

Сравнительный анализ рекурсивных методов оценивания частоты

А.В. Никитин

Волгоградский государственный университет

Аннотация: В работе представлены результаты исследования оперативных рекурсивных методов оценивания частоты квазигармонических сигналов на коротком интервале наблюдения, которые необходимы, например, для адаптивного управления диаграммой направленности гидроакустических антенн в неоднородной среде. Предложены рекурсивные выражения для реализации четырех методов оценивания частоты, требующие минимального количества математических операций, не зависящего от длительности интервала, на котором производится оценка. Проведен сравнительный анализ скорости, точности и устойчивости этих методов, который позволяет выбрать из них оптимальный по одному или нескольким критериям. Представлены результаты обработки рекурсивными методами модулированных сигналов с аддитивным шумом в рамках скользящего окна заданной длительности.

Ключевые слова: канал связи, диаграмма направленности, оценивание частоты, рекурсивный метод, точность метода, устойчивость метода, скользящий интервал.

Исходные положения

Создание как оптического, так и акустического высокоскоростного канала двусторонней связи с мобильным объектом является в настоящий момент не решенной, но в соответствии с современными тенденциями развития информационно-телекоммуникационных навигационных систем практически актуальной задачей [1]. Ее решение требует создания антенн с синтезированной апертурой [2], обладающих одновременно широкой полосой и высокой чувствительностью, например – фазированных решеток [3]. Адаптивное управление диаграммой направленности передающей антенны позволяет фокусировать излучение на приемнике, а адаптивное управление приемной антенной позволяет осуществлять пространственную фильтрацию помех, направление на источник которых неизвестно [4].

Управление диаграммой направленности на практике осуществляется коррекцией волнового фронта излучателя, а основной причиной, ухудшающей фокусировку акустической волны на приемнике, являются неоднородности среды распространения, как регулярные, так и случайные

[5], включая доплеровский сдвиг частоты в системах мобильной связи. Дополнительным источником погрешностей является разброс фазовых характеристик элементов антенной решетки, который в определенной мере эквивалентен наличию дополнительной неоднородности среды распространения. Несмотря на значительные усилия, предпринятые по совершенствованию конструкций гидроакустических антенн [6] и исследованию влияния конструктивных параметров на их эффективность [5, 7], обеспечение идентичности пьезокерамических датчиков является в настоящее время нерешаемой проблемой.

Погрешность, связанную с неоднородностью среды распространения и разбросом фазовых характеристик пьезоэлементов, можно компенсировать методами апертурного сканирования, если в качестве приемника использовать антенную решетку, аналогичную излучающей, и измерять распределение комплексной амплитуды волны в плоскости матричного приемника. Проведенный в работе [8] анализ показал, что задача адаптивного управления диаграммой направленности антенны в неоднородной среде является корректной, если в каждый момент времени известна мгновенная частота сигнала как на передающей, так и на приемной антеннах. Из-за доплеровского сдвига, создаваемого взаимным движением приемника, передатчика и среды распространения, девиация мгновенной частоты является случайным процессом, и необходим рекурсивный метод ее оценивания.

При анализе колебаний излучателя и приемника необходимо рассматривать квазигармонические колебания, а сигнал записывать в виде [9]

$$x(t) = (X_0 + X_\varepsilon(t)) \cos[\omega_0 t + \phi(t)], \quad (1)$$

где ω_0 – номинальная частота сигнала генератора, X_0 – номинальная амплитуда сигнала, $X_\varepsilon(t)$ – малая медленно меняющаяся девиация амплитуды, $\phi(t)$ – медленно меняющаяся девиация фазы. Если задающий генератор

канала связи высокостабильный, должны выполняться следующие условия на девиации амплитуды и фазы:

$$\left| \frac{X_e(t)}{X_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\dot{\phi}(t)}{\omega} \right| \ll 1. \quad (2)$$

Сигнал (1) можно записать по другому, выделив начальную фазу ϕ_0

$$x(t) = X(t) \cos \left[\int_0^t \omega(t') dt' + \phi_0 \right] = X(t) \cos[\theta(t)], \quad (3)$$

где $X(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда, $\theta(t)$ – полная фаза. Производная по времени полной фазы – мгновенная частота $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ тоже является медленно меняющейся функцией времени. В этих обозначениях условия (2) переписутся в виде

$$\frac{1}{\omega(t)} \left| \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)} \right| \ll 1. \quad (4)$$

Полные условия, которые необходимо наложить на частоту и огибающую приведены в работе [10]. Независимо от того, что является источником неустойчивости, будем считать, что она проявляется на интервале, сравнимом или большем квазипериода колебаний сигнала, причем величина этой неустойчивости должна удовлетворять условиям (4) на рассматриваемом интервале.

Для решения задачи оценки частоты предложено достаточно много цифровых методов, которые можно разбить на три группы. Первую группу составляют медленные методы, для которых характерна блочная обработка данных на интервале измерения, содержащем L отсчетов сигнала. Медленные методы требуют $O(L \log L)$ или больше операций с плавающей точкой. Вторая группа объединяет быстрые методы, в которых данные также обрабатываются блоками, но количество операций составляет порядка $O(L)$. Третью группу составляют методы оценивания частоты в реальном времени, в которых используются рекуррентные формулы. Количество операций,

которое требуется для получения очередной оценки частоты при использовании этих методов, невелико и не зависит от длительности интервала, на котором вычисляются оценки частоты. Для измерения кратковременной нестабильности квазигармонических процессов (1) актуальными являются методы третьей группы – будем называть их оперативными.

Рекурсивные методы оценивания частоты

Рассмотрим сигнал $x(t)$ вида (1), удовлетворяющий условиям (4), и произведем его дискретизацию с шагом Δ , обозначив $x[n] = x(n\Delta)$. Оценка частоты, полученная по последовательности $x[n]$ в диапазоне $[n - L + 1, n]$, будет соответствовать середине этого интервала, то есть моменту времени $(n - (L - 1)/2)\Delta$. Таким образом, поиск частоты производится в рамках скользящего окна, содержащего L отсчетов сигнала.

Первый метод оценивания частоты (метод 1) требует как минимум трех значений сигнала и вводится различными способами. В работе [11] он введен как метод оценивания частоты зашумленного синусоидального сигнала с использованием узкополосных фильтров, а в работе [12] – с использованием модифицированного метода Прони второго порядка. В работах [13, 14] приводится анализ точности и устойчивости данного метода.

Метод 1 использует следующую оценку частоты:

$$\hat{f}_1[n] = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos \left(\frac{\sum_{k=n-M+1}^n (x[k-2Q] + x[k])x[k-Q]}{2 \sum_{k=n-M+1}^n x^2[k-Q]} \right). \quad (5)$$

Здесь введены коэффициент прореживания Q и количество усреднений M , то есть $L = 2Q + M$. Прореживание необходимо использовать для увеличения точности оценки частоты в случае, когда шаг дискретизации Δ существенно меньше периода сигнала [14]. Таким образом, в выражении (5) используются

отсчеты сигнала с номерами от $(n - L + 1)$ до n , а оценка частоты может быть получена в диапазоне от 0 до $1/(2Q\Delta)$.

Введем различные произведения отсчетов сигнала:

$$c_i[n] = x[n]x[n - iQ] \quad (6)$$

и с использованием этого обозначения запишем входящие в выражение (5) суммы в виде рекурсий:

$$S_0[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x^2[k] = S_0[n-1] + c_0[n] - c_0[n-M],$$

$$S_1[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x[k]x[k-Q] = S_1[n-1] + c_1[n] - c_1[n-M].$$

Оценка частоты (5) примет вид:

$$\hat{f}_1[n] = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos\left(\frac{S_1[n] - S_1[n-Q]}{2S_0[n-Q]}\right). \quad (7)$$

Видно, что расчет сумм $S_i[n]$ требует всего 8 математических операций, а для получения оценки частоты необходимо еще 4 операции и вычисление функции $\arccos(x)$, которая может быть найдена с помощью заранее заготовленного массива.

Перейдем к методам, в которых минимальное количество отсчетов сигнала равно 4, то есть $L = 3Q + M$. Метод 2 [15] называется методом расщепления и использует следующую оценку частоты:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi Mm\Delta} \sum_{i=1}^M \arccos\left(\frac{x[i+2m]x[i+m] - x[i+3m]x[i]}{2(x^2[i+2m] - x[i+3m]x[i+m])}\right),$$

где

$$m = \frac{1}{2\Delta(f_{\max} + f_{\min})},$$

а f_{\min} и f_{\max} – границы диапазона возможных значений частот. Используя обозначения (6), учитывая прореживание Q и полагая $f_{\min} = 0$ и $f_{\max} = 1/(2\Delta)$, запишем выражение для оценки частоты методом 2 в рамках скользящего окна:

$$\hat{f}_2[n] = \frac{1}{2\pi Q M \Delta} \sum_{k=n-M+1}^n \arccos \left(\frac{c_1[k-Q] - c_3[k]}{2(c_0[k-Q] - c_2[k])} \right). \quad (8)$$

Эта оценка может рассчитываться рекурсивно:

$$\hat{f}_2[n] = \hat{f}_2[n-1] + F[n] - F[n-M],$$

где

$$F[n] = \frac{1}{2\pi Q M \Delta} \arccos \left(\frac{c_1[n-Q] - c_3[n]}{2(c_0[n-Q] - c_2[n])} \right).$$

Видно, что расчет частоты требует 10 математических операций и вычисления функции $\arccos(x)$.

Следующий метод (метод 3) описан в работах [10, 13, 16] и также требует как минимум 4 отсчета сигнала. Оценка частоты этим методом с использованием введенных обозначений имеет вид:

$$\hat{f}_3[n] = \frac{1}{2\pi Q \Delta} \arccos \left(\frac{\sum_{k=n-M+1}^n g_0[k] g_1[k]}{\sum_{k=n-M+1}^n g_1^2[k]} \right) = \frac{1}{2\pi Q \Delta} \arccos \left(\frac{S_3[n]}{S_4[n]} \right), \quad (9)$$

где

$$g_0[k] = c_1[k-Q] - c_3[k], \quad g_1[k] = c_0[k-Q] + c_0[k-2Q] - c_2[k] - c_2[k-Q],$$

$$S_3[n] = \sum_{k=n-M+1}^n g_0[k] g_1[k], \quad S_4[n] = \sum_{k=n-M+1}^n g_1^2[k],$$

а величины $c_i[k]$ определяются выражением (6). Входящие в формулу (9) суммы $S_4[n]$ и $S_5[n]$ могут вычисляться рекурсивно:

$$S_3[n] = S_3[n-1] + g_0[n] g_1[n] - g_0[n-M] g_1[n-M],$$

$$S_4[n] = S_4[n-1] + g_1^2[n] - g_1^2[n-M].$$

Для получения оценки (9) требуется 18 математических операций и вычисление функции $\arccos(x)$.

Еще один метод (метод 4) [13, 17, 18] определяет оценку частоты в рамках скользящего окна $L = 4Q + M$, то есть требует как минимум пять отсчетов сигнала:

$$\hat{f}_4[n] = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos \left(\frac{\sum_{k=n-M+1}^n g_2[k-Q]g_3[k]}{4 \sum_{k=n-M+1}^n g_3^2[k]} \right) = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos \left(\sqrt{\frac{S_5[n]}{4S_6[n]}} \right). \quad (10)$$

Здесь

$$g_2[k] = c_0[k-Q] - c_2[k], \quad g_3[k] = c_0[k-2Q] - c_4[k],$$

$$S_5[n] = \sum_{k=n-M+1}^n g_2[k-Q]g_3[k], \quad S_6[n] = \sum_{k=n-M+1}^n g_3^2[k]$$

а суммы рассчитываются рекурсивно:

$$S_5[n] = S_5[n-1] + g_2[n-Q]g_3[n] - g_2[n-Q-M]g_3[n-M],$$

$$S_6[n] = S_6[n-1] + g_3^2[n] - g_3^2[n-M].$$

Метод 4 позволяет получить оценку частоты в диапазоне от 0 до $1/(4Q\Delta)$, то есть в более узком диапазоне, чем предыдущие три метода. Он требует 19 операций сложения и умножения, а также вычисления функции $\arccos(\sqrt{x})$.

Устойчивость рекурсивных методов

Исследование устойчивости рекурсивных методов проводилось с использованием модели сигнала с постоянной амплитудой X_0 , частотой f_0 и начальной фазой φ_0 с аддитивным белым нормальным шумом с дисперсией σ^2 :

$$x[n] = X_0 \cos(2\pi f_0 n\Delta + \varphi_0) + \xi[n], \quad n = 0, \dots, L-1.$$

Частота рассчитывалась по рекурсивным соотношениям (7) – (10) и усреднялась по множеству реализаций. На рис. 1 приведены зависимости относительного среднеквадратичного отклонения (СКО) частоты σ_f/σ от нормированной заданной частоты $f_0\Delta$, полученные с помощью четырех описанных методов при следующих параметрах сигнала: $X_0 = 1$, $\varphi_0 = 0,15$, $\sigma = 0,01$. Обработка производилась по 100 реализациям при $Q = 1$ и одинаковой длине окна $L = 89$. Таким образом, параметр усреднения M для методов 1 – 4 составлял соответственно 87, 86, 86 и 85. Видно, что область $f_0\Delta$ наилучших

статистических характеристик для методов 1 – 3 расположена в диапазоне от 0,1 до 0,4, а для метода 4 – в диапазоне от 0,1 до 0,24.

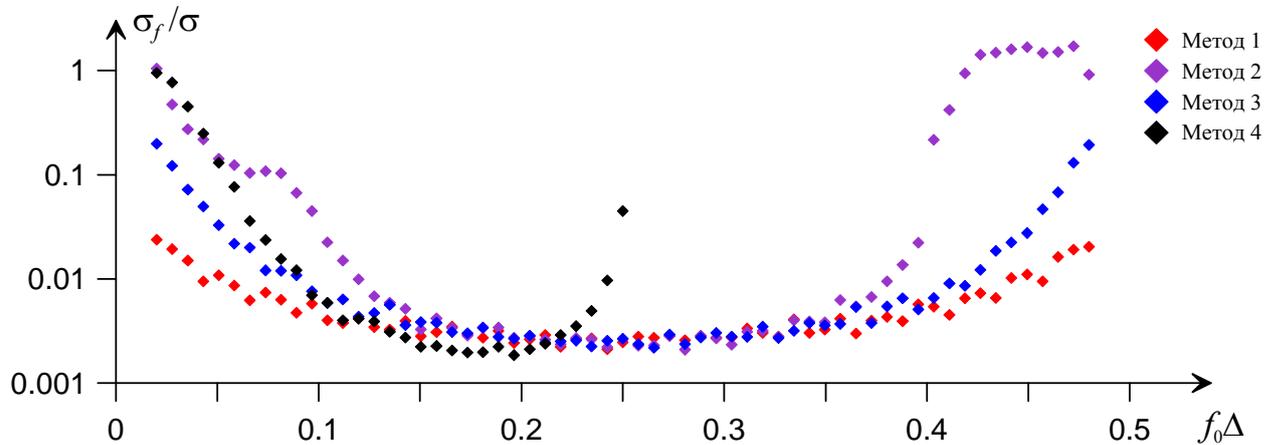


Рис. 1. – Зависимости относительного СКО частоты от нормированной частоты сигнала при $Q = 1$ и $L = 89$

Следующие графики (рис. 2) иллюстрируют важность правильного выбора коэффициента прореживания Q . Они получены при тех же параметрах сигнала и с той же длиной окна $L = 89$, но при $Q = 3$ (параметр усреднения M для методов 1 – 4 при этом составляет 83, 80, 80 и 77).

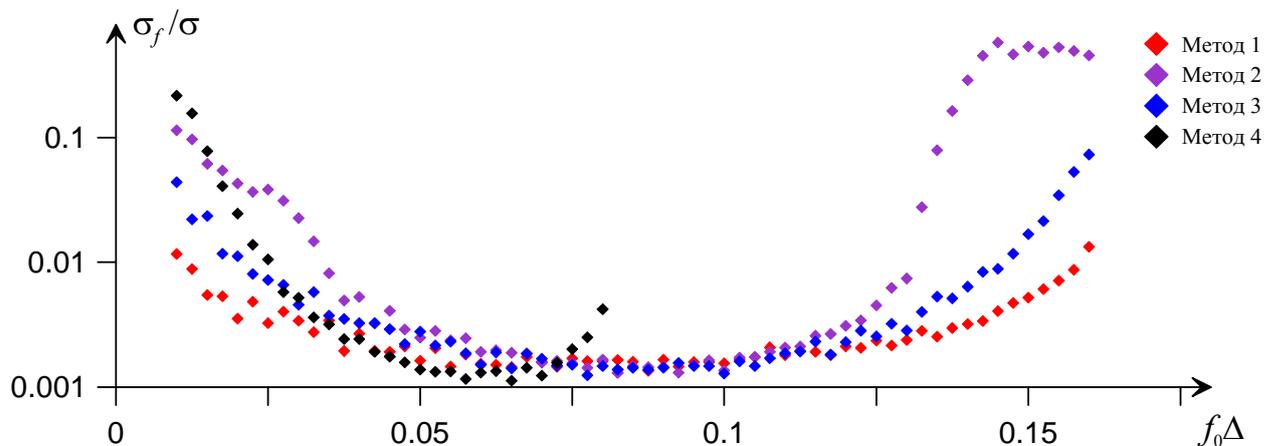


Рис. 2. – Зависимости относительного СКО частоты от нормированной частоты сигнала при $Q = 3$ и $L = 89$

Так, например, если нормированная частота сигнала $f_0\Delta = 0,025$, при использовании $Q = 1$ относительное СКО частоты находится в диапазоне от 0,02 до 0,8 (рис. 1), а при использовании $Q = 3$ – в диапазоне от 0,003 до 0,04 (рис. 2), что значительно меньше.

Проведенные численные эксперименты показали, что наименьшее СКО оценки частоты для всех методов примерно одинаково, а минимальный рост СКО на краях полного диапазона обеспечивает метод 1.

Точность рекурсивных методов

Следующая серия численных экспериментов показала, как полученная рекурсивными методами оценка частоты зависит от медленных изменений частоты и амплитуды исследуемого сигнала. Использовалась модель сигнала с линейной частотной и амплитудной модуляцией:

$$x[n] = X_0 \left(1 + \alpha_x \left(n - \frac{L-1}{2} \right) \right) \cos \left(2\pi f_0 \left(1 + \frac{\alpha_f}{2} (n - L + 1) \right) n\Delta + \varphi_0 \right), \quad n = 0, \dots, L-1.$$

Таким образом значения частоты $f = f_0$ и амплитуды $X = X_0$ соответствуют середине интервала $[0, \dots, L-1]$.

На рис. 3 и рис. 4 показаны зависимости относительного отклонения оценки частоты $\delta_f = (\hat{f}_i - f_0)/f_0$ от величины $f_0\Delta$, полученные методами 1 – 4 в результате численного эксперимента при $X_0 = 1$, $\varphi_0 = 0,76$, $Q = 1$, $L = 78$ и различных значениях α_x и α_f . Поскольку отклонение частоты для метода 2 на краях диапазона существенно превышает отклонение для остальных методов, зависимость для него приведена еще и на отдельном графике.

В зависимости от параметров модуляции и начальной фазы сигнала может наблюдаться смещение ошибки δ_f как в положительную, так и в отрицательную область, однако становится ясно, что изменение частоты сильнее влияет на точность ее определения, чем изменение амплитуды.

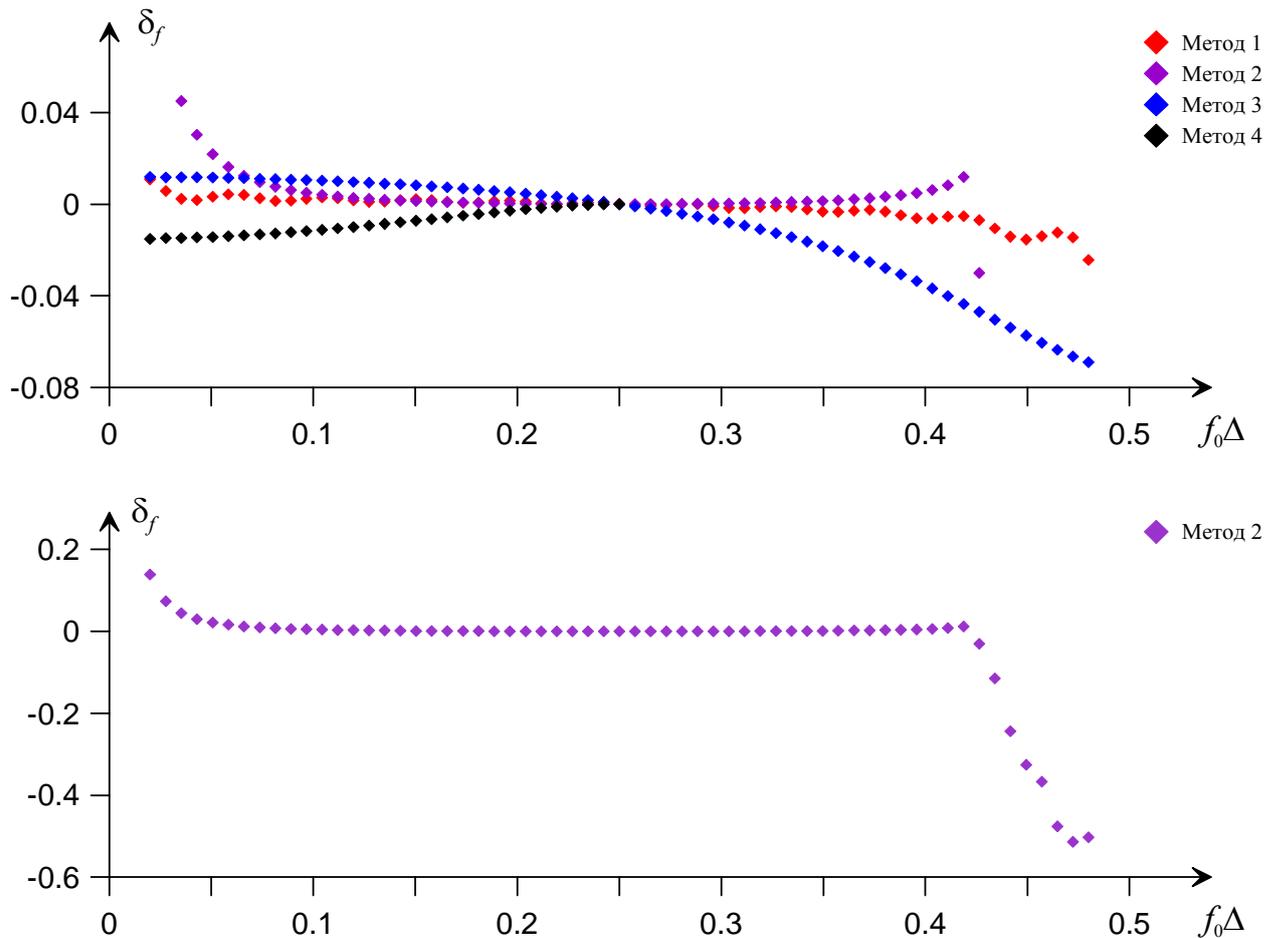


Рис. 3. – Относительное отклонение оценки частоты для сигнала с линейной частотной модуляцией ($\alpha_x = 0$, $\alpha_f = 0,0024$)

Численные эксперименты показали, что точность метода 2 существенно ниже, чем точность остальных методов. Наилучшие характеристики имеет метод 1, поскольку изменения частоты сказываются на его оценке меньше всего, а изменение амплитуды влияет на методы 1, 3 и 4 примерно одинаково.

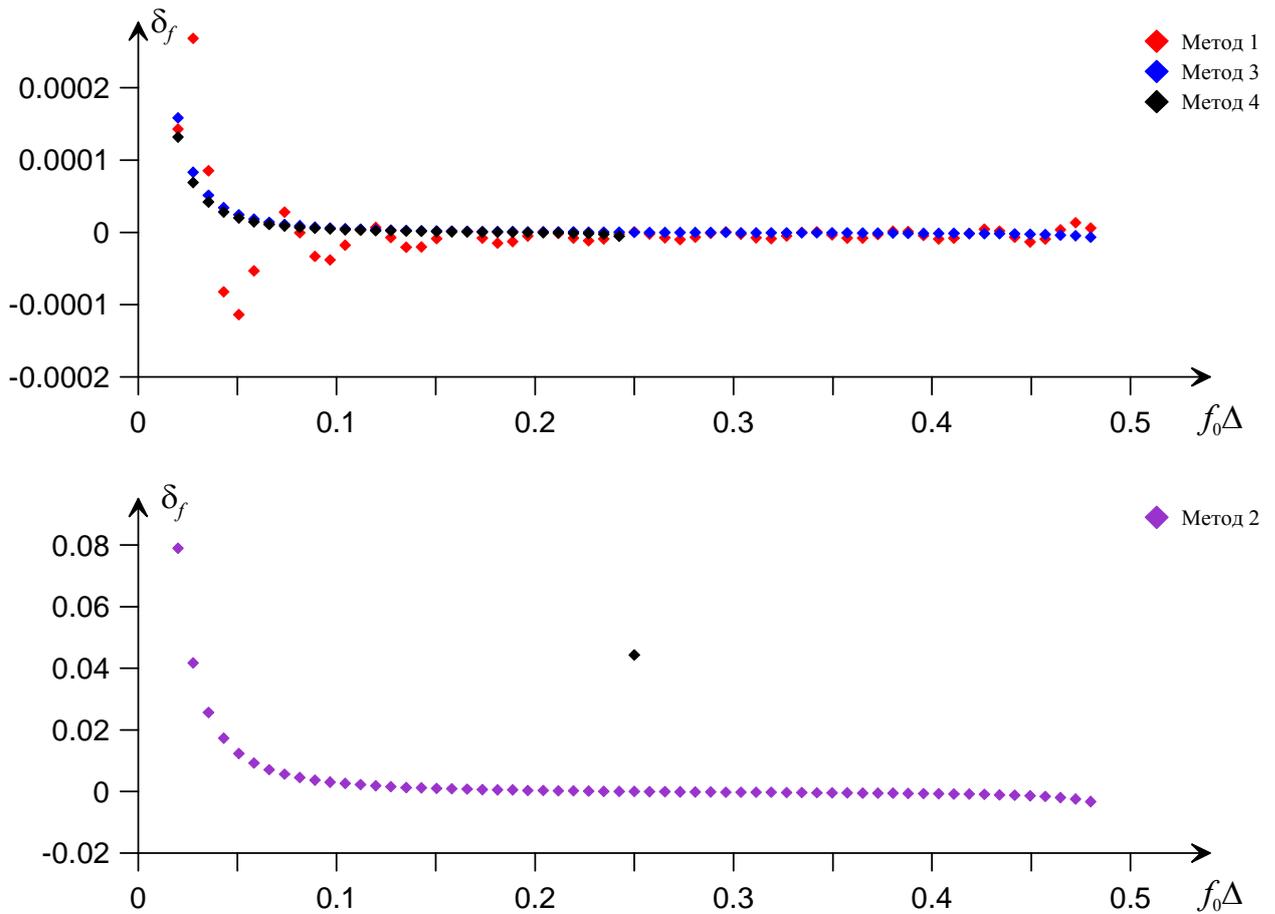


Рис. 4. – Относительное отклонение оценки частоты для сигнала с линейной амплитудной модуляцией ($\alpha_x = 0,0013$, $\alpha_f = 0$)

В следующей серии численных экспериментов производилась обработка достаточно длинных последовательностей с помощью скользящего окна длиной L отсчетов. Использовался модельный сигнал с тональной частотной модуляцией и аддитивным белым нормальным шумом с дисперсией σ^2 :

$$x_1[n] = X_0 \cos \left(2\pi f_0 \left\{ n\Delta - \alpha_f \frac{T_f}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi}{T_f} n\Delta + \psi_f \right) \right\} + \varphi_0 \right) + \xi[n], \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Частота этого сигнала как производная полной фазы имеет вид:

$$f[n] = f_0 \left\{ 1 + \alpha_f \sin \left(\frac{2\pi}{T_f} n\Delta + \psi_f \right) \right\}.$$

На рис. 5 показан результат обработки сигнала $x_1[n]$ со следующими параметрами: $f_0 = 0,053$, $\varphi_0 = 0,54$, $X_0 = 1$, $\alpha_f = 0,05$, $T_f = 1034$, $\psi_f = 0$, $\sigma = 0,01$, $N = 2000$. Обработка проводилась методом 1 при $Q = 6$, $M = 106$, $L = 118$. Видно, что относительное отклонение оценки частоты δ_f на всем интервале не превышает 0,0012. Остальные три метода дают примерно такой же результат.

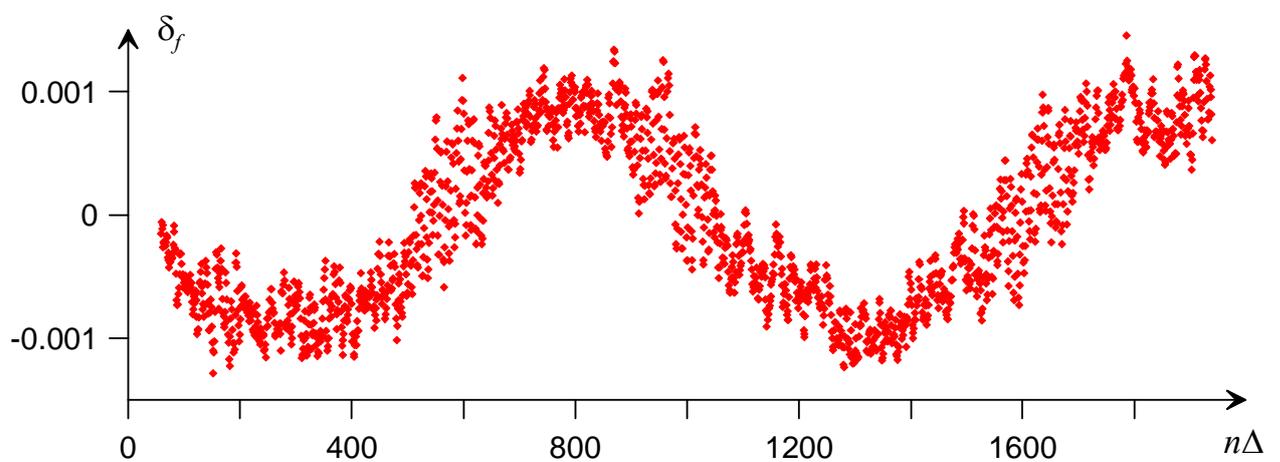


Рис. 5. – Динамика относительного отклонения оценки частоты сигнала с тональной частотной модуляцией

На рис. 6 показан результат обработки модельного сигнала с тональной амплитудной модуляцией:

$$x_2[n] = X_0 \left(1 + \alpha_x \sin\left(\frac{2\pi}{T_x} n\Delta\right) \right) \cos(2\pi f_0 n\Delta + \varphi_0) + \xi[n], \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Использовались следующие параметры сигнала: $X_0 = 1$, $\alpha_x = 0,275$, $T_x = 923$, $f_0 = 0,053$, $\varphi_0 = 0,54$, $\sigma = 0,01$, $N = 2000$. Обработка проводилась методом 1 при тех же значениях $Q = 6$, $M = 106$, $L = 118$. Видно, что достаточно заметные изменения амплитуды сигнала практически не влияют на точность оценивания частоты.

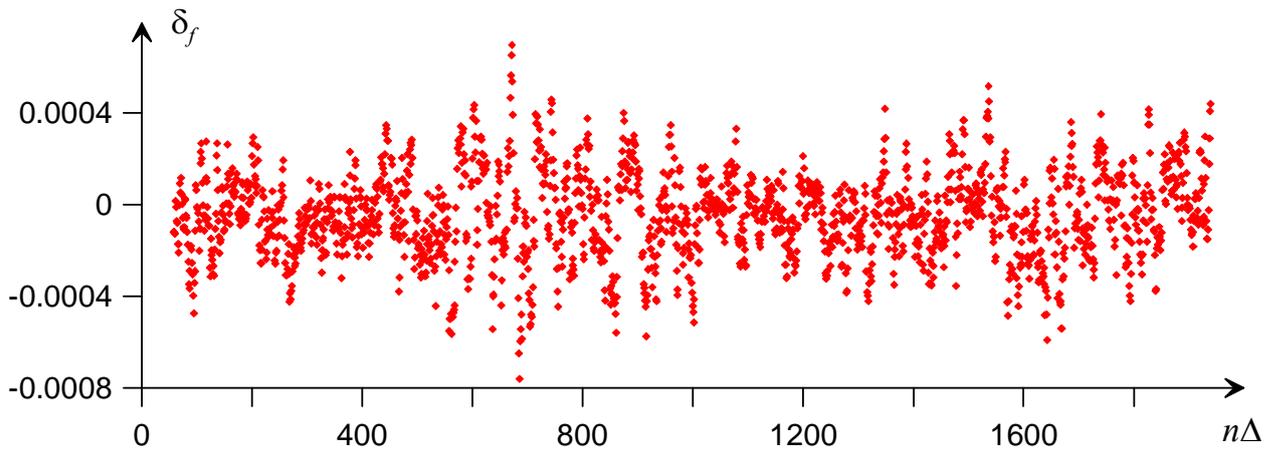


Рис. 5. – Динамика относительного отклонения оценки частоты сигнала с тональной амплитудной модуляцией

Основные результаты

Проведенные численные эксперименты показали, что наилучшими статистическими и точностными характеристиками обладает метод 1. Кроме того, данный метод проще всего реализуется. Рекурсивная структура, соответствующая выражению (7), представлена на рис. 7 и может быть включена в систему адаптивного управления диаграммой направленности антенны в неоднородной среде [12].

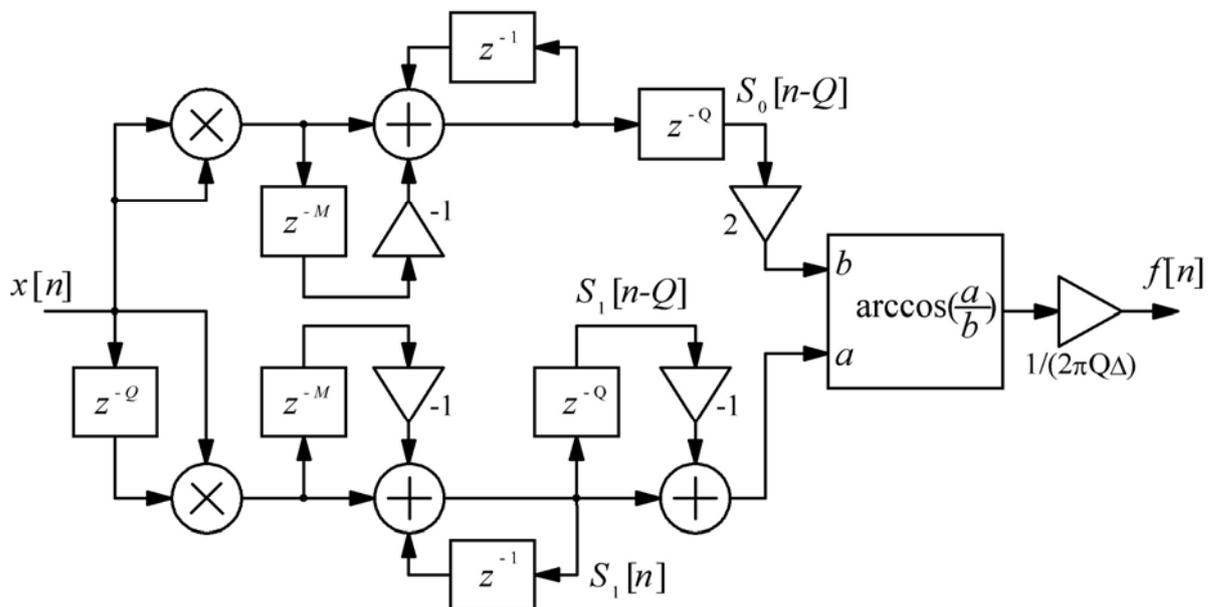


Рис. 7. – Рекурсивная структура для реализации метода 1

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта 15-47-02297 «р_а».

Литература

1. Asadov H., Ismaylov K. Information Method for Synthesis of Optimal Data Subsystems Designated for Positioning, Location and Remote Sensing Systems // Positioning. 2011. № 2. pp. 61 – 64.
2. Stergiopoulos S. Implementation of adaptive and synthetic aperture beamformers in sonar systems // Proc. IEEE. 1998. Vol. 86. № 2. p. 358.
3. Autrey S.W. Passive Synthetic Arrays // J. Acoust. Soc. Am. August 1988. Vol. 84, pp. 592 – 598.
4. Lasky M., Doolittle R. D., Simmons B.D., Lemon S.G. Recent progress in towed hydrophone array research // IEEE J. Oceanic Eng. 2004. Vol. 29. № 2. pp. 374 – 387.
5. Кириченко И.А. Повышение эффективности направленных свойств адаптивных гидроакустических систем с параметрическими антеннами // Инженерный вестник Дона. 2016. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3845.
6. Митько В.Н., Эсси-Эзинг А.С. Проектирование и моделирование антенны гидролокатора бокового обзора // Инженерный вестник Дона. 2016. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3534.
7. Кириченко И.А., Котов В.Ю., Лонкин П.В., Слуцкий Д.С. Оценка влияния конструктивных характеристик на направленность гидроакустических антенн // Инженерный вестник Дона. 2015. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3483.
8. Игнатъев В.К., Никитин А.В. Корректность задачи адаптивного управления диаграммой направленности антенны в неоднородной среде //

Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4316.

9. Riley W. J. Handbook of Frequency Stability Analysis. SP 1065. NIST: Washington. DC. 2008. pp. 1-136.

10. Игнатъев В.К., Никитин А.В., Юшанов С.В. Параметрический анализ колебаний с медленно меняющейся частотой. Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. LIII. № 2. С. 145 – 159.

11. Savaresi S. M., Bittanti S., So H. C. Closed-form unbiased frequency estimation of a noisy sinusoid-using notch filters. IEEE Trans. on Autom. Contr. 2003. vol. 48(7). pp. 1285-1292.

12. Никитин А.В., Юшанов С.В. Измерение мгновенной частоты широкополосных сигналов на коротком интервале наблюдения. Измерительная техника. 2008. № 2. С. 50 – 54.

13. Nikitin A. V., Yushanov S. V. Comparative Study of Parametric Methods for Online Estimating the Frequency and Amplitude of Quartz Oscillators/ Advanced Nano- and Piezoelectric Materials and Their Applications, Nova Science Publishers, Inc. New York. 2014. p. 171 - 204. ISBN 978-1- 63321-239 -8.

14. Никитин А.В., Никитин А.О., Орлов А.А. Исследование оперативного метода измерения частоты и амплитуды сигналов с медленно меняющимися параметрами. Измерительная техника. 2016. № 5. С. 60 – 65.

15. Лабутин С.А., Пугин М.В. Помехоустойчивость и быстродействие методов измерения частоты по короткой реализации гармонического сигнала // Измерительная техника. 1998. № 9. С. 34 – 36.

16. Andrey V Nikitin, Kirill A Pshenichnyy and Sergey V Yushanov. A method for fast estimation of slowly changing parameters of a quasi-harmonic signal. Measurement Science and Technology. 27 (2016). doi: 10.1088/0957-0233/27/2/025011.

17. Игнатъев В.К., Никитин А.В., Хоружий Д.Н., Юшанов С.В. Динамический метод сличения частот. Измерительная техника. 2011. № 1. С. 32 – 36.

18. Боровков В.И., Игнатъев В.К., Никитин А.В., Юшанов С.В. Однозначное определение огибающей и мгновенной частоты электромеханических колебаний. Известия вузов. Электромеханика. 2012. № 1. С. 16 – 20.

References

1. Asadov H., Ismaylov K. Positioning. 2011. № 2. pp. 61 – 64.
2. Stergiopoulos S. Proc. IEEE. 1998. Vol. 86. № 2. p. 358.
3. Autrey S.W. J. Acoust. Soc. Am. August 1988. Vol. 84, pp. 592 – 598.
4. Lasky M., Doolittle R.D., Simmons B.D., Lemon S.G. IEEE J. Oceanic Eng. 2004. Vol. 29. № 2. pp. 374 – 387.
5. Kirichenko I.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2014. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3845/.
6. Mit'ko V.N., Essi-Esing A.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2016. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3534/.
7. Kirichenko I.A., Kotov V. Yu, Lonkin P.V., Slutskii D.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2015. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3483/.
8. Ignatjev V.K., Nikitin A. V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4316/.
9. Riley W. J. Handbook of Frequency Stability Analysis. SP 1065. NIST: Washington. DC. 2008. pp. 1-136.
10. Ignatjev V.K., Nikitin A.V., Yushanov S.V. Izvestija vuzov. Radiofizika. 2010. T. LIII. № 2. pp. 145 – 159.
11. Savaresi S.M., Bittanti S., So H.C. IEEE Trans. on Autom. Contr. 2003. vol. 48(7). pp. 1285-1292.

12. Nikitin A.V., Yushanov S.V. Izmeritel'naja tehnika. 2008. № 2. pp. 50 – 54.
13. Nikitin A.V., Yushanov S.V. Advanced Nano- and Piezoelectric Materials and Their Applications, Nova Science Publishers, Inc. New York. 2014. p. 171 - 204. ISBN 978-1- 63321-239 -8.
14. Nikitin A.V., Nikitin A.O., Orlov A.A. Izmeritel'naja tehnika. 2016. № 5. pp. 60 – 65.
15. Labutin C.A., Pugin M.V. Izmeritel'naja tehnika. 1998. № 9. pp. 34 – 36.
16. Andrey V Nikitin, Kirill A Pshenichnyy and Sergey V Yushanov. Measurement Science and Technology. 27 (2016). doi: 10.1088/0957-0233/27/2/025011.
17. Ignatjev V.K., Nikitin A.V., Khoruzhii D.N., Yushanov S.V. Izmeritel'naja tehnika. 2011. № 1. pp. 32 – 36.
18. Borovkov V.I., Ignatjev V.K., Nikitin A.V., Yushanov S.V. Izvestija vuzov. Jelektromehanika. 2012. № 1. pp. 16 – 20.