

Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости

А.Е. Дудник, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов, А.С. Денего

Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Получены разрешающие уравнения для определения напряженно-деформированного состояния толстостенной полимерной цилиндрической оболочки, находящейся в условиях плоского деформированного состояния с учетом изменения температуры и высокоэластических деформаций. В качестве закона, описывающего связь между напряжениями и деформациями ползучести, используется нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Решение производится численно при помощи метода конечных элементов.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, полимерный цилиндр, высокоэластические деформации, уравнение Максвелла-Гуревича, метод конечных элементов, вязкоупругость, модуль высокоэластичности, плоское деформированное состояние, температура.

Рассмотрим вязкоупругий толстостенный цилиндр, подверженный действию внутреннего и внешнего давления, достаточно протяженный по своей длине.

Данный цилиндр будет находиться в условиях плоского деформированного состояния (ПДС). Пусть температура цилиндра является функцией от радиуса r и времени t . Для полимеров все упругие и релаксационные характеристики сильно зависят от температуры, поэтому они также будут функциями координаты и времени.

В такой постановке данная задача решается методом конечных разностей для полимерных цилиндров в работах [1, 2], и для бетонных — в работах [3–5]. В настоящей статье будут получены разрешающие уравнения метода конечных элементов.

Связь между напряжениями и деформациями для плоского деформированного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \varepsilon_r^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + \varepsilon_\theta^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)) + \varepsilon_z^* + \alpha\Delta T = 0.\end{aligned}\quad (1)$$

где ε_r^* , ε_θ^* , ε_z^* — деформации ползучести.

Исключим из (1) напряжение σ_z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_\theta) + \varepsilon_r^* + \nu\varepsilon_z^* + (1+\nu)\alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r) + \varepsilon_\theta^* + \nu\varepsilon_z^* + (1+\nu)\alpha\Delta T.\end{aligned}\quad (2)$$

В теории ползучести используется гипотеза о равенстве нулю объемной деформации ползучести, т.е. $\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* + \varepsilon_z^* = 0$.

С учетом этой гипотезы соотношения (2) переписутся в виде:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} + (1+\nu)\alpha\Delta T + \\ &+ \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}.\end{aligned}\quad (3)$$

Выразим из (2) и (3) напряжения через деформации:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_\varepsilon\}),\quad (4)$$

где $[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}$ — матрица упругих постоянных; $\{\varepsilon_\varepsilon\}$ —

вектор вынужденных деформаций. В случае равенства нулю объемной деформации ползучести вектор $\{\varepsilon_\varepsilon\}$ запишется в виде:

$$\{\varepsilon_\varepsilon\} = (1+\nu)\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}.$$

В общем случае вектор $\{\varepsilon_\theta\}$ имеет вид:

$$\{\varepsilon_\theta\} = (1 + \nu)\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \varepsilon_z^* \end{Bmatrix}.$$

Будет использоваться одномерный элемент с двумя узлами и одной степенью свободы в узле – перемещением u (рис. 1).

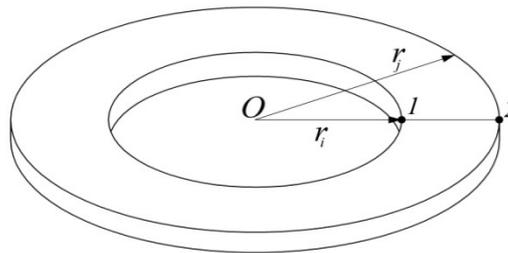


Рис. 1. — Одномерный осесимметричный конечный элемент

Связь между перемещениями и деформациями имеет вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{u}{r} \end{Bmatrix}^T. \quad (5)$$

Функция изменения перемещения в пределах элемента принимается линейной:

$$u(r) = N_i u_i + N_j u_j = \{N_i \quad N_j\} \{U\}, \quad (6)$$

где $N_i = 1 - \frac{r - r_i}{r_j - r_i}$, $N_j = \frac{r - r_i}{r_j - r_i}$ — функции формы; $\{U\} = \{u_i \quad u_j\}^T$ — вектор

перемещений в узлах.

Подставим (6) в (5), получим:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}, \text{ где } [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_j - r_i} & \frac{1}{r_j - r_i} \\ N_i / r & N_j / r \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия деформации элемента записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} 2\pi r dr, \quad (8)$$

где $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_e\}$ — упругая деформация.

Будем считать, что вынужденные деформации в пределах элемента постоянны. Подставив (4) и (7) в (8), получим:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} (\{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr \{U\} - 2 \{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_e\} + \\ & + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr \{\varepsilon_e\}^T [D] \{\varepsilon_e\}). \end{aligned} \quad (9)$$

Окончательно задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K] \{U\} = \{F_e\} + \{F\}, \quad (10)$$

где $[K] = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr$ — матрица жесткости; $\{F_e\} = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_e\}$ — вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки; $\{F\}$ — вектор внешних узловых нагрузок.

Для полимеров справедливо нелинейное уравнение Максвелла [6–8], которое для одноосного напряженного состояния имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_x^*}{\partial t} = \frac{f_x^*}{\eta^*}, \quad f_x^* = \sigma_x - E_\infty \varepsilon_x^*, \quad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left(\frac{|f_x^*|}{m^*}\right), \quad (11)$$

где E_∞ — модуль высокоэластичности; η_0 — начальная релаксационная вязкость; m^* — модуль скорости.

Обобщение этого уравнения для трехосного напряженного состояния было выполнено Г.И. Гуревичем [6]:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = (x, y, z), \quad j = (x, y, z), \quad (12)$$

$$f_{ij}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) - E_{\infty}\varepsilon_{ij}^*, \quad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left(\frac{|f_{\max}^*|}{m^*}\right),$$

где $p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ — среднее напряжение; δ_{ij} — символ Кронекера.

При этом были приняты следующие допущения:

1. Равенство нулю объемной деформации ползучести.
2. Коэффициент Пуассона для неупругих деформаций $\nu = 0.5$.
3. Релаксационная вязкость η^* для скоростей роста деформаций ε_x^* , ε_y^* и ε_z^* одинакова и определяется по максимальной функции напряжений f_{\max}^* .

Полученные уравнения МКЭ позволяют произвести расчет и без этих упрощений. На основе принципа суперпозиции представим трехосное напряженное состояние в точке как сумму трех одноосных состояний:

1. $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$.

При отсутствии температурных деформаций:

$$\varepsilon_{1x} = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_{1x}^*, \quad \frac{\partial \varepsilon_{1x}^*}{\partial t} = \frac{\sigma_x - E_{\infty}\varepsilon_{1x}^*}{\eta_1^*}, \quad \frac{1}{\eta_1^*} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left(\frac{|\sigma_x - E_{\infty}\varepsilon_{1x}^*|}{m^*}\right).$$

Деформации по осям y и z можно найти через коэффициент Пуассона:

$$\varepsilon_{1y} = \varepsilon_{1z} = -\nu\varepsilon_{1x} = -\nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_{1x}^*\right).$$

2. $\sigma_y \neq 0, \sigma_x = \sigma_z = 0$.

$$\varepsilon_{2y} = \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon_{2y}^*, \quad \frac{\partial \varepsilon_{2y}^*}{\partial t} = \frac{\sigma_y - E_{\infty}\varepsilon_{2y}^*}{\eta_2^*}, \quad \frac{1}{\eta_2^*} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left(\frac{|\sigma_y - E_{\infty}\varepsilon_{2y}^*|}{m^*}\right).$$

$$\varepsilon_{2x} = \varepsilon_{2z} = -\nu\varepsilon_{2y} = -\nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon_{2y}^*\right).$$

3. $\sigma_z \neq 0, \sigma_x = \sigma_y = 0$.

$$\varepsilon_{3z} = \frac{\sigma_z}{E} + \varepsilon_{3z}^*, \quad \frac{\partial \varepsilon_{3z}^*}{\partial t} = \frac{\sigma_z - E_\infty \varepsilon_{3z}^*}{\eta_3^*}, \quad \frac{1}{\eta_3^*} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left(-\frac{|\sigma_z - E_\infty \varepsilon_{3z}^*|}{m^*}\right).$$

$$\varepsilon_{3x} = \varepsilon_{3y} = -\nu \varepsilon_{3z} = -\nu \left(\frac{\sigma_z}{E} + \varepsilon_{3z}^* \right).$$

Полная деформация по оси x запишется в виде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{1x} + \varepsilon_{2x} + \varepsilon_{3x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) + \varepsilon_x^*, \quad \text{где } \varepsilon_x^* = \varepsilon_{1x}^* - \nu(\varepsilon_{2y}^* + \varepsilon_{3z}^*).$$

Выражения для остальных деформаций можно получить циклической заменой индексов. Полные деформации ползучести по осям y и z примут вид:

$$\varepsilon_y^* = \varepsilon_{2y}^* - \nu(\varepsilon_{1x}^* + \varepsilon_{3z}^*); \quad \varepsilon_z^* = \varepsilon_{3z}^* - \nu(\varepsilon_{1x}^* + \varepsilon_{2y}^*).$$

Был выполнен расчет полимерного цилиндра из ЭДТ-10 с внутренним радиусом $a = 0.8$ см, внешним радиусом $b = 2.8$ см.

Зависимости модуля упругости и релаксационных констант от температуры для ЭДТ-10 имеют вид [9, 10]:

$$\begin{aligned} E &= -17.5T + 3525 \text{ [МПа]}; \quad E_\infty = -30T + 3150 \text{ [МПа]}; \\ m^* &= -0.011T + 4.75 \text{ [МПа]}; \quad \eta_0^* = 104430 \cdot e^{-0.0275T} \text{ [МПа} \cdot \text{ч]}, \end{aligned} \quad (13)$$

где T — температура в градусах Цельсия.

Температура цилиндра при $r = b$ постоянна — $T_b = 28^\circ \text{C}$, а на внутренней поверхности (при $r = a$) растет с постоянной скоростью в течение 1.2 часа от 28°C до 100°C .

На рис. 2 и 3 показаны соответственно графики изменения напряжений σ_r и σ_θ в толще цилиндра при $t = 0.4$ ч (черная линия), $t = 1.2$ ч (красная линия) и $t = 13.4$ ч (фиолетовая линия). Синей линией показано упругое решение при $t \geq 1.2$ ч. Штриховым линиям соответствует уточненное решение без учета равенства нулю объемной деформации ползучести.

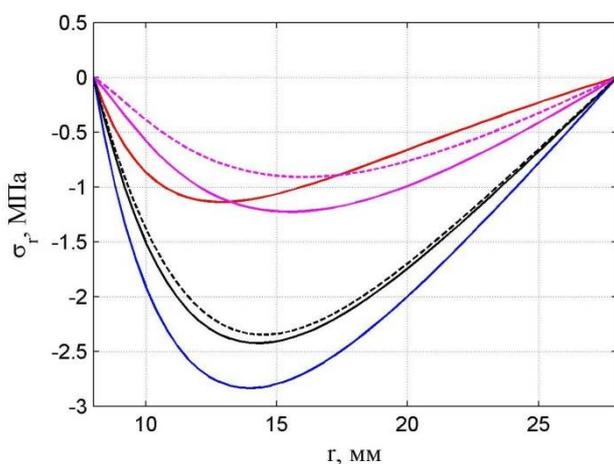


Рис. 2 — Распределение напряжений σ_r в толще цилиндра

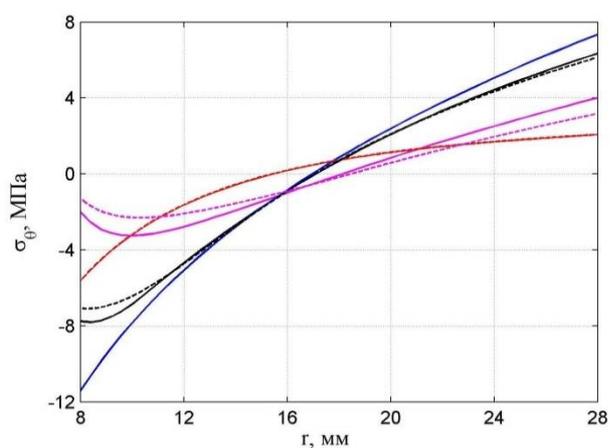


Рис. 3 — Распределение напряжений σ_θ в толще цилиндра

Из представленных графиков видно, что гипотеза об отсутствии объемной деформации ползучести приводит к завышенным значениям напряжений в конце процесса ползучести. При $t = 13.4$ ч максимальные величины напряжений σ_r отличаются на 35%, а σ_θ – на 27%.

Литература

1. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. М.: Издательство АСВ, 2002. 288 с.
2. Языев Б.М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров. Дисс. канд. техн. наук. М., 1990. 171 с.
3. Языев Б. М., Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Козельская М. Ю. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона // Научное обозрение. №11. Часть 3. 2014. С.759–763.
4. Литвинов С. В., Козельский Ю. Ф., Языев Б. М. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений // Инженерный вестник Дона, 2012, № 3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.
5. Языев Б. М., Литвинов С. В., Козельский Ю. Ф. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей//



Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL:
ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_yaziev.pdf_1616.pdf.

6. Гуревич Г.И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай 3 измерений с учетом малых деформаций упругого последействия // Труды ИФЗ АН СССР. 1959. №2. С. 169.

7. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.

8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep//Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.

9. Бабич В. Ф., Рабинович А. Л. Влияние температуры на механические характеристики некоторых эпоксидных связующих // Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. 1967. С. 150–153.

10. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL:
ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.

References

1. Andreev V.I. Nekotorye zadachi i metody mehaniki neodnorodnyh tel: monografija. M.: Izdatel'stvo ASV, 2002. 288 s. [Disa probleme dhe metoda në mekanizmin e heterogjene solids: monografi. M.: shtëpia Botuese e DIA, 2002. 288 p.]

2. Jazyev B.M. Nelinejnaja polzuchest' nepreryvno neodnorodnyh cilindrov. Diss. kand. tehn. nauk. M., 1990. 171 p. [Nonlinear creep continuously inhomogeneous cylinders. Diss. Cand. tech. Sciences. M., 1990. 171 p.]



3. Jazyev B. M., Chepurnenko A. S., Litvinov S. V., Kozel'skaja M. Ju. Nauchnoe obozrenie. №11. Chast' 3. 2014. S.759–763.
4. Litvinov S. V., Kozel'skij Ju. F., Jazyev B. M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.
5. Jazyev B. M., Litvinov S. V., Kozel'skij Ju. F. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2 URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_yaziev.pdf_1616.pdf.
6. Gurevich G.I. Ob obobshhenii uravnenija Maksvella na sluchaj 3 izmerenij s uchetom malyh deformacij uprugogo posledejstvija .Trudy IFZ AN SSSR. 1959. №2. p. 169.
7. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep. Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.
8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep. Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.
9. Babich V. F., Rabinovich A. L. Fiziko-himija i mehanika orientirovannyh stekloplastikov. 1967. pp. 150–153.
10. Kozel'skaja M.Ju., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.