

## Получение эквивалентного модуля сопротивления для участка реки с параллельными рукавами

*А.В.Ботвинков<sup>1</sup>, С.В.Моторин<sup>1,2</sup>, К.В.Катковская<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск*

**Аннотация:** Приведен анализ метода Н.Н. Павловского для расчета параметров русла реки в рукавах. Установлены причины ограничения данного метода. Использовано преобразование Лагранжа при нахождении экстремума целевой функции для уравнений неравномерного движения жидкости, что делает получения эквивалентного модуля сопротивления в высшей степени наглядным и простым в использовании. Приведены результаты эксперимента.

**Ключевые слова:** методика расчета, многоузловые участки рек, модуль сопротивления, метод Н.Н.Павловского.

**Введение.** При решении задачи регулирования распределения воды по рукавам на многоузловых участка рек широкое распространение получил матричный метод, благодаря которому исходный участок реки представляется в виде графа, для которого создаётся исходная матрица соединений, представленная в в виде матрицы инцидентности [1, 2].

Модификация данного метода хорошо зарекомендовала себя для расчёта любых участков рек, позволяет устранить требования к однозначному установлению направления течения реки [3].

Для подтверждения качества результатов моделирования указанным методом, например, при выполнении научно-исследовательских работ, может потребоваться верификация. Для этого необходимо произвести расчёт альтернативным способом. Таким методом является метод Н.Н. Павловского, который позволяет найти распределение расходов воды по рукавам на простых участках рек. Однако, он не позволяет найти распределение расходов воды на сложных участках рек, где есть поперечные рукава, называемые перетоками [4, 5].

**Исходные положения.** Метод Павловского сталкивается с трудностями при расчёте участка реки, где есть комбинации параллельно-последовательных соединений. Пример участка реки данного типа представлен на рис.1.

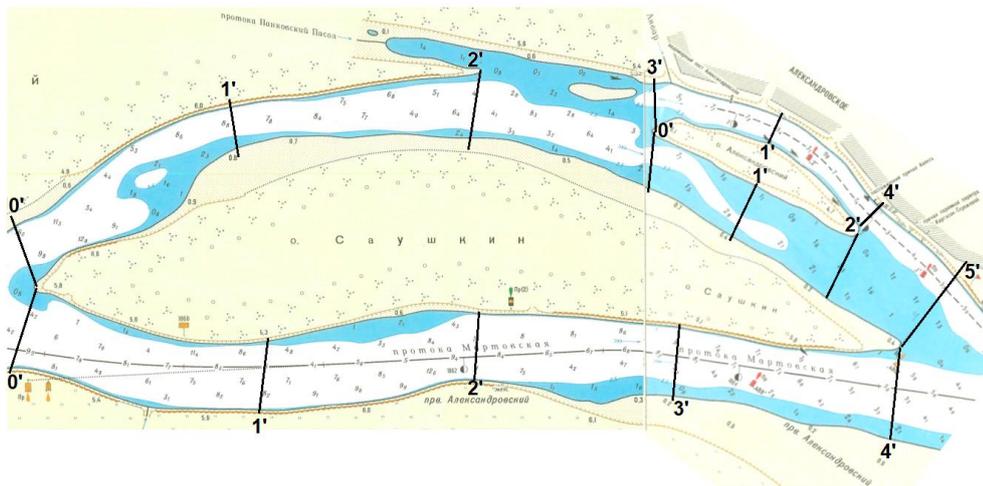


Рис. 1 – Выкопировка с лоции многоузлового участка реки у острова «Саушкин»

Схематично, в виде графа рисунок 1 представлен на рисунке 2.



Рис. 2 - Схема многоузлового участка реки у острова «Саушкин»

Для расчёта распределения расходов воды на участке реки при параллельном соединении рукавов методом Н.Н. Павловского применяется выражение:

$$Q_l = \frac{Q_{общ}}{1 + \sqrt{\frac{\sum F_l}{\sum F_{np}}}} \quad (1)$$

где  $Q_l$  – расход воды в левом от острова рукаве,  $Q_{общ}$  – общий расход воды,  $F_l$  – модуль сопротивления в левом от острова рукаве,  $F_{np}$  – модуль сопротивления в правом от острова рукаве.

Чтобы воспользоваться данной формулой (1) необходимо найти общее сопротивление для левого ( $F_l$ ) и правого ( $F_{np}$ ) рукавов относительно острова «Саушкин». Для указанной схемы (рис. 2) общее сопротивление правого рукава определяется легко – суммированием соответствующих модулей сопротивлений. В то время, как для левого рукава воспользоваться суммой нельзя, пока не будет найдено эквивалентное сопротивление участка вокруг острова «Александровский».

Формула для расчёта эквивалентного сопротивления методе Н.Н. Павловского отсутствует. Предполагается искать сопротивление методом подбора, что может сказаться на точности вычислений. Данные допущения плохо согласуются с задачей верификации данных. Вызывает вопросы и формула (1) вывод которой в индексируемых источниках и учебниках отсутствует, она даётся, как аксиома.

**Методика расчета.** Чтобы разобраться с участком реки (рис. 2), требуется разобраться с особенностями параллельного сопротивления рукавов. Участок реки с двумя параллельными рукавами (одним островом) представлен на рис. 3. Затраты энергии в диссипативных системах будут стремиться к минимуму [2, 6].

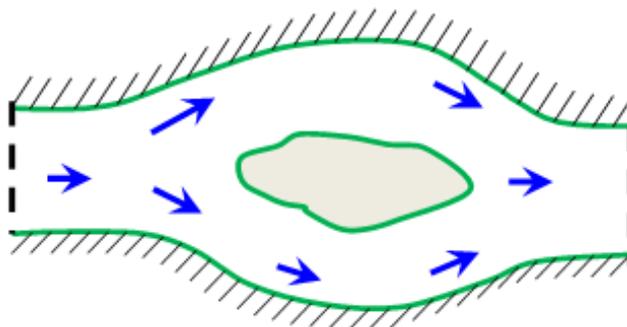


Рис. 3. – Участок реки с одним островом

Используя уравнения для неравномерного движения жидкости (2) и выражение для нахождения мощности на участке реки (3) [6, 7] имеем:

$$\Delta z = F \cdot Q^2, \quad (2)$$

$$W = Q \cdot \Delta z = Q^3 \cdot F. \quad (3)$$

С учетом (2) и(3) система уравнений для рассматриваемого участка реки (рис. 3) примет вид:

$$\begin{cases} W = \Delta z_1 \cdot Q_1 + \Delta z_2 \cdot Q_2 \\ Q_1 + Q_2 = Q \end{cases}, \quad (4)$$

где  $W$  - суммарная мощность на участке реки, которая должна быть минимальной;  $\Delta z_1, \Delta z_2$  и  $Q_1, Q_2$  - перепад уровней и расходы воды на 1 и 2 участках;  $Q$  - общий расход воды. Из второго уравнения системы (4) следует, что расходы воды  $Q_1$  и  $Q_2$  должны иметь одинаковые знаки.

Используя преобразование Лагранжа [8] и формулу (2), система (4) примет вид:

$$\min L(Q_1, Q_2, \lambda) = Q_1^3 \cdot F_1 + Q_2^3 \cdot F_2 + \lambda(Q - Q_1 - Q_2), \quad (5)$$

где  $\frac{dL}{dQ_1} = 0$ ,  $\frac{dL}{dQ_2} = 0$ ,  $\frac{dL}{d\lambda} = 0$ , отсюда следует:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dQ_1} = 3 \cdot Q_1^2 \cdot F_1 - \lambda \cdot (Q - Q_1 - Q_2) = 0 \\ \frac{dL}{dQ_2} = 3 \cdot Q_2^2 \cdot F_2 - \lambda \cdot (Q - Q_1 - Q_2) = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} Q_2 = \pm Q_1 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}, \\ Q - Q_1 - Q_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Из (7), подставляя первое уравнение во второе, получим:

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}} \quad \text{или} \quad Q_2 = \frac{Q}{1 + \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}, \quad (8)$$

что полностью соответствует выражению (1).

Подставляя в формулу 8 в место общего расхода воды  $Q$  формулу 2, выраженную через  $Q$ , получаем выражение для нахождения эквивалентного сопротивления при параллельных соединениях рукавов:

$$F = \frac{F_1 \cdot F_2}{F_1 + 2 \cdot \sqrt{F_1 \cdot F_2} + F_2}. \quad (9)$$

Используя формулу (9) для нахождения эквивалентного сопротивления вокруг острова «Александровский» (рис. 2), можно найти  $F_l$  для острова «Саушкин» и, как следствие, все расходы воды на данном участке реки.

**Результаты тестирования.** Сравнение модифицированного матричного метода и метода Н.Н. Павловского, с использованием формулы нахождения эквивалентного сопротивления (9) (проведенные в среде MathCad) продемонстрированы в таблице №1 [9].

Таблица №1

Результаты расчёта разниц отметок уровней воды

Метод расчета	Результаты расчета			
	$Q_{1-4}$	$Q_{5-7}, Q_{12}$	$Q_{8-9}$	$Q_{10-11}$
Н.Н. Павловского	5422.26284	3077.73716	1483.64136	1594.09579
Матричный	5421.50658	3078.49342	1483.96413	1594.52929

**Выводы.** Результаты моделирования показывают справедливость использования представленной в настоящей работе формулы нахождения эквивалентного сопротивления при параллельном соединении рукавов (9). Таким образом, метод Н.Н. Павловского может подходить в качестве способа для верификации полученных результатов [10, 11].

## Литература

1. Ботвинков А.В., Голышев Н.В. Расчёт водного потока распределённого по рукавам в многорукавных участках рек // Инженерный вестник Дона. 2019. № 5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971)
2. Ботвинков В.М., Голышев Н.В., Седых В.А., Моторин С.В., Ботвинков А.В. Программный модуль для расчёта и анализа локальных параметров русла на примере Обского бассейна // Науч. проблемы трансп. Сибири и Дал. Востока. 2014. №3. pp. 86-93.
3. Моторин С.В., Ботвинков А.В., Голышев Н.В. Методика численного расчёта водного потока на многоузловых участках рек // Инженерный вестник Дона. 2023. № 2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n22y2023/8238](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n22y2023/8238)
4. Aleshkin S.A., Kornilov M.V. Mathematical modeling of water flow distribution over the deltaic channels. 2001. URL: [researchgate.net/publication/293739847\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_water\\_flow\\_distribution\\_over\\_the\\_deltaic\\_channels](https://researchgate.net/publication/293739847_Mathematical_modeling_of_water_flow_distribution_over_the_deltaic_channels).
5. Гришанин, К.В. Гидравлические сопротивления естественных русел. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. 182 с.
6. Леонов Г.А., Морозов А.В. О глобальной устойчивости стационарной генерации в лазерах. Радиотехника и электроника, 1987. Т. 32. № 9. С. 1915–1921.
7. Михайлов В.Н. Гидрология: Учебник для вузов. Москва: Высш. шк., 2007. 463 с.
8. Ланцош, Корнелий. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с.
9. Кремень Е.В., Кремень Ю.А., Расолько Г.А. Численные методы. Практикум в MathCad: учебное пособие. Минск: Вышэйшая школа, 2019. 255 с.

10. Dobrovolska O. Development of procedure to control flow distribution in water supply networks in real time // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. pp. 17-24

11. Зернов С.Я. Внутренние водные пути Северо-Восточного региона: Проектирование строительство, эксплуатация. Новосибирск: Наука, 2003. С.71-73

### References

1. Botvinkov A.V., Goly`shev N.V Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5971)

2. Botvinkov V.M., Golyshev N.V., Sedyh V.A., Motorin S.V., Botvinkov, A.V Nauchnye problemy transporta Sibiri i Dal'nego Vostoka. 2014. № 3. pp. 86-93

3. Motorin S.V., Botvinkov A.V., Goly`shev N.V Inzhenernyj vestnik Dona, 2023. № 2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n22y2023/8238](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n22y2023/8238)

4. Aleshkin S.A., Kornilov M.V. Mathematical modeling of water flow distribution over the deltaic channels 2001. URL: [researchgate.net/publication/293739847\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_water\\_flow\\_distribution\\_over\\_the\\_deltaic\\_channels](https://researchgate.net/publication/293739847_Mathematical_modeling_of_water_flow_distribution_over_the_deltaic_channels).

5. Grishanin N.V. Gidravlicheskiye soprotivleniya yestestvennykh rusel. [Hydraulic resistances of natural channels Sankt-Peterburg: Gidrometeoizdat, 1992. 182 p.

6. Leonov G.A., Morozov A.V. O global'noy ustoychivosti statsionarnoy generatsii v mazerakh. [On the global stability of stationary generation in masers] Radiotekhnika i elektronika, 1987. T. 32. No 9. pp. 1915–1921.

7. Mikhaylov V.N. Gidrologiya: Uchebnik dlya vuzov. [Hydrology: Textbook for universities.] Moskva: Vyssh. shk., 2007. 463 p.

8. Lantsosh, Korneliy. Variatsionnyye printsipy mekhaniki. [The variational principles of mechanics.] Moskva: Mir, 1965. 408 p.



9. Kremen' E.V., Kremen' Ju.A., Rasol'ko G.A. Chislennye metody. Praktikum v MathCad: uchebnoe posobie. [Numerical methods. Workshop in MathCad: a textbook]. Minsk: Vyshnejshaja shkola, 2019. 255 p.

10. Dobrovolska O. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies 2018, pp. 17-24.

11. Zernov S.Ja Vnutrennie vodnye puti Severo-Vostochnogo regiona: Proektirovanie, stroitel'stvo, jekspluatacija. [Internal waterways of the northeast region]. Novosibirsk: Nauka, 2003, pp. 71-73.

**Дата поступления: 25.03.2024**

**Дата публикации: 1.05.2024**