

## О поведении упругопластического диска под действием теплового источника

Г. Г. Бердзенишвили<sup>1</sup>, М. А. Артемов<sup>1</sup>, Е. С. Барановский<sup>1</sup>,

Э. В. Семка<sup>2</sup>, Д. Б. Фатхудинов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет

<sup>2</sup>Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия  
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

**Аннотация:** Обсуждаются шаги построения алгоритма расчета напряженного и деформированного состояния тонкого кругового диска, испытывающего тепловое и силовое воздействия. В центральной части диска создается однородное поле температур. В рамках теории течения идеального упругопластического тела рассматриваются условия пластичности общего вида. Принимается, что общим для всех условий пластичности является предел пластичности на одноосное растяжение. Установлены зависимости между радиусом диска, температурой центральной области диска и внешним давлением, определяющие возникновение пластических областей. Для кусочно-линейных условий пластичности общего вида определены аналогичные зависимости, когда на упругопластических границах реализуются сингулярные режимы пластичности. Для различных значений входных параметров задачи приведены графики напряжений, эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, упругопластическое тело, плоское напряженное состояние, кусочно-линейные условия пластичности, теория пластического течения, термоупругопластичность.

Математическому моделированию напряженного и деформированного состояния тел цилиндрической формы, испытывающих кинематическое, силовое, тепловое и инерциальное воздействия посвящено большое число работ [1–6]. Практически во всех последних публикациях учитывается зависимость параметров модели от температуры, например, [7–18].

### Постановка задачи

Рассматривается тонкий круговой диск, подверженный полярно-симметричному тепловому и силовому воздействиям. Поле температур центральной части диска  $0 \leq r \leq a$  является однородным  $T = T_a$ . На внешней границе диска задано давление  $p_b$  и температура  $T_b = 0$ .

### Исходные соотношения

Упругие деформации выражаются через напряжения согласно закону Гука

$$E\varepsilon_{\varphi}^e = \sigma_{\varphi} - \nu\sigma_r, \quad E\varepsilon_r^e = \sigma_r - \nu\sigma_{\varphi}, \quad E\varepsilon_z^e = -\nu(\sigma_{\varphi} + \sigma_r). \quad (1)$$

Рассматривается аддитивная форма связи полных, упругих, пластических деформаций при свободном тепловом расширении

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi}^p + \alpha T, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p + \alpha T, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p + \alpha T. \quad (2)$$

Окружная и радиальная компоненты тензора полных деформаций выражаются через перемещения по формулам

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (3)$$

Условие совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_{\varphi}}{dr} + \varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r = 0 \quad (4)$$

и уравнение равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Условие пластичности

$$\begin{cases} F(\sigma_{\varphi}, \sigma_r, \sigma_z) = k = k_0(1 - \xi T), \\ \sigma_z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Приращения пластических деформаций связаны соотношениями, следующими из ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{d\varepsilon_{\varphi}^p}{\partial F / \partial \sigma_{\varphi}} = \frac{d\varepsilon_r^p}{\partial F / \partial \sigma_r} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z}. \quad (7)$$

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбран предел пластичности  $k$  при начальной температуре, в качестве масштаба длины – радиус  $a$ . Для безразмерных величин принято

обозначение размерных величин, что не привносит путаницу, поскольку не вводятся безразмерные комплексы. Все величины являются усредненными по толщине диска.

Для определения напряженного, деформированного и температурного состояния диска выбирается цилиндрическая система координат, ось которой перпендикулярна срединной поверхности диска и является осью симметрии диска.

### Поле температур

Для несвязной термопластической задачи температурное поле определяется независимо от напряженно-деформируемого состояния [19]

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, & a < r \leq b. \end{cases} \quad (8)$$

### Упругое состояние

Обозначим через  $c_i, c_e$  радиусы границ области, в которой диск находится в упругом состоянии, а через  $p_i$  и  $p_e$  – давления на этих границах. В этой области компоненты тензора напряжений определяются по формулам [19]:

$$\sigma_r = -\frac{T_a \alpha E}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr + A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = T_a \alpha E \left( \frac{1}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr - f \right) + A + \frac{B}{r^2}. \quad (9)$$

$$A = \frac{T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{p_i c_i^2 - p_e c_e^2}{c_e^2 - c_i^2}, \quad B = \frac{c_i^2 T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{c_i^2 c_e^2 (p_i - p_e)}{c_e^2 - c_i^2}. \quad (10)$$

При решении рассматриваемой упругопластической задачи, если имеется пластическая зона, напряжения в зоне упругого состояния можно определять из решения начальной задачи. Полагая, что на

упругопластической границе  $\sigma_r|_{r=c_i} = -p_i$ ,  $\sigma_\varphi|_{r=c_i} = \sigma_{i\varphi}$ , находим формулы для величин  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{1}{2}(\alpha T_a E f_i - p_i + \sigma_{i\varphi}), \quad B = \frac{c_i^2}{2}(\alpha T_a E f_i + p_i + \sigma_{i\varphi}), \quad f_i = f|_{r=c_i}.$$

Соотношения закона Гука и определение деформаций позволяют найти деформации и перемещения.

### Переход диска в упругопластическое состояние

Задача плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела в области пластического состояния является статически определимой. Поэтому, если граничные условия не содержат перемещений, то определение напряжений не зависит от деформированного состояния.

Анализ упругого напряженного состояния диска показывает, что в зависимости от величины радиуса диска в процессе нагружения зарождение пластической области может происходить или на границе  $r = a$ , или на границе  $r = b$ , или на границах  $r = a$  и  $r = b$  одновременно.

Будем полагать, что для всех условий пластичности общим является предел пластичности на одноосное растяжение.

В области  $0 \leq r \leq a$  реализуется однородное напряженное состояние  $\sigma_r = \sigma_\varphi$ , поэтому в этой части диска при переходе в пластическое состояние для любого условия пластичности будет выполняться режим  $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k$ . Из формул (8)–(10) (полагая  $c_i = 0$ ,  $c_e = b$ ,  $p_e = p_b$ ) следует, что указанный переход выполняется, если

$$T_a = T_{in} = 2b^2(k_0 - p_b) / \left( 2b^2 k_0 \xi + \alpha E \left( b^2 - a^2 - 2 \int_a^b f r dr \right) \right).$$

Если давление  $p_b = 0$ , то для любого условия пластичности на границе  $r = b$  для напряжений имеем  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_\varphi = k_0$ . Температура  $T_a$ , при которой в пластическое состояние переходит только граница  $r = b$ , определяется по формуле

$$T_a = T_{ex} = (b^2 k_0) / \left( 2\alpha E \int_0^b r f dr \right).$$

Рассмотрим случай, когда выбирается кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$\begin{cases} \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z \} = k = k_0 (1 - \xi T), \\ \sigma_z = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Если на границе  $r = b$  давление  $p_b \neq 0$  и выполняется режим пластичности  $\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r = k_0$ , то

$$T_a = T_{ex} = b^2 ((\alpha_i + \beta_i) p_b + k_0) / \left( 2\alpha E \int_0^b r f dr \right).$$

Величину  $T_{ex}$  в явном виде можно получить также для некоторых функций пластичности, не являющихся кусочно-линейными, например, для квадратичных.

Равенство  $T_{in} = T_{ex}$  позволяет определить радиус диска  $b = b_k$ , для которого одновременно на границах  $r = a$  и  $r = b$  зарождается пластическая область.

Кроме величины  $b_k$  можно вводить ряд аналогичных величин, позволяющих достаточно просто структурировать алгоритм решения задачи. Так, можно найти такие значения  $b = b_1 < b_k$  и  $T_a = T_1$ , для которых в пластическом состоянии будут находиться две области: внутренняя  $0 \leq r \leq a$  и внешняя  $c_e \leq r \leq b$ , где  $c_e$  находится из некоторого

определяемого условия. Тогда можно говорить о дисках малого радиуса, когда  $b < b_1$ , и о дисках среднего радиуса, когда  $b_1 \leq b \leq b_k$ .

Так, если выбрано условие пластичности Шмидта–Ишлинского и  $0 \leq p_b < 2/3k_0$ , то  $b_1$  и  $T_1$  можно рассматривать как значения, для которых на границе  $r=c_e$  выполняется условие смены режима пластичности

$$\begin{cases} \sigma_\varphi - 0.5\sigma_r = k, \\ 0.5\sigma_\varphi - \sigma_r = k. \end{cases}$$

Для идеального упругопластического тела в области упругопластического состояния диска, если граничные условия заданы в напряжениях, задача определения напряжений будет статически определимой и является начальной задачей для радиальной компоненты тензора напряжений.

Напряжения в зонах пластического состояния для условия пластичности (11) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left( 1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left( \ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) + C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left( 1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left( \ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}. \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C_i$  находится из условия  $\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i$ , которое является или граничным, или следует из условия непрерывности напряжений.

Особо следует выделить условие пластичности Треска. Режимы этого условия пластичности соответствуют случаям:  $\alpha_i + \beta_i = 0$ ,  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i = 0$ . Для нахождения напряжений в пластической области необходимо выполнить предельный переход в формулах (12). Однако проще получить искомые формулы непосредственно, решив начальную задачу для указанных режимов пластичности.

В случае, когда  $\alpha_i + \beta_i = 0$ ,

$$\sigma_r = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left( \frac{\xi T_a \ln(b/r)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + C_i, \quad \sigma_\varphi = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left( \frac{\xi T_a (\ln(b/r) - 2)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + \frac{k_0}{\alpha_i} + C_i.$$

Когда  $\alpha_i = 0$ , из условия пластичности следует, что

$$\sigma_r = \frac{k_0}{\beta_i} \left( 1 - \frac{\xi T_a \ln(b/r)}{\ln(b/a)} \right)$$

и из уравнения равновесия получаем

$$\sigma_\varphi = \frac{k_0}{\beta_i} \left( 1 + \frac{\xi T_a (1 - \ln(b/r))}{\ln(b/a)} \right).$$

### Эквивалентное напряжение

Для оценки напряженного состояния определяем эквивалентное напряжение, которое связываем с условием пластичности. Для каждого  $i$ -го режима кусочно-линейное условие пластичности имеет вид

$$\sigma_{eq} = \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r.$$

Алгоритм решения задачи, когда выбирается условие пластичности Треска, рассмотрен в работе [15]. Ниже будет использоваться условие пластичности Шмидта–Ишлинского (см. рис.1).

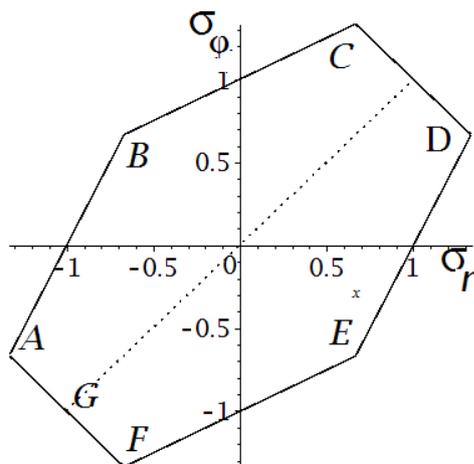


Рис. 1. Шестиугольник Шмидта–Ишлинского

Для других кусочно-линейных условий пластичности решение задачи не будет содержать принципиально новых моментов.

## Упругопластические области

При проведении численных расчетов будем полагать, что безразмерные величины  $k_0 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\alpha E = 0.012$ ,  $\xi = 0.0008(3)$ ,  $p_b = 0$ . Обозначим через  $c_{iF}$  радиус упругопластической границы (область  $a \leq r \leq c_i$ ), соответствующий режиму  $F$ , через  $c_{eB}$  – радиус упругопластической границы (область  $c_e \leq r \leq b$ ), соответствующий режиму  $B$ . Когда  $c_i = a$  и  $c_e = b$ , из равенства  $T_{in} = T_{ex}$  находим  $b = b_k = 3.3096$  и  $T_a = T_{in} = T_{ex} = 219.5122$ . Когда  $c_i = a$  и  $c_e = c_{eB}$ , из условий непрерывности напряжений на границе  $r = a$ , где  $\sigma_\varphi = \sigma_r = k_0(1 - \xi T_a)$ , на упругопластической границе  $r = c_e$ , на которой

$$\sigma_\varphi = -\sigma_r = \frac{2}{3} k_0 \left( 1 - \frac{\xi T_a \ln(b/c_e)}{\ln(b/a)} \right),$$

для граничного условия  $\sigma_r|_{r=b} = -p_b$  находим, что  $b = b_1 = 2.2534$ ,  $T_a = T_1 = 336.6911$ ,  $c_e = c_{eB} = 1.3355$ .

Вариант  $c_i = c_{iF}$  и  $c_e = b$  не реализуется, поскольку для выбранных параметров модели максимальное значение  $T_a$ , определяемое из условия  $k = k_0(1 - \xi T) = 0$ , равно  $1200^0$ . Для многих сталей предел пластичности исчезает уже при температуре  $600^0$ .

## Графики напряжений

Выполненное выше исследование позволяет построить алгоритм решения задачи в зависимости от значения радиуса диска, температуры в центре диска и давления на границе.

Ниже на рис. 2–5 приведены графики распределения напряжений, эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений. Цифры на графике эквивалентных напряжений указывают следующее соответствие:

$$1 \rightarrow \sigma_{eq} = -0.5(\sigma_\varphi + \sigma_r), \quad 2 \rightarrow \sigma_{eq} = \sigma_\varphi - 0.5\sigma_r, \quad 3 \rightarrow \sigma_{eq} = 0.5\sigma_\varphi - \sigma_r.$$

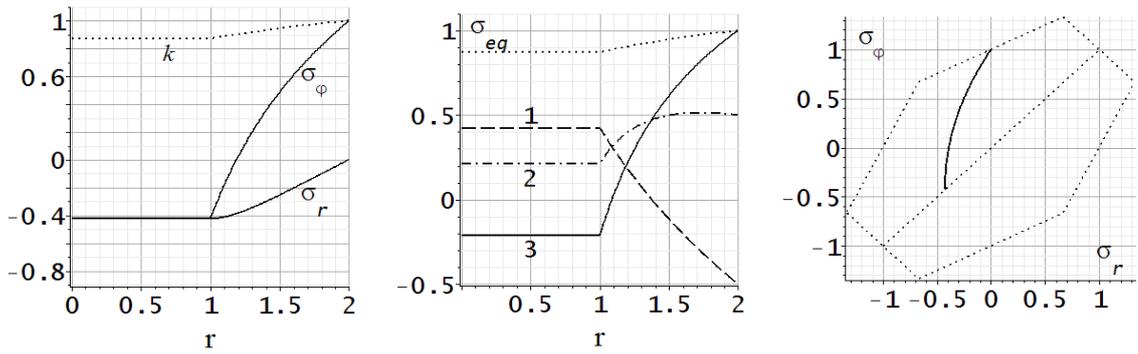


Рис. 2.  $T_a = T_{ex} = 154.03$ ,  $c_e = b = 2$

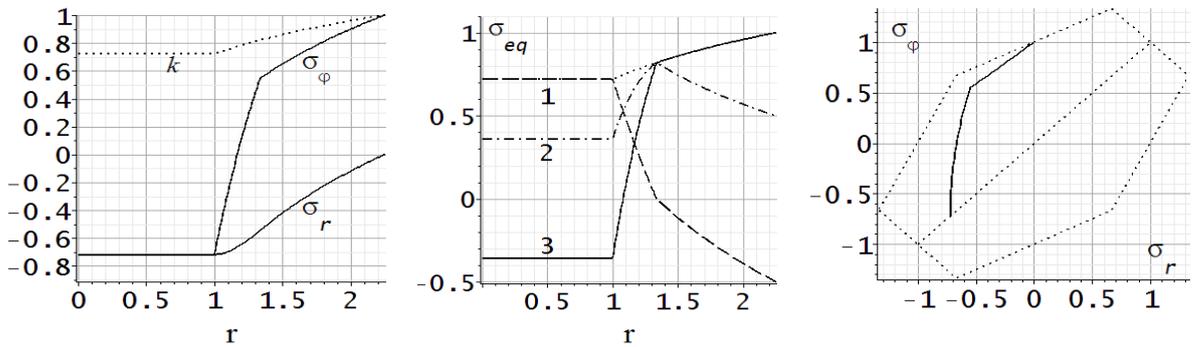


Рис. 3.  $T_a = T_1 = 336.69$ ,  $b = b_1 = 2.25$ ,  $c_e = 1.34$

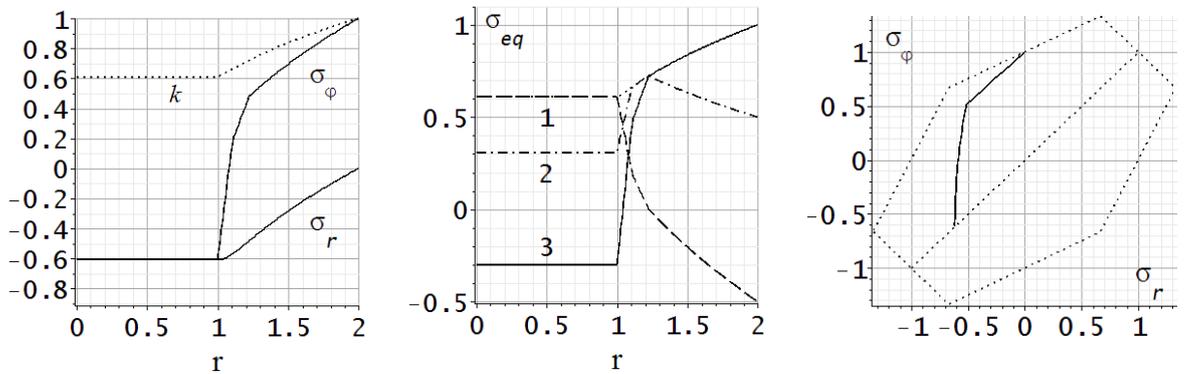


Рис. 4.  $T_a = T_2 = 470.05$ ,  $c_i = 1$ ,  $c_e = 1.11$ ,  $c_{eB} = 1.22$

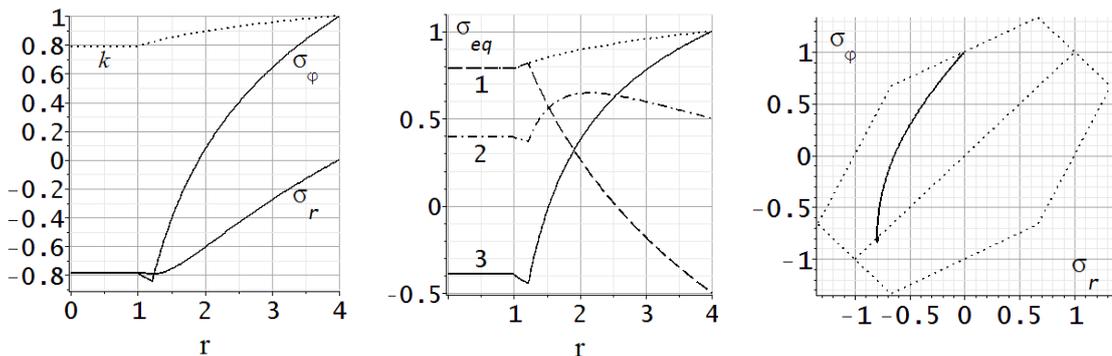


Рис. 5.  $T_a = T_1 = 255.82$ ,  $c_e = b = 4$ ,  $c_i = 1.22$

### Деформированное состояние диска

Зная напряженное состояние и используя формулы (1) –(7), несложно найти полные, пластические, упругие деформации и радиальные перемещения в диске. Вопросы вычисления деформаций при использовании кусочно-линейных условий пластичности в рамках теории пластического течения рассматривались в [20–22].

### Выводы

Вид формулы для напряжений и деформаций зависит от выбранного алгоритма решения задачи. Все различные формулы для конкретной величины приводимы одна к другой. Графики для эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений используем для контроля полученного решения для напряженного состояния. Вопросы построения алгоритма решения рассматриваемой выше конкретной задачи характерны для большинства аналогичных задач.

### Литература

1. Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer, 1953, 107 s.
2. Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of the Rotating Solid Disk // Ingenieur-Archiv. 1984. V. 54. pp. 345–354.
3. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The Strain Hardening Rotating Hollow Shaft Subject to a Positive Temperature Gradient // Acta Mechanica. 2007. V. 194. pp. 191–211.
4. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
5. Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского



государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 30–38.

6. Артемов М. А., Барановский Е. С., Потапов Н. С. Математическое моделирование упругопластического состояния цилиндрической области // Современные наукоемкие технологии. 2016. №9. Ч. 2. С. 191–195.

7. Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8. pp. 41–51.

8. Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // Acta Mechanica. 1991. V. 90. pp. 61–80.

9. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The Rotating Elastic-Plastic Hollow Shaft Conveying a Hot Medium // Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74. pp. 27–39.

10. Буренин А. А., Дац Е. П., Ткачева А. В. К моделированию технологии горячей посадки // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 40–47.

11. Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 3. С. 208–216.

12. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела текучести от температуры // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359).

13. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О влиянии зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние тонкого диска // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных

---

технологий (ПМТУКТ-2017). Сборник трудов X международной конференции. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2017. С. 51–55.

14. Артемов М. А., Барановский Е. С., Переяславская И. И. Математическое моделирование процесса термопластического деформирования тонкого кругового диска // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. Саранск: СВМО, 2017. С. 236–247.

15. Артемов М. А., Барановский Е. С., Переяславская И. И. Напряженно-деформированное состояние диска при тепловом воздействии // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти академика Л. И. Седова. М.: Матем. институт им. В. А. Стеклова РАН, 2017. С. 33–35.

16. Артемов М. А., Барановский Е. С. Об одном алгоритме решения задач термопластичности // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XIV Международной научной конференции (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. С. 137–138.

17. Полетаев Ю. В. Механизм локального разрушения зоны термического влияния сварных соединений при малоцикловом нагружении // Инженерный вестник Дона, 2011, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606).

18. Полетаев Ю. В., Полетаев В. Ю. Методика оценки склонности сварных соединений низколегированных сталей к образованию трещин при термической обработке // Инженерный вестник Дона, 2014, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583).

19. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.

20. Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С. Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-

---

линейного условия пластичности // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 9. С. 117–119.

21. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. № 5. С. 126–128.

22. Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С. К вопросу математического моделирования осесимметричного плоско-напряженного состояния сжимаемого упругопластического тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 22–39.

### References

1. Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer, 1953, 107 p.

2. Gamer U. Ingenieur-Archiv. 1984. V. 54. pp. 345–354.

3. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. Acta Mechanica. 2007. V. 194. pp. 191–211.

4. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Bol'shiye neobratimyye deformatsii i uprugoye posledeystviye [Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffects]. Vladivostok: Dal'nauka, 2013. 312 p.

5. Artemov M. A., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2014, № 1, pp. 30–38.

6. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Potapov N. S. Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii. 2016, № 9, pp. 191–195.

7. Gamer U. Journal of Thermal Stresses. 1985, V. 8, pp. 41–51.

8. Orcan Y., Gamer U. Acta Mechanica. 1991, V. 90, pp. 61–80.

9. Arslan E., Mack W., Eraslan A.N. Forschung im Ingenieurwesen. 2010, V. 74, pp. 27–39.

---

11. Dats E. P. Tkacheva A. V. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2016, № 3, pp. 208–216.

12. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017. №3 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359).

13. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2017). Sbornik trudov X mezhdunarodnoy konferentsii. Voronezh, 2017, pp. 51–55.

14. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Saransk, 2017, pp. 236–247.

15. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati L. I. Sedova. Moscow, 2017, pp. 33–35.

16. Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Poryadkovyy analiz i smezhnyye voprosy matematicheskogo modelirovaniya: tezisy dokladov XIV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Tsey, 3–8 iyulya 2017 g.). Vladikavkaz, 2017, pp. 137–138.

17. Poletayev Yu. V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2011, №4 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606).

18. Poletayev Yu. V., Poletayev V. Yu. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2014, № 4-1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583).

19. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.

20. Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2010, V. 6, № 9, pp. 117–119.



21. Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011, V. 7, № 5, pp. 126–128.

22. Pereyaslavskaya I. I., Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2017, № 1 (31), pp. 22–39.