

## Математические методы идентификации пеленгов беспилотных летательных аппаратов в группе

*С.В. Васильев<sup>1</sup>, В.О. Ефимов<sup>2</sup>, А.Н. Пикулев<sup>3</sup>,  
А.А. Тяжелова<sup>3</sup>, Л.М. Сарварова<sup>3</sup>, В.Ю. Колесников<sup>3</sup>,  
А.В. Лукин<sup>2</sup>, И.С. Гайнутдинов<sup>2</sup>, Е.П. Денисенко<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Фонд перспективных исследований, Москва

<sup>2</sup>Швабе, Государственный институт прикладной оптики, Казань

<sup>3</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань

**Аннотация:** Обсуждены вопросы математической интерпретации результатов траекторных измерений с точки зрения повышения точности идентификации пеленгов беспилотных летательных аппаратов при их движении в «рое» - группе. Предложены варианты идентификации горизонтальных и пространственных пеленгов. Для каждого из вариантов предложены критерии идентификации принадлежности измеренных значений одному и тому же объекту в группе и условия их достижения. Показана ситуация возникновения ложных засечек. Определено, что для устранения ложных триад пеленгов и раскрытия неоднозначностей необходимы дополнительные меры по идентификации, к числу которых можно отнести, в частности, использование комбинаторных алгоритмов исчерпывающего поиска. Для их изучения необходимо разработать экспериментальную статистическую модель с алгоритмическим описанием причинно-следственных связей, что является дальнейшим развитием настоящей работы.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, группа объектов, идентификация пеленгов, горизонтальный пеленг, пространственный пеленг, критерии идентификации, ложная засечка.

### Введение

Революционное применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в различных отраслях промышленности, услуг, связи, решении антитеррористических задач и др., выдвигают на первое место задачи их траекторных измерений и идентификации пеленгов, особенно при движении в «рое» группе [1-3], при меняющихся погодных условиях [4-8] и использовании различных оптических и оптико-электронных средств [9-13].

Задача по идентификации пеленгов БПЛА в группе может быть сформулирована следующим образом.

В некоторой области пространства размещены произвольным образом  $n$  однотипных объектов. Имеются три измерительных пункта (ИП) с

координатами средств измерения (СИ)  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$  и  $X_3, Y_3, Z_3$ . Из этих пунктов в один и тот же момент времени измерены пеленги объектов:  $(\beta_{ij}, \varepsilon_{ij})$ , где  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$ , а затем пронумерованы в произвольном порядке независимо друг от друга. Требуется идентифицировать пеленги, полученные разными СИ.

Поскольку в задаче предполагается наличие угловых координат объектов, то идентификация пеленгов может производиться с использованием либо только горизонтальных (азимутальных) углов, полученных с разных ИП, либо не только горизонтальных, но и вертикальных углов (углов места). Первый вариант назовем идентификацией горизонтальных пеленгов (ИГП), второй – идентификацией пространственных пеленгов (ИПП).

### Идентификация горизонтальных пеленгов

В ситуации, когда группа БПЛА наблюдается и регистрируется под углами места, близкими или равными нулю, при идентификации пеленгов могут быть использованы только азимутальные углы.

Пусть в какой-то момент времени пеленгатор первого измерительного пункта (ИП-1) зарегистрировал  $l$  объектов, азимуты пеленгов которых равны  $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1l}$ . Пеленгаторы ИП-2 и ИП-3 зарегистрировали в это же время соответственно  $m$  и  $n$  объектов ( $l \leq m \leq n$ ), азимуты которых равны  $\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2m}$  и  $\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3n}$  (угловые координаты приведены к единой нормальной земной системе).

Уравнение прямой, проходящей в горизонтальной плоскости через точку стояния пеленгатора ИП-1 в направлении  $\beta_{1i}$  ( $i$  – номер объекта), имеет вид

$$x = x_1 + \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i})(z - z_1), \quad (1)$$

где  $x_1, z_1$  – координаты точки стояния пеленгатора ИП-1, м.

Аналогично записывается уравнение прямой с использованием  $j$ -го объекта, зарегистрированного пеленгатором ИП-2:

$$x = x_2 + \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j})(z - z_2), \quad (2)$$

где  $x_2, z_2$  – координаты точки стояния пеленгатора ИП-2, м.

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим координаты точки пересечения проекций на плоскость  $XOZ$  направлений на  $i$ -й объект с ИП-1 и  $j$ -й объект с ИП-2:

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j})\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i})(z_2 - z_1) + \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j})x_1 - \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i})x_2}{\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j}) - \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i})}; \quad (3)$$

$$z_{ij} = \frac{x_2 - x_1 + \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i})z_1 - \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j})z_2}{\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{1i}) - \operatorname{tg}(\pi/2 - \beta_{2j})}.$$

Находим азимутальное направление на точку  $(x_{ij}, z_{ij})$  с третьего ИП:

$$\beta_3 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{z_{ij} - z_3}{x_{ij} - x_3}, & \text{если } x_{ij} - x_3 > 0 \text{ и } z_{ij} - z_3 \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{z_{ij} - z_3}{x_{ij} - x_3} + \pi, & \text{если } x_{ij} - x_3 < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{z_{ij} - z_3}{x_{ij} - x_3} + 2\pi, & \text{если } x_{ij} - x_3 > 0 \text{ и } z_{ij} - z_3 < 0; \\ \pi/2, & \text{если } x_{ij} - x_3 = 0 \text{ и } z_{ij} - z_3 > 0; \\ 3\pi/2, & \text{если } x_{ij} - x_3 = 0 \text{ и } z_{ij} - z_3 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

где  $x_3, z_3$  – координаты точки стояния пеленгатора ИП-3, м.

Затем, осуществляя перебор измерений пеленгатора ИП-3  $\beta_{3k}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), и проверяя выполнение неравенства

$$|\beta_{3k} - \beta_3| < \Delta, \quad (5)$$

где  $\Delta$  – критерий идентификации, устанавливаем возможность принадлежности азимутов  $\beta_{1i}, \beta_{2j}, \beta_{3k}$  (соответственно с ИП-1, ИП-2 и ИП-3) одному и тому же объекту измерения. В случае выполнения неравенства (5)

считаем, что триада пеленгов  $(\beta_{1i}, \varepsilon_{1i})_-(\beta_{2j}, \varepsilon_{2j})_-(\beta_{3k}, \varepsilon_{3k})$  прошла идентификацию по азимутальным углам.

Очевидно, что величина этого критерия оказывает существенное влияние на результат идентификации. При завышении его идентификация оказывается недостаточно "жесткой", т.е. пропускается слишком большое число ложных триад пеленгов. Использование заниженного значения критерия идентификация создает опасность исключения из обработки истинных триад пеленгов.

При нормальном законе распределения в качестве критерия, согласно известному правилу «трех сигм», можно принять выражение:

$$\Delta = 3\sqrt{\sigma_{\beta_3}^2 + \sigma_{\beta_{3\varepsilon}}^2},$$

где радикал – СКО разности двух независимых азимутов,  $\sigma_{\beta_{3k}}$  – СКО  $k$ -го азимута, измеренного пеленгатором ИП-3, а второе слагаемое – дисперсия расчетного азимута  $\beta_3$ , значение которой может быть получено численными методами из выражения:

$$\sigma_{\beta_3}^2 = \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial\beta_{1i}}\right)^2 \sigma_{\beta_{1i}}^2 + \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial\beta_{2j}}\right)^2 \sigma_{\beta_{2j}}^2$$

Однако на практике нашел применение и показал хорошие результаты более гибкий – адаптивный критерий, величина которого настраивается в зависимости от конкретных значений погрешностей всей совокупности пеленгов.

Будем называть результат идентификации пеленгов успешным, если триады пеленгов, прошедшие идентификацию, содержат все пеленги по каждому ИП. Если же какой-либо пеленг хотя бы на одном из ИП отсутствует в триадах, прошедших идентификацию, то будем считать, что идентификация прошла неудовлетворительно.

Первоначально идентификация проводится с некоторой априорно заданной величиной критерия  $\Delta_0$ . Если результат оказался успешным, то значение критерия для следующего шага уменьшается вдвое:  $\Delta_{i+1} = \Delta_i / 2$ .

В противном случае значение критерия идентификации увеличивается. Увеличение критерия происходит по-разному в зависимости от того, была хотя бы один раз на предыдущих шагах успешная идентификация или нет. Если успешная идентификация была, то значение критерия рассчитывается по формуле  $\Delta_{i+1} = \Delta_i + (\Delta_y - \Delta_i) / 2$ , где  $\Delta_y$  – значение критерия последней успешной идентификации пеленгов.

Если же успешной идентификации не было, то значение критерия увеличивается вдвое  $\Delta_{i+1} = 2\Delta_i$ .

Процесс подбора критерия идентификации проводится до тех пор, пока не выполнится условие:  $|\Delta_{i+1} - \Delta_i| \leq \Delta^*$ , в котором  $\Delta^*$  – задаваемое минимальное изменение критерия идентификации.

### Идентификация пространственных пеленгов

Алгоритм идентификации пространственных пеленгов основан на следующей аксиоматической посылке: линии визирования (пеленги) одного и того же объекта с двух точек с точностью до погрешностей визирования принадлежат одной плоскости.

Пусть направления на объект с двух ИП с координатами  $X_1, Y_1, Z_1$  и  $X_2, Y_2, Z_2$  определяются горизонтальными и вертикальными углами  $\beta_1, \varepsilon_1$  и  $\beta_2, \varepsilon_2$  (координаты и углы даны в единой нормальной земной системе координат). Уравнение плоскости  $P_{12}$ , содержащей точку  $(X_2, Y_2, Z_2)$  и направление на объект из точки  $(X_1, Y_1, Z_1)$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

где  $l_1 = \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1$ ,  $m_1 = \sin \varepsilon_1$ ,  $n_1 = \cos \varepsilon_1 \sin \beta_1$ .

Уравнение прямой, проходящей через точку  $(X_2, Y_2, Z_2)$  и объект,

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}. \quad (7)$$

где  $l_2 = \cos \varepsilon_2 \cos \beta_2$ ,  $m_2 = \sin \varepsilon_2$ ,  $n_2 = \cos \varepsilon_2 \sin \beta_2$ .

Угол между прямой (7) и плоскостью (6), имеющий место из-за случайных погрешностей измерений, вычисляется по формуле

$$\varphi = \arcsin \frac{A_1 l_2 + B_1 m_2 + C_1 n_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad (8)$$

в которой коэффициенты общего уравнения плоскости  $P_{12}$  ( $A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1 = 0$ ) в соответствии с (7) определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_1 &= (y_2 - y_1)n_1 - (z_2 - z_1)m_1, \\ B_1 &= (z_2 - z_1)l_1 - (x_2 - x_1)n_1, \\ C_1 &= (x_2 - x_1)m_1 - (y_2 - y_1)l_1. \end{aligned} \quad (9)$$

При известных оценках СКО измерений ( $\sigma_{\beta_1}$ ,  $\sigma_{\varepsilon_1}$ ,  $\sigma_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\varepsilon_2}$ ) можно оценить дисперсию угла  $\varphi$

$$\sigma^2 \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \right)^2 \sigma^2 \beta_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} \right)^2 \sigma^2 \varepsilon_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} \right)^2 \sigma^2 \beta_2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_2} \right)^2 \sigma^2 \varepsilon_2, \quad (10)$$

и с априорно заданной вероятностью утверждать, что

$$|\varphi| \leq K(q) \sigma^2 \varphi. \quad (11)$$

Для нормального закона распределения в соответствии с «правилом трех сигм» можно принять  $K(q) = 3$ , при этом  $q = 0,9972$ . Если неравенство (6.11) не будет выполняться, то следует предположить либо грубую ошибку, хотя бы в одной из величин  $\beta_1, \varepsilon_1$ ,  $\beta_2, \varepsilon_2$ , либо принадлежность угловых координат (попарно) к различным объектам.

Таким образом, неравенство (11) может служить критерием идентификации. Оно используется следующим образом. Выберем любую

пару угловых координат, зарегистрированную пеленгатором ИП-1 и определяющую единичный радиус-вектор (пеленг) одного из объектов. Через этот вектор и точку стояния пеленгатора ИП-2 проведем плоскость  $P_{12}$ . Вычислим по формуле (8) углы между плоскостью  $P_{12}$  и пеленгами (единичными радиус-векторами) объектов, зарегистрированными с ИП-2. При проверке этих углов по критерию (11) возможен один из следующих двух исходов.

Неравенство (11) не выполняется ни для одного из углов. Вывод: координаты выбранного объекта пеленгатором ИП-2 не зарегистрированы; необходимо перейти к идентификации измерений другого объекта.

Неравенство (11) выполняется хотя бы для одного из углов. Вывод: выполнено необходимое условие идентификации.

В плоскости  $P_{12}$  может оказаться и несколько объектов. Проведем плоскость  $P_{13}$  (через выбранный ранее единичный радиус-вектор в точке стояния пеленгатора ИП-1 и точку стояния пеленгатора ИП-3). Вычислим углы между плоскостью  $P_{13}$  и единичными радиус-векторами объектов с началом в точке стояния пеленгатора ИП-3. В результате применения критерия (11) возможны исходы, аналогичные уже рассмотренным. Разумеется перспективным является второй исход выполнения еще одного необходимого условия.

Итак, имеется хотя бы один пеленг объекта, зарегистрированный пеленгатором ИП-2, в плоскости  $P_{12}$  и хотя бы один пеленгатором ИП-3 в плоскости  $P_{13}$ .

В частном случае, когда в плоскостях  $P_{12}$  и  $P_{13}$  имеется только по одному пеленгу, проведем плоскость  $P_{23}$  (плоскость  $P_{32}$ ), проходящую через пеленг с ИП-2 (ИП-3) и точку стояния пеленгатора ИП-3 (ИП-2). Вычислим угол между плоскостью  $P_{23}$  ( $P_{32}$ ) и пеленгом с ИП-3 (ИП-2). Если неравенство (11) не выполняется, то переходим к идентификации измерений

---

другого объекта. При выполнении неравенства (11) заключаем, что измеренные с трех ИП пеленги относятся к одному и тому же объекту.

Исключением из этого является случайное событие (рис.1), порождающее ложную засечку. В общем случае может быть найдено по нескольку пеленгов в плоскости  $P_{12}$  и плоскости  $P_{13}$ . Назовем эти пеленги выделенными.

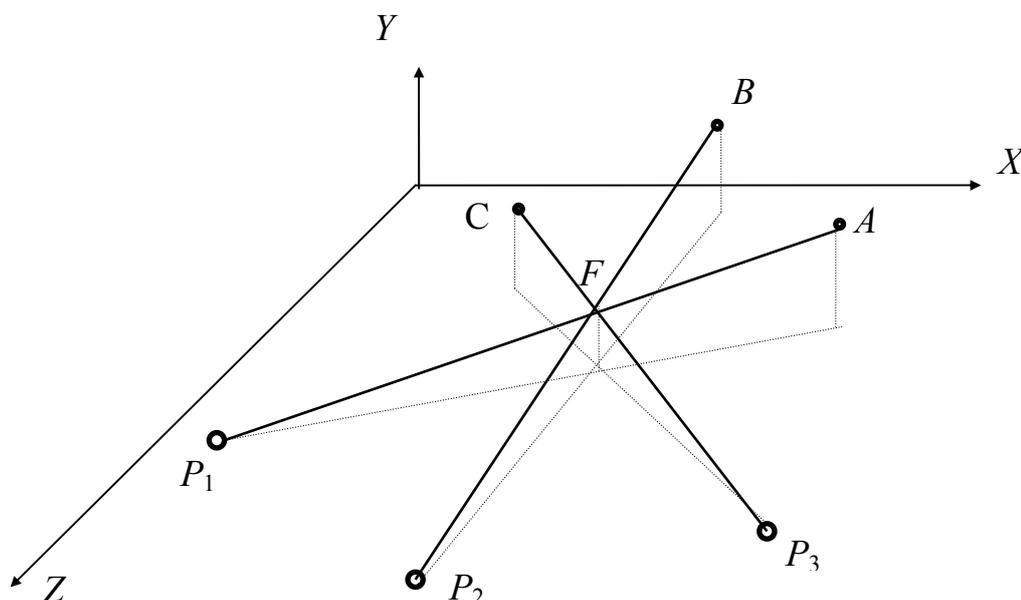


Рис. 6.1 – Случайное пересечение пеленгов  $P_1A$ ,  $P_2B$ ,  $P_3C$  в точке  $F$ :  
 $P_1, P_2, P_3$  – пеленгаторы;  $A, B, C$  – объекты пеленгации

Для утверждения того факта, что два пеленга из числа выделенных от ИП-2 и ИП-3 определяют направления на один и тот же объект, необходимо, чтобы они принадлежали (с точностью до погрешностей измерений) одной плоскости  $P_{23}$  (или  $P_{32}$ ). Но если в этой же плоскости окажется еще хотя бы один пеленг (с ИП-2 или ИП-3), то однозначной идентификации не произойдет.

Для устранения ложных триад пеленгов и раскрытия неоднозначностей необходимы дополнительные меры по идентификации, к числу которых

можно отнести, в частности, использование комбинаторных алгоритмов исчерпывающего поиска.

### **Заключение**

Очевидно, что результаты идентификации по предложенным алгоритмам ИГП и ИПП наряду с другими условиями в значительной степени будут зависеть от условий их применения, т. е. от расположения ИП и характеристик используемых СИ, высоты и дальности размещения объекта регистрации, его формы и концентрации в нем элементов. Эти зависимости представляются достаточно сложными, имеющими стохастический характер, поэтому для их изучения необходимо разработать экспериментальную статистическую модель с алгоритмическим описанием причинно-следственных связей, что является дальнейшим развитием настоящей работы.

### **Литература**

1. Molebny V., et al. Laser radar: historical prospective – from the East to the West // Opt. Eng. 2016. V. 56. № 3. P. 031220.
2. Малашин М.С., Каминский Р.П., Борисов Ю.Б. Основы проектирования лазерных локационных систем. М.: Высшая школа, 1983. 207 с.
3. Васильев С.В. и др. Перспективные методы и средства траекторных измерений. Казань: Новое знание, 2005. 128 с.
4. Natanson O.G., et al. Reflectometry in open and fiber mediums: technology transfer // Proc. SPIE. 2005. V. 5854. pp. 205-214.
5. Ефимов В.О. и др. Оптическая рефракция и модельные методы учета ее влияния на характеристики дальномерного тракта лазерного локатора слежения // Инженерный вестник Дона. 2017. №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4314.

6. Ефимов В.О. и др. Дисперсионный метод учета статической и динамической рефракции для дальномерного тракта лазерного локатора слежения // Инженерный вестник Дона. 2017. №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4315.

7. Ефимов В.О. и др. Методы компенсации влияния атмосферной турбулентности на точность измерения угловых координат в лазерных локаторах слежения // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. №4. С. 69-71.

8. Morozov O.G., et al. Two-frequency scanning LFM lidars: theory and applications // Proc. of SPIE. 2002. V. 4539. pp. 158-168.

9. Ильин Г.И., Морозов О.Г., Польский Ю.Е. ЛЧМ-лидар с преобразованием частоты // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 12. С. 1871.

10. Ильин Г.И., Морозов О.Г., Польский Ю.Е. Блок импульсной накачки лидарных комплексов // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 5. С. 762.

11. Ильин Г.И. и др. Исследования ЛЧМ-лидара с преобразованием частоты // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 2. С. 435.

12. Ильин Г.И., Морозов О.Г., Польский Ю.Е. Особенности построения электрооптических амплитудно-фазовых формирователей двухчастотного лазерного излучения для дифференциальных ЛЧМ-лидаров // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 5. С. 513.

13. Ильин Г.И., Морозов О.Г., Польский Ю.Е. Применение амплитудно-фазового преобразования частоты лазерного излучения для создания специальных схем ЧМ-лидаров // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12. № 4. С. 360.

## References

1. Molebny V., et al. Opt. Eng. 2016. V. 56. № 3. P. 031220.
2. Malashin M.S., Kaminskiy R.P., Borisov Yu.B. Osnovy proektirovaniya lazernyih lokatsionnyih sistem [Basics of laser location systems designing]. M.: Vysshaya shkola, 1983. 207 p.
3. Vasilev S.V. et al. Perspektivnyie metody i sredstva traektornyih izmereniy [Promising methods and means of trajectory measurements]. Kazan: Novoe znanie, 2005. 128 p.
4. Natanson O.G., et al. Proc. SPIE. 2005. V. 5854. pp. 205-214.
5. Efimov V.O., et al. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4314/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4314/).
6. Efimov V.O., et al. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4315/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4315/).
7. Efimov V.O., et al. Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya. 2017. №4. pp. 69-71.
8. Morozov O.G., et al. Proc. of SPIE. 2002. V. 4539. pp. 158-168.
9. Ilin G.I., Morozov O.G., Polskiy Yu.E. Optika atmosfery i okeana. 1995. V. 8. № 12. P. 1871.
10. Ilin G.I., Morozov O.G., Polskiy Yu.E. Optika atmosfery i okeana. 1995. V. 8. № 5. P. 762.
11. Ilin G.I., Morozov O.G., Polskiy Yu.E. Optika atmosfery i okeana. 1997. V. 10. № 2. P. 435.
12. Ilin G.I., Morozov O.G., Polskiy Yu.E. Optika atmosfery i okeana. 1998. V. 11. № 5. P. 513.
13. Ilin G.I., Morozov O.G., Polskiy Yu.E. Optika atmosfery i okeana. 1999. V. 12. № 4. P. 360.