Имитационное моделирование согласования интересов в системе дополнительного профессионального образования

С.С. Германовский, В.К. Дьяченко, Г.А. Угольницкий

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Предлагается динамическая теоретико-игровая модель согласования интересов в процессе социального партнерства в системе дополнительного профессионального образования. Исследованы кооперативная и бескоалиционная постановки. Приведено аналитическое решение линейной по состоянию версии модели. Представлены результаты имитационного исследования для различных наборов входных данных и ряд предварительных выводов, основанных на анализе аналитических и численных расчетов. Описанный подход позволяет сравнивать последствия различных способов организации социального партнерства в системе ДПО.

Ключевые слова: динамическая игра, дискретный аналог модели, дополнительное профессиональное образование, равновесие Нэша, социальное партнерство.

Под социальным партнерством в сфере дополнительного профессионального образования (далее ДПО) понимается особая система совместной деятельности субъектов образовательного процесса, характеризуемая доверием, общими целями и ценностями и обеспечивающая подготовку высококвалифицированных специалистов, конкурентоспособных и мобильных на рынке труда. В настоящей работе рассматривается дифференциально-игровая модель с целевыми функционалами, отражающими согласование общественных и частных интересов при распределении ресурса. Эта постановка задачи восходит к основополагающей работе Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя [1], в которой показано, что при определенной структуре функций выигрыша существует Парето-оптимальное равновесие Нэша статической игры в нормальной форме, т.е. достигается полное согласование интересов игроков.

Математическая постановка задачи

В предлагаемой модели рассматривается социальное партнерство между тремя субъектами управления – преподаватель ВУЗа (В), работодатель (Р), студент (С). Предполагается, что субъекты стремятся к максимизации своего выигрыша, равноправны и принимают решения одновременно и независимо. Дифференциально-игровая модель имеет вид:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}[g_i(r_i - u_i(t)) + s_i(t)c(x(t))]dt + e^{-\rho T} s_i(T)c(x(T)) \to \max, \qquad (1)$$

$$0 \le u_i(t) \le r_i, \quad i \in N; \qquad (2)$$

$$\dot{x} = h(x(t)) + f(u_B(t), u_P(t), u_C(t)),\ x(0) = x_0. \qquad (3)$$

В модели согласования интересов предполагается, что каждый субъект i из множества $N = \{B, P, C\}$ распределяет свой бюджет r_i между двумя направлениями: доля $u_i(t)$ (управление игрока) ассигнуется на повышение уровня профессиональной подготовки студентов, а оставшаяся часть $r_i - u_i(t)$ используется для финансирования частной деятельности. Соответственно, текущий выигрыш игрока складывается из доходов от частной деятельности и полезности от уровня профессиональной подготовки студентов.

Итак, в модели (1) - (3) $g_i(z)$ - вогнутая возрастающая функция переменной z, отражающая доходы субъектов от частной деятельности; $x(t)$ - уровень профессиональной подготовки студентов (переменная состояния); $c(x)$ - вогнутая возрастающая функция, дающая финансовое выражение общественной полезности от уровня профессиональной подготовки; $s_i(t)$ - доля субъекта в этой полезности; h - убывающая функция, обеспечивающая снижение уровня подготовки при отсутствии инвестиций; f - возрастающая функция инвестиций субъектов в профессиональную подготовку студентов.

Аналитическое исследование модели

Для аналитического исследования рассмотрим линейную по состоянию [2] упрощенную версию модели (1) - (3), которая имеет вид

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}[k_i(r_i - u_i(t))^{p_i} + s_i(t)cx(t)]dt + e^{-\rho T} s_i(T)cx(T) \to \max, \qquad (4)$$

$$0 \le u_i(t) \le r_i, \quad i \in N; \qquad (5)$$

$$\dot{x} = ax(t) + \sum_{i \in N} b_i u_i(t),\ x(0) = x_0 . \quad (6)$$

В (4) - (6) по сравнению с моделью (1) - (3) используются линейная функция $c(x(t)) = cx(t)$, где $c > 0$ - коэффициент перевода уровня профессиональной подготовки в общественную полезность, и линейная функция $h(x(t)) = ax(t),\ a < 0$, что делает модель линейной по состоянию. Далее, используется линейная функция $f(u_B(t), u_P(t), u_C(t)) = \sum_{i \in N} b_i u_i(t)$, где $b_i > 0$ - доля вклада инвестиций игрока в повышение уровня подготовки и степенная функция дохода от частной деятельности $g_i(r_i - u_i(t)) = k_i (r_i - u_i(t))^{p_i}, k_i > 0, 0 < p_i < 1$.

Для решения игры (4) - (6) применим принцип максимума Понтрягина. Функция Гамильтона i-го игрока имеет вид:

$$H_i(u_i(t), \lambda_i(t), x(t), t) = k_i(r_i - u_i(t))^{p_i} + cs_i(t)x(t) + \lambda_i(t)[ax(t) + \sum_{j \in N} b_j u_j(t)]$$

Из условия $\partial H_i / \partial u_i = 0$ с учетом неотрицательности $u_i(t)$ находим

$$u_i^{NE}(t) = \begin{cases} r_i - \left(\dfrac{b_i \lambda_i(t)}{k_i p_i} \right)^{\frac{1}{p_i - 1}}, & 0 < \lambda_i(t) < \dfrac{k_i p_i}{b_i} r_i^{p_i - 1}, \\ 0, & \lambda_i(t) \geq \dfrac{k_i p_i}{b_i} r_i^{p_i - 1}. \end{cases} \quad (7)$$

Краевая задача для сопряженной переменной есть

$$\dot{\lambda}_i = (\rho - a)\lambda_i(t) - cs_i(t), \quad \lambda_i(T) = cs_i(T), \quad (8)$$

$$\lambda_i^{NE}(t) = e^{(\rho - a)(t - T)} cs_i(T) + e^{(\rho - a)(t - T)} \int_t^T cs_i(\tau) e^{(\rho - a)(T - \tau)} d\tau . \quad (9)$$

В силу свойств модели (4) - (6) соотношения (7) с учетом (9) действительно образуют равновесие Нэша $u^{NE}(\cdot) = (u_B^{NE}(\cdot), u_P^{NE}(\cdot), u_C^{NE}(\cdot))$ в этой модели. В линейных по состоянию дифференциальных играх равновесия Нэша в программных и позиционных стратегиях совпадают [14]. Соответствующая равновесная траектория есть

$$x^{NE}(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \left[\sum_{i \in N} b_i u_i^{NE}(\tau) \right] d\tau . \qquad (10)$$

Полученное аналитическое решение позволяет сделать качественные выводы о социальном партнерстве в рамках модели (4) - (6). Так, условие $\lambda_i(t) \geq k_i p_i r_i^{p_i - 1} / b_i$ характеризует ситуацию, когда весь бюджет расходуется только на частную деятельность. Обратная ситуация $(u_i(t) = r_i)$, когда все средства идут на повышение подготовки и развитие социального партнерства в стратегии (7) не достигается. Поддерживать высокий уровень подготовки сложно, т.к. первое слагаемое в (10) экспоненциально убывает $(a < 0)$.

Рассмотрим кооперативную модель, когда все субъекты объединяются и совместно максимизируют суммарный функционал выигрыша

$$J = \sum_{i \in N} J_i = \int_0^T e^{-\rho t} [\sum_{i \in N} k_i (r_i - u_i(t))^{p_i} + cx(t)] dt + e^{-\rho T} cx(T) \qquad (11)$$

(с учетом условия $\forall t \sum_{i \in N} s_i(t) = 1$) по всем управлениям (5) в силу уравнения динамики (6). В этом случае получаем Парето-оптимальное решение $u^{PO}(\cdot) = (u_B^{PO}(\cdot), u_P^{PO}(\cdot), u_C^{PO}(\cdot))$, где

$$u_i^{PO}(t) = \begin{cases} r_i - \left(\dfrac{b_i \lambda(t)}{k_i p_i} \right)^{\frac{1}{p_i - 1}}, & 0 < \lambda(t) < \dfrac{k_i p_i}{b_i} r_i^{p_i - 1}, \\ 0, \ \lambda(t) \geq \dfrac{k_i p_i}{b_i} r_i^{p_i - 1}, & \end{cases}, \ i \in N; \qquad (12)$$

$$\lambda^{PO}(t) = ce^{(\rho - a)(t - \tau)} + e^{(\rho - a)(t - T)} \int_t^T ce^{(\rho - a)(T - \tau)} d\tau . \qquad (13)$$

Оптимальная кооперативная траектория $x^{PO}(t)$ имеет вид (10) в силу (12)-(13). Количественную характеристику уровня согласования от некооперативного поведения дает «цена анархии» [3]: $PA = \dfrac{\sum_{i \in N} J_i^{NE}}{J^{PO}}$.

Расчеты

Результаты расчетов для нескольких характерных наборов входных данных: $\rho = 0.1$; $T = 5$ *лет* ; $r_B = 175$; $r_P = 250$; $r_C = 150$; $k_B = k_P = k_C = 10$; $p_B = p_P = p_C = 0.1$; $b_B = b_P = b_C = 1/3$; $a = -0.05$; $x_0 = 420$; $c = 2$; для линейной модели представлены в таблице 1.

Таблица №1

p	$s_B = 0.6;\ s_P = s_C = 0.2$					$s_B = 0.05;\ s_P = 0.05; s_C = 0.9$				
	J_C	J_P	J_B	J	PA	J_C	J_P	J_B	J	PA
1	1	1547	1547	4548	7642	0.997	6657	419	419	7495
0.9	0.9	806	806	2314	3926	0.992	2297	237	237	2771
0.5	0.5	105	107	181	393	0.966	232	78	75	385
0.1	0.1	68	71	75	214	0.996	79	69	66	214

Анализ проведенных расчетов позволил сделать ряд выводов:

1) В данных моделях цена анархии близка к единице, что означает достижение согласованности интересов субъектов.

2) В случае, когда доля общественной полезности одного из игроков равна единице (остальных - нулю), цена анархии убывает с ростом показателя степени p , и стремится к единице при p стремящемся к нулю.

3) С ростом доли игрока в общественной полезности его доход растет.

4) С ростом коэффициента $k_i;\ i = B, P, C$ (эффективности вложений в частную деятельность) субъекту становится выгодно увеличивать финансирование частной деятельности, а с ростом коэффициента перевода уровня профессиональной подготовки в общественную полезность, наоборот, увеличивать финансирование создания общественного блага.

В данной постановке интересы различных субъектов управления согласованы, цена анархии близка к единице, необходимости в дополнительных уровнях управления нет. Анализ результатов тестовых расчетов носит в значительной степени условный характер, однако, уже на данном этапе он позволяет сравнивать последствия различных способов организации социального партнерства в системе ДПО.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-03-00236.

Литература

1. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. №3. С.54-69.

2. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000.382 p.

3. Algorithmic Game Theory / Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007. 754 p.

4. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.

5. Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А., Дьяченко В.К. Динамическая модель профессиональной специализации студентов // Инженерный вестник Дона. 2013. №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1653.

6. Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А., Дьяченко В.К. Модели кооперации в системе социального партнерства // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1555

7. Keith N. Engaging in Social Partnerships: A Professional Guide for Successful Collaboration in Higher Education. Routledge, 2011. 288 p.

8. Siegel D. Organizing for Social Partnerships: Higher Education in Cross-Sector Collaboration. Routledge, 2010. 224 p.

9. Talman D., Yang Z. A model of partnership formation // Journal of Mathematical Economics, 47 (2011), pp. 206-212.

10. Dyachenko V.K., Ougolnitsky G.A., Tarasenko L.V. Computer Simulation of Social Partnership in the System of Continuing Professional Education // ASSA. 2014. Vol.14. N4. pp. 378-387.

References

1. Germeyer Yu.B., Vatel' I.A. Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1974. №3. pp. 54-69.

2.Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000.382 p.

3.Algorithmic Game Theory. Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007. 754 p.

4. Gorelik V.A., Gorelov M.A., Kononenko A.F. Analiz konfliktnykh situatsiy v sistemakh upravleniya [Analysis of conflict situations in control systems]. M.: Radio i svyaz', 1991. 288 p.

5. Tarasenko L.V., Ugol'nitskiy G.A., D'yachenko V.K. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1653.

6.Tarasenko L.V., Ugol'nitskiy G.A., D'yachenko V.K. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1555

7. Keith N. Engaging in Social Partnerships: A Professional Guide for Successful Collaboration in Higher Education. Routledge, 2011. 288 p.

8. Siegel D. Organizing for Social Partnerships: Higher Education in Cross-Sector Collaboration. Routledge, 2010. 224 p.

9. Talman D., Yang Z. Journal of Mathematical Economics, 47 (2011), pp. 206-212.

10. Dyachenko V.K., Ougolnitsky G.A., Tarasenko L.V. ASSA. 2014. Vol.14. N4. pp. 378-387.