияние слоёв жидкости. Получена оценка внутренних и внешних параметров, характеризующих процесс образования эмульсии. Исследование, приведённое в статье, поможет в составлении инженерных методик расчета режимных и конструктивных параметров устройств.

Ключевые слова: абсорбер, эмульсионный слой, вязкость, плотность, эмульсия, область поверхностного контакта, диссипация энергии, несмешивающиеся жидкости, вращающийся цилиндр, жидкость.

При работе с механическими адсорберами, принцип действия которых основан на образовании эмульсий за счёт рабочего органа, выполненного в виде частично погружённого в жидкость вращающегося цилиндра, важно понимать модель образования эмульсии. Опираясь на математическую модель данного процесса, впоследствии можно будет осуществлять подбор параметров промышленных аппаратов, их производительности и подбора режимов работы.

Рассматривая типовую схему образования эмульсионного слоя на вращающемся цилиндре [1], будем полагать, что образование эмульсионного слоя осуществляется в результате контакта спутных слоёв при взаимодействии двух различных жидкостей, который непосредственно приводит к образованию слоя смешения. Следует отметить, что первая из жидкостей, имеющая большую вязкость, будет примыкать к вращающемуся цилиндру, в то время как вторая, с меньшей вязкостью, в каждом из переходных состояний будет находиться в состоянии покоя. Отсюда можно получить соответствующую расчетную схему (рис. 1).

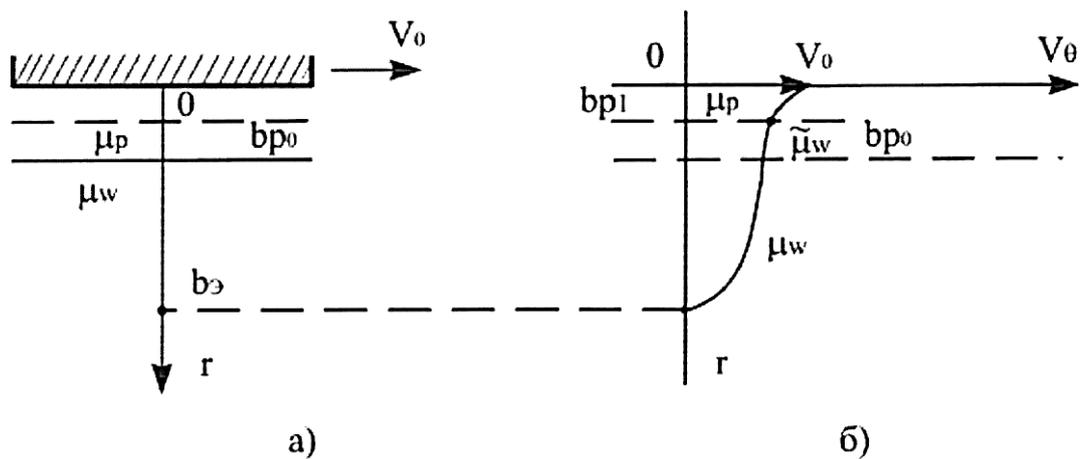


Рис. 1 – Эпюры скоростей в эмульсионном слое:
 а) начальное состояние, б) развитый слой.

На рис. 1 а) показано начальное состояние системы. Твердая поверхность движется со скоростью V_0 , захватывая жидкий слой с большей вязкостью μ_p и начальной толщиной b_{p0} . На границе раздела жидкостей происходит увлечение захватываемой жидкости с меньшей вязкостью μ_w . При этом толщина слоя увлекаемой жидкости полагается конечной, однако неизвестной в исходной постановке задачи, таким образом являясь свободным параметром.

На рис. 1 б) показано распределение эпюр скоростей в жидких слоях. Предполагается, что на выходе из начальной области образования эмульсии слой более вязкой жидкости разрушается до толщины b_{p1} у твердой стенки. Причем в переходной области между слоями образуется эмульсия с вязкостью μ_w . Профиль эпюр скоростей, как указывается в [2, 3], должен иметь точку перегиба в области их взаимодействия (смешения).

Будем полагать, что профили эпюр скоростей в слоях, принимая во внимание малые значения V_0 , а также условие перегиба профилей в области их смешения, могут быть выбраны в следующем виде [3]:

$$\bar{V}_0^p = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 (x - x_{10})^3, \quad (1)$$

$$\bar{V}_0^w = \bar{b}_0 - \bar{b}_1 x + \bar{b}_2 (x - x_{10})^3, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{V}_0 = V_0 / \omega_0 R_0, \quad \omega_0 R_0 = V_0, \quad x = r / b_{p0}, \quad x_{10} = b_{p1} / b_{p0}.$$

Кубические добавки в выражениях (1), (2) должны, как на это указывается в работе [3], учитывать эффект перегиба профиля. Однако в первом приближении их можно не учитывать. То есть, в дальнейшем, в качестве пробных функций профилей будут выбираться линейные функции: $\bar{a}_2 \approx \bar{b}_2 \approx 0$, что не противоречит методу конечных элементов [4].

Укажем систему граничных условий для линейных представлений (1), (2):

$$\text{при } x = 0: \bar{a}_0 = 1; \quad (3)$$

$$\text{при } x = x_{10}: \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_{10} = \bar{b}_0 - \bar{b}_1 x_{10}; \quad (4)$$

$$\text{при } x = \bar{B}: \bar{V}_0^w = 0 \text{ или } \bar{b}_0 = \bar{b}_1 \bar{B}, \quad (5)$$

где $\bar{B} = r_2 / b_{p0}$ – относительная толщина эмульсионного слоя, увлекаемого вращающимся цилиндром.

В работе [3] приводится граничное условие для слоев смешения различных жидкостей, имеющих неодинаковые плотности и вязкости.

В указанном случае, как показал Лок [5], автомодельными независимыми переменными для каждого из слоев будут:

$$\eta_p = x \cdot b_{p0} (u_1 / V_p R_0 \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

$$\eta_w = x \cdot b_{p0} (u_1 / V_w R_0 \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Из непрерывности касательного напряжения $\tau = \mu \frac{dV_\theta}{dr}$ следует (при $\mu_p \neq \mu_w$) разрывность производной $\frac{dV_\theta}{dr}$ на поверхности контакта. В автомодельных переменных (6) условие для напряжений имеет вид:

$$(\rho_p \mu_p)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dV_\theta^p}{d\eta_p} \right) = (\rho_w \mu_w)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dV_\theta^w}{d\eta_w} \right), \quad (7)$$

которое в переменной «x» может быть записано следующим образом при $x = x_{10}$:

$$(\mu_p)^{\frac{1}{2}} \frac{dV_\theta^p}{dx} = (\mu_w)^{\frac{1}{2}} \frac{dV_\theta^w}{dx}. \quad (8)$$

Представление для $\beta_w(x - x_{10})$, учитывающее вязкость жидкости в слое смешения, будет определяться в соответствии с эмпирическим представлением [6]:

$$\beta_w = \frac{\mu_w}{1 - \frac{b_{p0} - b_{p1}}{\mu_p} \sqrt{1 + \frac{b - b_{p1}}{a_{p1}}}}. \quad (9)$$

Выражение (9) улучшено, по сравнению с эмпирическим [6] с точки зрения асимптотических значений вязкостей μ_p, μ_w и более общей иррациональной зависимости отношения толщин "чистой" жидкости – b_{p1} и эмульсионной составляющей ($b_{p0} - b_{p1}$). Следует заметить, что показатель "с" может зависеть от μ_p, μ_w , то есть $c = c(\mu_p / \mu_w)$.

Действительно, при $b_{p0} = b_{p1}$, т.е. если $\mu_p \gg \mu_w$, более вязкая жидкость не разрушается, то из (9) следует $\beta_w \gg \mu_p$. При $b_{p1} = 0$ получаем $\beta_w \gg \mu_w$, т.е. весь слой считается разрушенным.

Перепишем (9) в более удобном виде:

$$\beta_w = \frac{\mu_w}{1 - \frac{\mu_p - \mu_w}{\mu_p} \frac{c \sqrt{x_{10}}}{c \sqrt{x_{10}}}}. \quad (10)$$

Для определения параметров $a_0, a_1, b_0, b_1, B, x_{10}$ система граничных условий (3-5), в выражении (8) является недостаточной.

Первое условие, замыкающее базовую модель образования эмульсии, может быть получено из "сшивки" динамического и статического решений задачи.

В соответствии с представлением касательного напряжения (7) будем понимать динамическую модель в силовом представлении:

$$\frac{d\tau}{dx} = -a, \quad (11)$$

где $\tau = \tau / \omega_0 R_0$, $a = ab_{p_0}^2 / \omega_0 R_0$. Причем представление параметра "а" следует из выражения градиента капиллярного давления [1].

В соответствии с принятыми допущениями динамической модели запишем решение уравнения (8) в следующем виде:

$$\tau = -ax + \tau_0. \quad (12)$$

Полагая, что при $x = B, \tau = 0$, получаем

$$\tau = -a(B + x). \quad (13)$$

Тогда первое замыкающее условие базовой модели образования эмульсии может быть записано следующим образом, при $x = x_{10}$:

$$a(B - x_{10}) = \tau_{(x_{10})}. \quad (14)$$

Найдем представления параметров a_0, a_1, b_0, b_1, B . Заметим, что $a_0 = 1$ следует из (3). Зависимость $b_0 = b_1 \cdot B$ позволяет переписать выражение (4) в виде

$$1 - a_1 \cdot x_{10} = b_1(B - x_{10}), \quad (15)$$

Условие (8) связывает параметры a_1, b_1 соотношением:

$$\delta_1 = (\mu_p / \mu_w)^{\frac{1}{2}} \alpha_1. \quad (16)$$

Условие (14) может быть представлено следующим образом:

$$\delta(\delta - x_{10}) = \mu_p \alpha_1. \quad (17)$$

Тогда выражение (15) можно записать в виде:

$$1 = \frac{\delta(\delta - x_{10})}{\mu_p} [x_{10} + (\frac{\mu_p}{\mu_w})^{\frac{1}{2}} (\delta - x_{10})]. \quad (18)$$

или, вводя обозначение $y = \delta - x_{10}$ представить в виде квадратного уравнения (19), решение которого имеет вид:

$$y^2 + (\frac{\mu_w}{\mu_p})^{\frac{1}{2}} x_{10} \cdot y - (\frac{\mu_w}{\mu_p})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\mu_p}{\delta} = 0. \quad (19)$$

решение которого имеет вид:

$$y = \frac{x_{10}}{2} (\frac{\mu_w}{\mu_p})^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{4\mu_p^2}{\delta^2 \mu_w^2 x_{10}^2}} - 1 \right). \quad (20)$$

При найденном значении "y" параметр α_1 определится выражением

$$\alpha_1 = \frac{\delta}{\mu_p} \cdot y. \quad (21)$$

Последнее замыкающее базовую модель образования эмульсии условие может быть получено из вариационного принципа максимума диссипации энергии в слое смешения [2, 3, 7, 8].

Составим функцию диссипации для слоя смешения:

$$\Phi_n = \mu_p \int_0^{\tau_1} \left[\left(\frac{dV_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV_0^w}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (22)$$

В составленном выражении перейдем к переменной x, полагая справедливым соотношение:

$$dt = \frac{dx}{V_0^p(x)}. \quad (23)$$

Тогда функцию диссипации (22) можно представить следующим образом:

$$\bar{\Phi}_n = \mu_P \int_0^{x_{10}} \frac{(\bar{a}_1^2 + \bar{b}_1^2) dx}{(1 - \bar{a}_1 x)} \quad (24)$$

или, учитывая выражение (16) и принимая во внимание оценку $\mu_P/\mu_W \gg 1$:

$$\bar{\Phi}_n(x_{10}) = \frac{\mu_P^2 \cdot \bar{a}_1(x_{10})}{\bar{a}_W(x_{10})} \in [1 - \bar{a}_1(x_{10}) \cdot x_{10}]. \quad (25)$$

Ранее указывалось, что показатель степени "с" в выражении (9) может зависеть от вязкостей μ_P, μ_W . В соответствии с формой граничного условия (8) будем полагать справедливым следующее представление:

$$c = c_0 \cdot (\mu_P/\mu_W)^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

тогда решение экстремальной задачи:

$$\bar{\Phi}_n(x_{10}^{\max}) = \bar{\Phi}_{10}^{\max}. \quad (27)$$

с учетом представлений (25), (20), (21), (26) позволяет определить "внутренние" параметры базовой модели образования эмульсии: x_{10}^{\max} , $\bar{b}(x_{10}^{\max})$, $\bar{a}_W(x_{10}^{\max})/\mu_W$, $V_\theta(x_{10}^{\max})$.

Укажем группу "внешних" параметров базовой модели образования эмульсии, которые, в частности, могут быть установлены опытным путем. К ним относится состав эмульсии:

$$Y_{WP} = \frac{Q_W}{Q_P} = \frac{\int_0^{\bar{b}} b_1(\bar{b}-x) dx}{\int_0^{x_{10}} (1 - \bar{a}_1 x) dx}, \quad (28)$$

который определяет объемное соотношение воды (Q_W) и масла (Q_P) в эмульсии.

Выражение (28) удобно представить в следующем виде:

$$Y_{WP} = \frac{y(x_{10}^{\max}) \cdot [1 - \bar{a}_1(x_{10}^{\max}) \cdot x_{10}^{\max}]}{x_{10}^{\max} [2 - \bar{a}_1(x_{10}^{\max}) \cdot x_{10}^{\max}]}. \quad (29)$$

Второй "внешний" параметр определяет общий расход эмульсии, который в безразмерной форме имеет вид:

$$Q_{wп} = Q_w \left(1 + \frac{1}{Y_{\text{в}}}\right) = \frac{y(x_{10}^{\text{max}})[1 - \beta_1(x_{10}^{\text{max}}) \cdot x_{10}^{\text{max}}]}{2} \left(1 + \frac{1}{Y_{wп}}\right). \quad (30)$$

Укажем зависимость, определяющую объемный расход эмульсии ($\text{м}^3/\text{с}$):

$$Q_v = Q_{wп} \omega_0 R_0 \cdot b_{p0} \cdot l \cdot \sqrt{k_a} \cdot k_v \quad (31)$$

где l – ширина лотка съема эмульсии с поверхности цилиндра (ленты); комплекс $\sqrt{k_a} \cdot b_{p0}$ – определяет долю увлекаемой вращающимся цилиндром, прилегающей к его поверхности более вязкой жидкости; k_v – коэффициент расхода.

Массовый расход ($\text{кг}/\text{с}$) эмульсии определяется выражением

$$Q_3^m = \rho_w Q_w \left(1 + \frac{1}{Y_{wп}}\right) \omega_0 R_0 \cdot b_{p0} \cdot l \cdot \sqrt{k_a} \cdot k_v. \quad (32)$$

В выражениях (31), (32) $\tilde{B} = y(x_{10}^{\text{max}}) + x_{10}^{\text{max}}$, что следует из ранее введённого обозначения $y = \tilde{B} - x_{10}$.

Таким образом была определена модель «внутренних» и «внешних» параметров образования эмульсии.

Литература

1. Романова М. Н. Моделирование процесса взаимодействия вращающегося цилиндра с несмешивающимися жидкостями / М. Н. Романова, А. Е. Лебедев, Д. В. Лебедев // Инженерный вестник Дона. – 2019. – № 1; URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5619
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758с.

4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464с.
5. Look R. C. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V.4. – p.42.
6. Плановский А. Н. Процессы и аппараты химической технологии / А. Н. Плановский, В. М. Рамм, С.Э. Качан. – М.: Госхимиздат, 1962. – 847 с.
7. Лойцанский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847с.
8. Ландау Л. Д. Механика жидкости и газа / Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1954. – 795с.
9. Лебедев А. Е. Математическое описание дисперсных потоков неоднородных жидкостей / А. Е. Лебедев, М. Н. Романова // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 3; URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5160
10. Tharmalingam S., Wilkinson W.W. The coating of newtonion liquids onto a rotating voll // I.Chem. Eng. Sei. 1978. V.33. – pp.1481-1487.

References

1. Romanova M. N., Lebedev A. E., Lebedev D. V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2019. № 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5619
2. SHlikhting G. Teoriya pogranichnogo sloya [The theory of the boundary layer]. Nauka. 1969. 742 p.
3. Betchelor Dzh. Vvedeniye v dinamiku zhidkosti [Introduction to fluid dynamics]. Mir. 1973. 758 p.
4. Oden Dzh. Konechnyye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred [Finite elements in nonlinear continuum mechanics]. Mir. 1976. 464 p.
5. Look R. C. Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V.4. p.42.
6. Planovskiy A. N., Ramm V. M., Kachan S. E. Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii [Processes and devices of chemical technology]. Goskhimizdat. 1962. 847 p.
7. Loytsanskiy L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of fluid and gas]. Nauka. 1973. 847 p.



8. Landau L. D., Lifshits E.M. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of fluid and gas]. Nauka. 1954. 795 p.
9. Lebedev A. E., Romanova M. N. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5160
10. Tharmalingam S., Wilkinson W.W. The coating of newtonion liquids onto a rotating voll. I.Chem. Eng. Sei. 1978. V.33. pp.1481-1487.