Применение релятивисткой теории в ракетодинамике

Ю.А.Новикова, Г.В. Терещенко, М.Б. Рыжиков

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: В данной работе получены и исследованы основные соотношения релятивистской ракетодинамики в случае многокомпонентной реактивной струи. Рассмотрены различные типы релятивистских ракет с однокомпонентной реактивной струей как частные случаи общей теории. Выполнен предельный переход к нерелятивистской ракетодинамике.
Ключевые слова: релятивисткая динамика, многокомпонентная реактивная струя, ионный двигатель, фотонная ракета.

Классическая механика тела переменной массы, созданная выдающимися русскими учеными И. В. Мещерским [1] и К. Э. Циолковским [2], является основой существующей ракетодинамики, которую можно назвать нерелятивистской. Для современных ракет на химическом топливе максимальные скорости и скорости истечения реактивных струй много меньше скорости света в вакууме *c*. Поэтому существующие ракеты можно назвать нерелятивистско-нерелятивистскими, или чисто нерелятивистскими. Однако в ближайшем будущем надо ожидать появления нерелятивистско-релятивистских ракет, например, ионных [3], у которых максимальные скорости гораздо меньше скорости света в вакууме, но скорости истечения реактивных струй сравнимы с ней.

Уже в период 1997-1999 годов полеты спутников связи с использованием систем ионных двигателей и полет экспериментальной автоматической межпланетной станции Deep Space 1 подтвердили, что эти вспомогательные и основные двигательные установки достигли высокого уровня готовности к полету [4].

В отдаленном будущем возможно создание релятивистско-релятивистских или чисто релятивистских ракет [5-7], для которых максимальные скорости и скорости истечения реактивных струй являются субсветовыми, т. е. сравнимы со скоростью света в вакууме.

В настоящее время релятивистские ракеты рассматриваются главным образом в научно-фантастических романах и фильмах, а не в научных работах [8,9]. Эго вполне понятно. Однако уже сейчас возможно построить релятивистскую ракетодинамику, описывающую чисто релятивистские ракеты, из соотношений которой путем предельных переходов получаются как частные случаи формулы, описывающие релятивистско-нерелятивистские, нерелятивистско-релятивистские и чисто нерелятивистские ракеты. Эту ракетодинамику можно назвать общей теорией ракет, так как она охватывает не только все существующие и разрабатываемые, но и все гипотетические типы ракет. Заметим, что релятивистская ракетодинамика должна обязательно учитывать многокомпонентность реактивной струи, так как принципиально возможны ракеты с несколькими различными реактивными струями, истекающими с различными скоростями из сопел ракеты.

Релятивистская механика тела с переменной массой покоя в настоящее время разработана достаточно, так что основа для построения релятивистской ракетодинамики имеется. В научной литературе уже были рассмотрены некоторые типы чисто релятивистских ракет с однокомпонентными реактивными струями. Из общей теории, предлагаемой в данной работе, все эти типы ракет получаются как частные случаи.

Рассмотрим чисто релятивистскую ракету, которую в дальнейшем для краткости будем называть просто релятивистской, с многокомпонентной реактивной струей в собственной системе отсчета, которая жестко связана с ракетой. Поэтому скорость ракеты в собственной системе отсчета равна нулю. Все величины, характеризующие ракету в собственной системе отсчета, снабжены индексом штрих. Из закона сохранения массы-энергии [10] за собственное время dt' следует, что:

$$dE' = -d\mu' c^2 = -\sum_{i=1}^{n} d\mu_i' c^2 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i (1-\alpha_i) d\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\omega_i^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

так как ракета и отброшенные продукты сгорания образуют замкнутую систему. В выражении (1) dE' – это приращение энергии ракеты; $d\mu'$ - масса отброшенных продуктов сгорания, n - число компонент топлива; $d\mu_i'$ - масса отброшенных продуктов сгорания i-й компоненты топлива; $d\mu_0$ - масса покоя сгоревшего топлива; весовая доля i-ой компоненты топлива, причем

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \qquad (2)$$

где α_i - отношение энергии, выделяющейся при сгорании i-й компоненты топлива, к её энергии покоя; c - скорость света в вакууме, ω_i - величина скорости истечения продуктов сгорания i-й компоненты топлива. Все скорости истечения считаются постоянными относительно ракеты. Кроме того, предполагается пока, что все $\omega_i < c$, т. е. среди продуктов сгорания нет электромагнитного излучения.

По закону сохранения импульса за собственное время dt' будем иметь, что:

$$d\vec{p}' = -\sum_{i=1}^{n} d\mu_i' \vec{\omega}_i, \qquad (3)$$

где $d\vec{p}'$– приращение импульса ракеты. Выбирая ось абсцисс по направлению $d\vec{p}'$, получим, что $\omega_{ix} = -\omega_i$, $dp_x' = dp'$. Поэтому выражение (3) принимает вид:

$$dp' = \sum_{i=1}^{n} d\mu_i' \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i (1-\alpha_i) \omega_i d\mu_0}{\sqrt{1-\frac{\omega_i^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

Выражения (1), (3) и (4) справедливы в собственной системе отсчета. Для перехода к так называемой неподвижной системе отсчета, связанной с «неподвижной» Землей, следует воспользоваться хорошо известными формулами преобразования составляющих четырехмерного вектора импульса при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Из этих формул следует, что:

$$dp = \frac{dp' + \frac{\upsilon}{c^2} dE'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad dE = \frac{dE' + \upsilon dp'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \; dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

где dp и dE - соответственно приращения величины импульса и энергии ракеты за время dt в неподвижной системе отсчета, υ - величина скорости ракеты в этой системе. Если υ_i - величина скорости истечения продуктов сгорания i-ой компоненты топлива в неподвижной системе координат и ось абсцисс выбрана по направлению движения ракеты, то тогда релятивистский закон сложения скоростей дает, что:

$$\upsilon_i = \frac{\omega_i - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon \omega_i}{c^2}} \tag{6}$$

На основании выражения (6) легко найти, что:

$$\sqrt{1 - \frac{\upsilon_i^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_i^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon \omega_i}{c^2}}, \tag{7}$$

Подставляя в выражения (5) выражения (1) и (4), получим с помощью выражений (7), что:

$$dp = d\left[\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i (1 - \alpha_i) \upsilon_i d\mu_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_i^2}{c^2}}} \tag{8}$$

$$dE = d\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)c^2 d\mu_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_i^2}{c^2}}} \qquad (9)$$

где m_0 - текущая масса покоя ракеты. Выражения (8) и (9) справедливы в неподвижной системе отсчета, которая интересует, нас в данной работе. Сравнивая выражения (8) и (9) соответственно с выражениями (4) и (1), находим, что первые отличаются от последних только величинами скоростей истечения, как и н должно быть согласно специальному принципу относительности.

Подставляя в выражения (9) и (8) соотношения (7), получим, что:

$$dm = d\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right] = -\frac{d\mu_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\sum_{i=1}^{n}c_i\left(1-\frac{\upsilon\omega_i}{c^2}\right) \text{ и} \qquad (10)$$

$$dp = \frac{dm_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\omega_i - \upsilon\right), \qquad (11)$$

где постоянные коэффициенты c_i определяются формулой:

$$c_i = \frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)}{\sqrt{1-\frac{\omega_i^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

Если разделить выражение (10) почленно на выражение (11), то после элементарных преобразований будем иметь, что:

$$\frac{dm_0}{m_0} = -\frac{d\upsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i\omega_i} = -F\cdot\frac{d\upsilon}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (13)$$

Интегрирование выражения (13) дает обобщение знаменитой формулы К. Э. Циолковского на случай релятивистской ракеты с многокомпонентной реактивной струей:

$$\frac{m_0}{M_0} = \nu = \left[\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}\right]^{\frac{c}{2}F} \tag{14}$$

где M_0 - стартовая масса ракеты. Выражение (14) является основным в релятивистской ракетодинамике и играет в ней ту же роль, что и формула Циолковского в нерелятивистской ракетодинамике.

Из выражения (10) с помощью выражения (13) и основной формулы (14) легко найти, что:

$$d\mu_0 = \frac{m_0 d\upsilon}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\sum_{i=1}^{n} c_i w_i} = \frac{M_0\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)^{\frac{c}{2}F-1}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^{\frac{c}{2}F+1}\sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i}. \tag{15}$$

Несложное интегрирование выражения (15) с помощью подстановки:

$$\xi = \left(1-\frac{v}{c}\right) \Big/ \left(1+\frac{v}{c}\right)$$

дает массу покоя топлива, сгоревшего за время разгона ракеты до скорости υ,

$$\mu_0 = \frac{M_0(1-\upsilon)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \tag{16}$$

где ν определяется основной формулой (14). Выражение (16) является очень важным. Энергия, которая освобождается при сгорании топлива, очевидно, будет равна:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \mu_0 c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} M_0 c^2 (1-\nu), \tag{17}$$

а кинетическая энергия ракеты составляет:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = M_0 c^2 \nu \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] \tag{18}$$

Определим теперь кинетическую энергию реактивной струи, т. е. кинетическую энергию продуктов сгорания, выброшенных из сопел ракеты за время ее разгона до скорости υ. Очевидно,

$$\tau=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_i^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\int_0^{\upsilon}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(1-\alpha_i\right)c^2 d\mu_0. \tag{19}$$

С помощью выражений (9) и (16) получим, что:

$$\tau=M_0c^2\cdot\left[\left(1-\nu\Big/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)-\frac{(1-\nu)}{\sum_{i=1}^{n}c_i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)\right]. \tag{20}$$

По закону сохранения энергии $Q=T+\tau$. с помощью выражений (17), (18) и (20) легко вывести из закона сохранения энергии условие:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)}{\sqrt{1-\frac{\tau_i^2}{c^2}}}=1, \tag{21}$$

называемое нами в дальнейшем топливным условием. Это условие также имеет большое значение для релятивистской ракетодинамики.

Рассмотрим релятивистскую ракету с многокомпонентной реактивной струей в собственной системе отсчета, когда среди продуктов сгорания присутствует электромагнитное излучение. Выражение (1) заменится на:

$$dE'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)d\mu_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\omega_i^2}{c^2}}}-\beta_nc^2d\mu_0, \qquad (22)]$$

где β_n - весовая доля n-й компоненты топлива, которая при сгорании превращается в электромагнитное излучение, а выражение (4) заменится на:

$$dp'=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)\omega_id\mu_0}{\sqrt{1-\frac{\omega_i^2}{c^2}}}+\beta_n\cdot c\cdot d\mu_0. \tag{23}$$

Так как α_n=1 и ω_n=c, то отношение:

$$\frac{1-\alpha_n}{\sqrt{1-\frac{\omega_n^2}{c^2}}}=1 \tag{24}$$

и согласно выражению (12) c_n=β_n. На основании соотношения (24) выражения (22) и (23) могут быть записаны соответственно в виде (1) и (4), так что именно эти выражения являются общими. Переходя к неподвижной системе отсчета с помощью формул (5), получим, используя выражения (7) и (24), что:

$$dE=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)c^2 d\mu_0}{\sqrt{1-\upsilon_i^2/c^2}} \text{ и} \tag{25}$$

$$dp=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\left(1-\alpha_i\right)\upsilon_i d\mu_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_i^2}{c^2}}}, \tag{26}$$

причём $\upsilon_n = c$. Таким образом, выражения (8) и (9) сохраняют силу. Отсюда следует, что все соотношения, полученные в разделах 2 и 3, являются справедливыми и точными, если для компоненты топлива, превращающейся при сгорании в электромагнитное излучение, учитывать выражение (24).

Рассмотрим главнейшие частные случаи релятивистских ракет, вытекающие из предложенной общей теории. Во-первых, рассмотрим термоядерную релятивистскую ракету. Топливом является водород, продуктом сгорания - гелий, реактивная струя однокомпонентна. Основное выражение (14) принимает вид:

$$\frac{m_0}{M_0}=\nu=\left[\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}\right]^{\frac{c}{2\omega}}, \tag{27}$$

а топливное условие (21) дает:

$$\sqrt{1-\omega^2/c^2}=1-\alpha, \tag{28}$$

как и должно быть. Из выражения (28) следует, что ω = 0,115 с, так как для термоядерной реакции превращения водорода в гелий α=0,0066.

Рассмотрим ионную релятивистскую ракету. Это несколько сложнее. Внутри такой ракеты имеются запасы легко ионизируемого металла (например, рубидия или цезия), дающего тяжелые положительные ионы, и реактор, являющийся источником энергии, необходимой для ионизации. Поэтому для ионной релятивистской ракеты (индекс 1 относится к металлу, индекс 2 - к реакторному топливу) будем иметь, что $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1 - \beta$, $\omega_1 = \omega$, $\alpha_2 = \alpha$, $\beta_2 = \beta$ и $\omega_2 = 0$.

Применяя выражение (13), получим:

$$F = \frac{1}{\omega} + \frac{\beta(1-\alpha)}{(1-\beta)\omega}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}, \qquad (29)$$

а топливное условие (21) дает:

$$\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1-\beta}{1-\beta\cdot(1-\alpha)}. \qquad (30)$$

Выражение (30) показывает, что если источником энергии служит термоядерный реактор (α = 0,0066), то скорость истечения ионной реактивной струи будут значительно меньше скорости света в вакууме при всех разумных значениях β (даже при β = 0,3, ω/c = 0,075). Однако если источником энергии является аннигиляционный реактор (α = 1), то при всех разумных значениях β скорости истечения ионной реактивной струи будут субсветовыми (β = 0,3, ω/c = 0,72). Отметим, что для случая аннигиляционного реактора справедливо выражение (27), так как α = 1.

Рассмотрим фотонную ракету [11] как предельный случай релятивистских ракет. Топливом служат водород и антиводород, продуктом сгорания является гамма-излучение, реактивная струя однокомпонентна. Выражение (27) примет вид:

$$\frac{m_0}{M_0} = \nu = \left[\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (31)$$

так как ω = c, а топливное условие (28) превращается в единицу. Таким образом из предложенной общей теории легко получить как частные случаи все известные из научной литературы результаты для релятивистских ракет.

В заключение рассмотрим предельный переход к существующей нерелятивистской ракетодинамике, т. е. к ракетам на химическом топливе. Для этих ракет $\omega_i \ll c$, $\upsilon \ll c$ и $\alpha_i \ll 1$, так как топливо химическое. Согласно выражению (12) получим, что c_i а с помощью выражений (13), (21) и (2) находим, что:

$$F = 1\Big/\sum_{i=1}^{n}\beta_i\omega_i. \qquad (32)$$

Основное выражение (14) принимает вид:

$$\frac{m_0}{M_0} = \frac{m}{M} = \nu = \left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)^{cF} = e^{-\upsilon F}, \qquad (33)$$

т. е. превращается в формулу К. Э. Циолковского для случая многокомпонентной реактивной струи. При n=1 имеем обычную формулу Циолковского. Выражение (16) переходит в:

$$\mu_0 = \mu = M(1-\nu), \qquad (34)$$

где ν определяется формулой (33).

Индекс нуль у масс покоя в дальнейшем можно не писать, так как в нерелятивистском случае масса равна массе покоя. Выражение (17) принимает вид:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i M(1-\nu), \qquad (35)$$

а выражение (18) будет:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{M\nu\upsilon^2}{2} \qquad (36)$$

$$\tau = \frac{1}{2} M \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega_i^2 - \nu \left(\upsilon^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega_i^2 \right) \right]. \qquad (37)$$

$$Q = \frac{1}{2} M (1 - \nu) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega_i^2 \qquad (38)$$

Выражения (37) и (38) при n = 1 переходят в известные выражения для однокомпонентной реактивной струи. Таким образом, предельный переход к нерелятивистской ракетодинамике не представляет трудностей. Можно рассмотреть также без всяких затруднений менее важные в настоящее время предельные переходы к нерелятивистско-релятивистским и релятивистско-нерелятивистским ракетам. Заметим, что всю изложенную общую теорию можно, разумеется, расширить на релятивистские ракеты с неидеальными двигателями.

Литература

1. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехиздат, 1952. 281 с.

2. Циолковский К. Э. Труды по ракетной технике. М.: Оборонгиз, 1947. 368 с.

3. Жильцов В. А., Кулыгин В.М. Термояд и космос // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2018. Т. 41. № 3. С. 5-20.

4. Sovey J.S., Rawlin V.K., Patterson M.J. Ion propulsion development projects in U.S.: Space electric rocket test I to deep space 1 // Journal of Propulsion and Power. 2001. 17(3). p. 517-526.

5. Semyonov O.G. Relativistic rocket: Dream and reality // Acta Astronautica. 2014. 99(1). p. 52-70.

6. Walter U. Relativistic rocket and space flight // Acta Astronautica. 2006. 59(6), p. 453-461.

7. Holmlid L., Zeiner-Gundersen S. Future interstellar rockets may use laser-induced annihilation reactions for relativistic drive. // Acta Astronautica. 2020. 175. p. 32-36.

8. Фиговский О.Л. В интервале пяти лет появятся инновации, которые сегодня кажутся фантастикой // Инженерный вестник Дона, 2011, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/643/.

9. Фиговский О.Л. От нано-науки к нано-будущему // Инженерный вестник Дона, 2010, № 3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2010/201/.

10. Günther H., Müller V. The special theory of relativity: Einstein's world in new axiomatics. Singapore: Springer, 2019. 542 p.

11. Lun A.W.C. Photon rockets and radiation reactions // Helvetica Physica Acta. 1996. 69(3). p. 348-352.

References

1. Meshherskij I. V. Raboty po mehanike tel peremennoj massy [Works on the mechanics of bodies of variable mass]. M.: Gostehizdat, 1952. 281 p.

2. Ciolkovskij K. Je. Trudy po raketnoj tehnike [Proceedings on rocketry]. M.: Oborongiz, 1947. 368 p.

3. Zhiltsov V.A., Kulygin V.M. Questions of atomic science and technology. Series: Thermonuclear Fusion. 2018. V. 41. No. 3. p. 5-20.

4. Sovey J.S., Rawlin V.K., Patterson M.J. Journal of Propulsion and Power. 2001. 17(3). p. 517-526.

5. Semyonov O.G. Acta Astronautica. 2014. 99(1). p. 52-70.

6. Walter U. Acta Astronautica. 2006. 59(6), p. 453-461.

7. Holmlid L., Zeiner-Gundersen S. Acta Astronautica. 2020. 175. p. 32-36.

8. Figovskiy O.L. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/643/.

9. Figovskiy O.L. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, № 3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2010/201/.

10. Günther H., Müller V. The special theory of relativity: Einstein's world in new axiomatics. Singapore: Springer, 2019. 542 p.

11. Lun A.W.C. Helvetica Physica Acta. 1996. 69(3). p. 348-352.