Инженерный вестник Дона, №5 (2020)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2020/6496

Вычисление цен опционов в моделях со стохастической волатильностью

П.А. Лужецкая[1], О.Е. Кудрявцев[2]

[1]Донской государственный технический университет
[2]Ростовский филиал Российской таможенной академии

Аннотация: В статье мы предлагаем новый эффективный метод вычисления цен барьерных опционов в моделях со стохастической волатильностью, которые могут допускать скачки. Мы используем условие «локальной согласованности» для аппроксимации процесса вариации конечной, но достаточно плотной цепью Маркова. В результате, мы получаем модель Леви с переключением режимов по волатильности, размерность соответствующей задачи снижается на единицу и сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений. Мы применяем метод приближенной факторизации Винера-Хопфа для эффективного решения полученной системы. Метод может быть применен для случая моделей Хестона, Бейтса и других моделей Леви со стохастической волатильностью. Численные эксперименты показывают, что предложенный метод на примере модели Хестона хорошо согласуется с гибридными конечно-разностными схемами и методом симуляций Монте-Карло.
Ключевые слова: математическое моделирование, опционы, численные методы, марковские цепи, стохастическая волатильность, модель Хестона

Адекватное моделирование финансовых рынков является одной из приоритетных задач финансовой математики. В качестве главного недостатка модели геометрического броуновского движения или более общей экспоненциальной модели Леви можно назвать постоянную дисперсию приращений за фиксированный промежуток времени. В связи с этим в последние годы все чаще внедряются модели со случайной волатильностью [1,2,3]. В указанных моделях волатильность представляет собой диффузионный процесс, коррелированный с базисным процессом.

Первые общие модели со стохастической волатильностью, обобщающие геометрическое броуновское движение, появились в конце восьмидесятых (подробнее, см. [4]). Рассматривая случайную волатильность, можно объяснить эффект “улыбки волатильности” невозможный в классической модели Блэка-Шоулса. Вместе с тем, инфинитезимальный оператор соответствующего процесса становился уже двумерным. В результате, базовые задачи в этих моделях, такие как вычисление безарбитражных цен европейских опционов, сводились к численному решению трёхмерного уравнения с частными производными, не имеющего явных формул для решения.

В более поздних работах предлагалось рассматривать модель, в которой базовый актив и волатильность не коррелируют, и использовать осреднение классической формулы Блэка-Шоулса по траекториям волатильности. Однако отсутствие корреляции не позволяет описать важные эффекты асимметрии распределений, наблюдаемые на финансовых рынках.

Основополагающей в практическом и теоретическом плане можно считать работу [5], в которой была построена популярная до сих пор модель Хестона (Heston model). В этой модели цена базового актива S_t коррелирует с волатильностью, которая следует процессу квадратного корня $\sqrt{V_t}$, использовавшемуся в [6]. Таким образом, мы получаем два стохастических дифференциальных уравнения:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^1, \qquad (1)$$

$$\mathrm{dV_t} = \kappa_V(\theta_V - V_t)dt + \sigma_V\sqrt{V_t}dW_t^2, \qquad (2)$$

где V_t – процесс вариации (дисперсии), κ_V – скорость возврата к среднему, θ_V– долгосрочная вариация, r – безрисковая процентная ставка, σ_V – волатильность вариации, а винеровские процессы W_t^1 и W_t^2 имеют коэффициент корреляции ρ.

Согласно эмпирическим наблюдения за финансовыми рынка, волатильность обладает свойством возврата к среднему (англ. “mean reversion”), т.е. имеет тенденцию возвращаться к среднему значению после достижения экстремума. Это свойство учтено в модели Хестона, (см. (1)-(2)).

Однако, модель Хестона не решала проблему непрерывных траекторий. В 1996 г. в работе [7] было предложено добавить к модели со стохастической волатильностью [5] пуассоновский процесс с нормально распределёнными скачками. Так появилась не менее популярная модель Бейтса (Bates model).

В связи с двухмерностью инфинитезимального оператора такой модели, возрастает и размерность соответствующих задач. С целью снижения размерности ряд авторов (см., напр., [8]) предлагают использовать марковскую цепь с непрерывным временем для аппроксимации процесса волатильности. В результате, мы получаем модель Леви с переключением режимов по волатильности. Наряду с указанной аппроксимацией, можно учитывать корреляционную структуру и включить зависимость скачков от волатильности.

Аппроксимация диффузионных процессов с помощью марковских цепей подробна описана в работе [9]. Марковская цепь с непрерывным временем строится так, чтобы вероятности перехода из каждого состояния сохраняли соответствующие мгновенные снос и волатильность. При этом, для каждого выбранного состояния только соседние состояния могут быть достигнуты, по аналогии с триномиальным деревом.

Опишем схему аппроксимации на примере общего процесса со стохастической волатильности и скачками вида:

$$d\log S_t = \mu(V_t)dt + \sigma(V_t)dW_t^1 + dX_t,$$
$$dV_t = \alpha(V_t)dt + \beta(V_t)dW_t^2, \qquad (3)$$

где V_t –процесс вариации, $\mu(V_t)$ и $\sigma(V_t)$ - снос и волатильность диффузионной части процесса $\log S_t$, соответственно, зависящие от вариации V_t;

X_t – чисто негауссовский процесс Леви, коэффициент корреляции W_t^1 и W_t^2 равен ρ.

Пусть процесс V_t аппроксимируется марковской цепью V_t^h, принимающей значения в дискретном подмножестве вещественной оси $V^h = \{V_1^h, V_2^h, \dots, V_N^h\}$, где h – длина шага между соседними состояниями, N –

число состояний. Обозначим через $\Lambda = \left(\lambda_{kj}\right)$ – матрицу интенсивностей данной марковской цепи, которая должна удовлетворять условию локальной согласованности (подробнее см. [9]). Приведем одну из таких приближенных схем, где матрица Λ имеет трехдиагональный вид со следующими элементами:

$$\lambda_{k,k-1} = \frac{1}{2h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 + \frac{1}{h}\alpha_-\left(V_k^h\right),$$

$$\lambda_{k,k} = -\frac{1}{h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 - \frac{1}{h}\left|\alpha\left(V_k^h\right)\right|,$$

$$\lambda_{k,k+1} = \frac{1}{2h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 + \frac{1}{h}\alpha_+\left(V_k^h\right),$$

где $0 < \mathrm{k} < N, \mathrm{a}_+ = \max\{0, \mathrm{a}\}$, а $\mathrm{a}_- = \max\{0, -\mathrm{a}\}$.

Первое и последнее состояния выберем отражающими, чтобы вариация не оставалась в пограничных состояниях.

$$\lambda_{0,0} = -\frac{1}{2h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 - \frac{1}{h}\alpha_+\left(V_k^h\right),$$

$$\lambda_{0,1} = \frac{1}{2\mathrm{h}^2}\beta\left(\mathrm{V}_\mathrm{k}^\mathrm{h}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{h}}\alpha_+\left(\mathrm{V}_\mathrm{k}^\mathrm{h}\right),$$

$$\lambda_{N,N-1} = \frac{1}{2h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 + \frac{1}{h}\alpha_-\left(V_k^h\right),$$

$$\lambda_{N,N} = -\frac{1}{2h^2}\beta\left(V_k^h\right)^2 - \frac{1}{h}\alpha_-\left(V_k^h\right).$$

Заметим, что все элементы вне главной диагонали матрицы Λ должны быть неотрицательными, а диагональные элементы удовлетворять соотношению: $\lambda_{kk} = -\sum_{j\neq k}\lambda_{kj}$.

Отметим, что вероятность перехода из состояния k, соответствующего моменту времени t_1 в состояние j, соответствующее моменту времени t_2 равна

$$\mathrm{P}\left(V_{t_2} = j \middle| V_{t_1} = k\right) = \{\exp\left((t_2 - t_1)\Lambda\right)\}_{kj}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(V_{t+\Delta t} = j | Z_t = k) = \begin{cases} \lambda_{kj}\Delta t + o(\Delta t), k \neq j; \\ 1 + \lambda_{kk}\Delta t + o(\Delta t), k = j. \end{cases}$$

Согласно \cite{Ch1}, процесс (3) может быть приближённо описан с учётом корреляционной структуры моделью с переключением состояний V_t^h следующим образом. Пусть текущее состояние $V_t^h = V_j^h$, тогда

$$d\log S_t = \left(\mu\left(V_j^h\right) - \rho\frac{\sigma\left(V_j^h\right)\alpha\left(V_j^h\right)}{\beta\left(V_j^h\right)}\right)dt +$$

$$+\sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma\left(V_j^h\right)dW_t + \rho\frac{\sigma\left(V_j^h\right)}{\beta\left(V_j^h\right)}\Delta V_t^h + dX_t, \qquad (4)$$

где W_t – стандартное броуновское движение, а процесс изменения состояния ΔV_t^h задаётся формулой:

$$\Delta V_t^h = \begin{cases} +h, \text{ с вероятностью } \lambda_{k,k+1}dt + o(dt), \\ -h, \text{ с вероятностью } \lambda_{k,k-1}dt + o(dt), \\ 0, \text{ с вероятностью } 1 + \lambda_{k,k}dt + o(dt). \end{cases}$$

Таким образом, процесс ΔV_t^h равен нулю за исключением случаев, когда марковская цепь для волатильности меняет состояние.

Инфинитезимальный оператор L_j процесса (4) при условии, что $\log S_0 = x$, а $V_0 = V_j^h$ имеет вид:

$$L_j f(x,j) = \lambda_{j,j}f(x,j) + \left(\mu\left(V_j^h\right) - \rho\frac{\sigma\left(V_j^h\right)\alpha\left(V_j^h\right)}{\beta\left(V_j^h\right)}\right)\partial_x f(x,j) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\rho^2)\cdot\sigma^2\left(V_j^h\right)\partial_x^2 f(x,j) + \lambda_{j,j+1}f\left(x + \rho\frac{\sigma\left(V_j^h\right)}{\beta\left(V_j^h\right)}h, j+1\right) +$$

$$+\lambda_{j,j-1}f\left(x - \rho\frac{\sigma\left(V_j^h\right)}{\beta\left(V_j^h\right)}h, j-1\right) + L_X f(x,j),$$

где L_X – инфинитезимальный оператор процесса Леви X_t.

В статье мы предлагаем новый эффективный метод вычисления барьерных опционов для широкого класса моделей со стохастической волатильностью. Для определенности рассмотрим опционы put с ценой исполнения K, барьером снизу H и сроком T. Обозначим цену такого опциона в модели (1) в момент времени t при условии, что $\log S_t/H =$

x, $V_t = v$, через $F(t,x,v)$. Мы используем условие локальной согласованности для приближения процесса волатильности конечной, но достаточно плотной описанной выше марковской цепью. Таким образом, мы получаем приближенную модель (4) с переключением состояний V_t^h. В результате размерность задачи снижается на единицу и сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$(\partial_t + L_j - r)V(t,x,j) = 0, t < T, x > 0,$$
$$V(T,x,j) = (K - He^x)_+, x > 0,$$
$$V(t,x,j) = 0, t \leq T, x \leq 0.$$

Здесь L_j обозначает инфинитезимальны генератор, соответствующий состоянию j процесса вариации (4), а $V(t,x,j) = F(t,x,V_j^h)$.

Для решения полученной системы можно применить любую из стандартных конечно-разностных схем, но при наличии скачков этот подход может встретить определенные трудности, связанные с аппроксимацией нелокальной интегральной части. Вместо этого, мы предлагаем воспользоваться алгоритмом приближенной факторизации, который применим для вычисления барьерных опционов в моделях Леви с переключением режимов по параметрам процесса (см. [10]). Мы решаем полученную систему, применяя экстраполяцию Ричардсона по количеству дат мониторинга пересечения барьера.

В качестве примера рассмотрим модель Хестона со следующими параметрами: начальная вариация $V_0 = 0.01$, скорость возврата к среднему $\kappa_V = 2.0$, долгосрочная вариация θ_V=0.01, безрисковая процентная ставка r=9.53%, волатильность вариации $\sigma_V = 0.2$, коэффициент корреляции $\rho = 0.5$.

В таблице №1 представлены цены барьерного опциона put с барьером снизу $H = 90$ и ценой исполнения $K = 100$ при деньгах и вне денег, рассчитанные тремя численными методами: методом Винера-Хопфа, методом деревьев [11] и оптимизированным методом Монте-Карло [12].

Таблица № 1

Цены барьерного опциона put с барьером снизу в модели Хестона

Цена акции	Цена опциона		
	Метод Винера-Хопфа	Метод деревьев	Метод Монте-Карло
S=$100	0.328340	0.323404	0.306392
S=$105	0.101631	0.106371	0.100328
S=$110	0.028335	0.030285	0.028897

Как видно из таблицы № 1, что все методы хорошо согласуются. В деньгах наш метод лучше согласуется с методом деревьев [11], а вне денег – с методом Монте-Карло [12].

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00910А.

Литература

1. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC.
2. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Методы анализа волатильности российского финансового рынка для широкого класса моделей // Инженерный вестник Дона, 2016, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3924.
3. Мисюра В.В., Мисюра И.В. Обработка и фильтрация сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
4. Hull, J.C., 2012. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall.
5. Heston, S.L., 1993. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies, 6: 327-344.
6. Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross, 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, 53: 385-408.

7. Bates, D.S., 1996. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options. Review of Financial Studies, 9: 69–107.
8. Chourdakis, K., 2005. Levy Processes Driven by Stochastic Volatility. Asia-Pacific Finan. Markets, 12: 333-352.
9. Kushner, H.J., 1990. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. SIAM Journal of Control and Optimization, 5: 999-1048.
10. Кудрявцев О.Е. Быстрый и эффективный метод оценивания барьерных опционов в моделях Леви с переключением режимов по параметрам процесса // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2010. №1 (93). С. 136-141.
11. Briani, D.M., L. Caramellino and A. Zanette, 2017. A Hybrid Approach for the Implementation of the Heston Model. IMA Journal of Management Mathematics, 4: 467-500.
12. Alfonsi, A., 2010. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models. Mathematics of Computation, 79: 209-237.

References

1. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC.
2. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Inzenernyj vestnik Dona, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3924.
3. Misyura V.V., Misyura I.V. Inzenernyj vestnik Dona, 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
4. Hull, J.C., 2012. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall.
5. Heston, S.L., 1993. Review of Financial Studies, 6: 327-344.
6. Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross, 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, 53: 385-408.

7. Bates, D.S., 1996. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options. Review of Financial Studies, 9: 69–107.
8. Chourdakis, K., 2005. Levy Processes Driven by Stochastic Volatility. Asia-Pacific Finan. Markets, 12: 333-352.
9. Kushner, H.J., 1990. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. SIAM Journal of Control and Optimization, 5: 999-1048.
10. Kudryavtsev O.E. Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye. 2010. №1 (93). pp. 136-141.
11. Briani, D.M., L. Caramellino and A. Zanette, 2017. IMA Journal of Management Mathematics, 4: 467-500.
12. Alfonsi, A., 2010. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models. Mathematics of Computation, 79: 209-237.