

Математическое моделирование состояния тонкого диска при тепловом и силовом воздействиях

М.А. Артемов, Е.С. Барановский, В.В. Акиньшин,

Н.С. Скорняков, Д.Б. Фатхудинов

Воронежский государственный университет

Аннотация: Выполняется математическое моделирование состояния тонкого кругового диска, испытывающего тепловое и силовое воздействия. В центральной части диска создается однородное поле температур. В рамках деформационной теории идеального упругопластического тела выбирается квадратичное условие пластичности. Установлены зависимости между радиусом диска, температурой центральной области диска и внешним давлением, определяющие возникновение пластических областей. Для различных значений внешних параметров модели приведены графики напряжений, эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений.

Ключевые слова: быстровращающийся диск, деформационная теория, идеальное упругопластическое тело, условие текучести Мизеса, плосконапряженное состояние, термо-упругопластичность.

Введение

Вопросы математического моделирования состояния тонкого диска, испытывающего воздействия разной природы, рассматривались в ряде статей, например, [1–10]. В [3–5, 8–10] рассматривалось термоупругопластическое состояние диска для кусочно-линейных функций пластичности. Такой подход позволяет выполнить процедуру интегрирования соотношений ассоциированного закона пластического течения. Однако выбор кусочно-линейных функций пластичности приводит к разрыву пластических деформаций для сингулярных режимов пластичности. Выбор гладких функций пластичности не позволяет выполнить процедуру интегрирования соотношений ассоциированного закона пластического течения аналитически. Существенное упрощение для гладких функций пластичности достигается при использовании соотношений деформационной теории [6, 7]. Такой подход реализуется в данной статье. Для оценки напряженного состояния в упругой области выбирается

эквивалентное напряжение [11], равное функции пластичности. В настоящей работе используется термин «параметры управления поведением изучаемого объекта» (точнее говоря, математической модели объекта). По сути, «параметры управления» совпадают с термином «исходные данные», который используется в информатике при построении алгоритмов решения задач.

Постановка задачи

На внешнем контуре тонкого кругового диска $\rho = b$ поддерживается постоянная температура $T_b = 0$ и задано давление p_b . В центральной части диска $0 \leq \rho \leq a$ температура $T = T_a$. Для решения задачи определения полей напряжений, деформаций, перемещений и температур выбирается цилиндрическая система координат ρ, θ, z . Поле температур центральной части диска $0 \leq \rho \leq a$, которую в дальнейшем называем ядром диска, является однородным $T = T_a$.

Все приводимые соотношения являются безразмерными. Масштабная единица длины равна радиусу диска b . Предел пластичности на одноосное растяжение при температуре $T = 0$ является масштабной единицей для напряжений. Для безразмерных величин принято обозначение размерных величин.

Поле температур

Используя усредненные по толщине диска величины, для несвязной термомеханической задачи поле температур определяется по формуле [1]

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq a, \\ \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}, & a < \rho \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Эквивалентное напряжение

Для оценки величины напряженного состояния определим эквивалентное напряжение. Полагается, что эквивалентное напряжение σ_{eq} совпадает с функцией пластичности условия Мизеса

$$\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\rho}^2 - \sigma_{\theta}\sigma_{\rho} = k^2. \quad (2)$$

По принятой терминологии [11] упругопластическую область, в которой выполняется условие (2), будем называть пластической.

О переходе в пластическое состояние

Возможный переход ядра диска $0 \leq \rho \leq a$ в предельное состояние

$$\sigma_{eq} |_{0 \leq \rho \leq a} = k^2 \quad (3)$$

происходит, когда

$$T_a = T_{in} = \frac{2b^2(k - p_b)}{\alpha E(b^2 - 2I_{0b})}, \quad I_{0b} = \int_0^b f\rho d\rho. \quad (4)$$

а возможный переход границы диска $\rho = b$ в предельное состояние

$$\sigma_{eq} |_{\rho=b} = k^2 \quad (5)$$

происходит, когда

$$T_a = T_{ex} = \frac{(p_b + \sqrt{4k^2 - 3p_b^2})b^2}{4\alpha E I_{0b}}. \quad (6)$$

Формулы (4), (6) определяют согласованные значения внешних параметров управления при выполнении условий (3) и (5) соответственно.

Равенство $T_{in} = T_{ex}$ позволяет определить внутренний радиус диска $a = a_k$, когда область однородного напряженного состояния $0 \leq \rho \leq a$ и внешний контур диска $\rho = b$ переходят в пластическое состояние. На рис. 1 показаны зависимости T_{in}, T_{ex} от радиуса a центральной части диска.

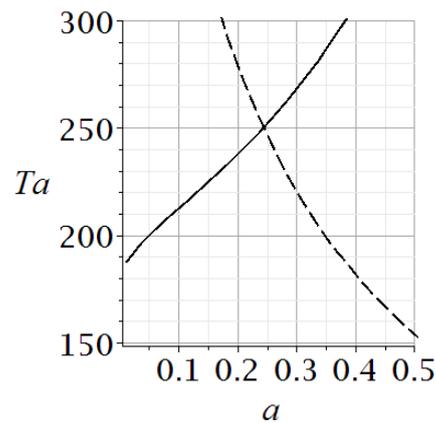


Рис. 1. Пунктирная линия – T_{ex} , сплошная – T_{in} , $p_b = 0, \nu = 0.3$

Если температура T_a ядра диска равна нулю, то диск переходит в предельное состояние, когда давление на внешнем контуре диска $p_b = \pm k$. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $T_a > 0$. В ядре диска реализуется однородное напряженное состояние, при этом $\sigma_\rho = \sigma_\theta$.

Внутренняя пластическая область

Рассмотрим случай, когда пластическая область зарождается в центре диска. Выше было показано, что для этого должно выполняться условие $a > a_k$. Температурное воздействие приводит к сжимающим радиальным напряжениям. Пусть c_1 – радиус упругопластической границы ($a < c_1$). Если считать предел пластичности величиной независимой от температуры, то в пластической области $0 \leq \rho \leq c_1$ напряжения $\sigma_\rho = \sigma_\theta = -k$.

Упругая область

Пусть область $c_1 \leq \rho \leq b$ находится в упругом состоянии, тогда:

$$\sigma_\rho = -\frac{3+\nu}{8}m\rho^2 - \frac{T_a\alpha E}{\rho^2}I_{c_1\rho} + A - \frac{B}{\rho^2}, \quad I_{c_1\rho} = \int_{c_1}^{\rho} f\rho d\rho, \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2 + T_a\alpha E \left(\frac{1}{\rho^2}I_{c_1\rho} - f \right) + A + \frac{B}{\rho^2}.$$

Если для определения величин A и B используем условия $\sigma_\rho|_{\rho=c_1} = -k$, $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$, то

$$A = \frac{3+\nu}{8} m(b^2 + c_1^2) + \frac{\alpha E T_a I_{c_1 b} - b^2 p_b + c_1^2 k}{b^2 - c_1^2},$$

$$B = \frac{3+\nu}{8} m b^2 c_1^2 + \frac{(\alpha E T_a I_{c_1 b} + (k - p_b) b^2) c_1^2}{b^2 - c_1^2}.$$

а радиус упругопластической границы определяется из условия $\sigma_\theta|_{\rho=c_1} = -k$.

Если для определения величин A и B используем условия $\sigma_\rho|_{\rho=c_1} = -k$, $\sigma_\theta|_{\rho=c_1} = -k$, то

$$A = \frac{1+\nu}{4} m c_1^2 + \frac{1}{2} \alpha E T_a f_{c_1} - k,$$

$$B = -\frac{1-\nu}{8} m c_1^4 + \frac{1}{2} \alpha E T_a c_1^2 f_{c_1}.$$

а радиус упругопластической границы определяется из условия $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$.

Согласно закону Гука деформации в области $c_1 \leq \rho \leq b$:

$$E \varepsilon_\rho = \sigma_\rho - \nu \sigma_\theta, \quad E \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu \sigma_\rho.$$

На упругопластической границе, учитывая (7),

$$E \varepsilon_\rho|_{\rho=c_1} = (3\nu^2 + 2\nu - 3) \frac{m c_1^2}{8} + (1 - \nu) A - (1 + \nu) \frac{B}{c_1^2}.$$

Поскольку $\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}$, $\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}$, то на упругопластической границе

$$u|_{c_1} = \varepsilon_\theta|_{c_1} c_1.$$

Если принять гипотезу о естественном состоянии [11], то в случае активного нагружения, согласно теории пластического течения и деформационной теории в области $0 \leq \rho \leq c_1$ пластические деформации

$$\varepsilon_{\theta}^p = \varepsilon_{\rho}^p. \quad (8)$$

В области $0 \leq \rho \leq c_1$ упругие деформации

$$E\varepsilon_{\theta}^e = E\varepsilon_{\rho}^e = -(1-\nu)k. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^p + \varepsilon_{\theta}^e = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho} = \varepsilon_{\rho}^p + \varepsilon_{\rho}^e = \frac{du}{d\rho}, \quad (10)$$

из (8)–(10) получаем уравнение для радиального перемещения

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{u}{\rho} \quad (11)$$

Решение уравнения (11) имеет вид $u = C\rho$. Поэтому

$$\varepsilon_{\theta}^p = \varepsilon_{\rho}^p = C + \frac{1-\nu}{E}k$$

Поскольку на упругопластической границе $\varepsilon_{\theta}^p = \varepsilon_{\rho}^p = 0$, то величина

$$C = -\frac{1-\nu}{E}k.$$

Таким образом, при увеличении упругопластической границы в пластической области пластические деформации остаются нулевыми.

Изменение напряженного и деформированного состояния обусловлено изменением значений внешних параметров T_a и p_b . Параметром нагружения, определяющим процесс активного нагружения диска, является радиус упругопластической границы, поэтому монотонность функции c_1 может выполняться только при согласованном изменении внешних параметров. Параметром нагружения в точках упругой области является эквивалентное напряжение. Изменение напряженного состояния в точках диска показывает годограф вектора напряжений.

В процессе нагружения в диске будет только одна внутренняя пластическая область, пока эквивалентное напряжение $\sigma_{eq}|_{\rho=b} < k^2$. Данное

условие позволяет определить максимальное значение параметра T_a , контролирующее выполнение этого условия.

Внешняя упругопластическая область

Рассмотрим случай, когда пластическая область зарождается на границе $\rho = b$ диска. Выше было показано, что для этого должно выполняться условие $a < a_k$. Пусть c_2 – радиус упругопластической границы. Тогда область диска $0 \leq \rho \leq c_2$ находится в упругом состоянии, где

$$\sigma_\rho = -\frac{3+\nu}{8}m\rho^2 - \frac{T_a\alpha E}{\rho^2}I_{0\rho} + A - \frac{B}{\rho^2},$$
$$\sigma_\theta = -\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2 + T_a\alpha E\left(\frac{1}{\rho^2}I_{0\rho} - f\right) + A + \frac{B}{\rho^2}.$$

В центре диска $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, поэтому $B = 0$ (можно привлекать иные соображения [1]). На упругопластической границе должны выполняться условия непрерывности напряжений. Обозначим через p_{c_2} давление на упругопластической границе. Тогда

$$A = \frac{3+\nu}{8}mc_2^2 + \frac{T_a\alpha E}{c_2^2}I_{0c_2} - p_{c_2}.$$

В области $c_2 \leq \rho \leq b$ напряжения находим из решения задачи Коши

$$\begin{cases} r \frac{d\sigma_\rho}{dr} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_\theta = (\sigma_\rho + \sqrt{4k^2 - 3\sigma_\rho^2})/2, \\ \sigma_r|_{\rho=b} = -p_b \end{cases}$$

Величины p_{c_2} и c_2 определяются из условия непрерывности $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ на границе $\rho = c_2$. Упругие деформации определяются согласно закону Гука.

Для того чтобы реализовалась только внешняя пластическая область, должно выполняться условие $\sigma_{eq}|_{\rho=0} < k^2$, из которого следует формула для определения наибольшего допустимого значения T_a

$$\left(\frac{T_a \alpha E}{2} + \frac{3+\nu}{8} m c_2^2 + \frac{T_a \alpha E}{c_2^2} I_{0c_2} - p_{c_2} \right)^2 - k^2 = 0.$$

Согласно деформационной теории [2, 11] тензор пластических деформаций пропорционален девиатору напряжений $\varepsilon_{ij}^p = \psi(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} tr \sigma \delta_{ij})$.

Учитывая формулы (10), имеем

$$\begin{cases} \frac{dEu}{d\rho} = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} \left(\frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho \right) + \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ u|_{\rho=c_2} = u_{c_2}. \end{cases}$$

Величина u_{c_2} определяется из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе. Полные и пластические деформации определяются по формулам (10).

Две пластические области

В области $0 \leq \rho \leq c_1$

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = k.$$

В области $c_1 \leq \rho \leq c_2$

$$A = \frac{1+\nu}{4} m c_1^2 + \frac{1}{2} \alpha E T_a f_{c_1} - k, \quad B = -\frac{1-\nu}{8} m c_1^4 + \frac{1}{2} \alpha E T_a c_1^2 f_{c_1}.$$

напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{3+\nu}{8} m \rho^2 - \frac{T_a \alpha E}{\rho^2} I_{c_1 \rho} + A - \frac{B}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{1+3\nu}{8} m \rho^2 + T_a \alpha E \left(\frac{1}{\rho^2} I_{c_1 \rho} - f \right) + A + \frac{B}{\rho^2}. \end{aligned}$$

На границе $\rho = c_2$

$$(\sigma_\theta^2 + \sigma_\rho^2 - \sigma_\theta \sigma_\rho)|_{\rho=c_2} = k^2,$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=c_2} = -\frac{3+\nu}{8} m c_2^2 - \frac{T_a \alpha E}{c_2^2} I_{c_1 \rho} + A - \frac{B}{c_2^2},$$

$$\sigma_\theta|_{\rho=c_2} = -\frac{1+3\nu}{8} m c_2^2 + T_a \alpha E \left(\frac{1}{c_2^2} I_{c_1 \rho} - f_{c_2} \right) + A + \frac{B}{c_2^2}.$$

Величины c_1 и c_2 определяются из условия непрерывности $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ на границах $\rho = c_1, \rho = c_2$. Когда $c_1 = c_2$. Диск переходит в предельное состояние.

Результаты численных расчетов

На рис. 2 приведены графики напряжений и годограф вектора напряжений, когда пластическая область занимает только центральную часть диска

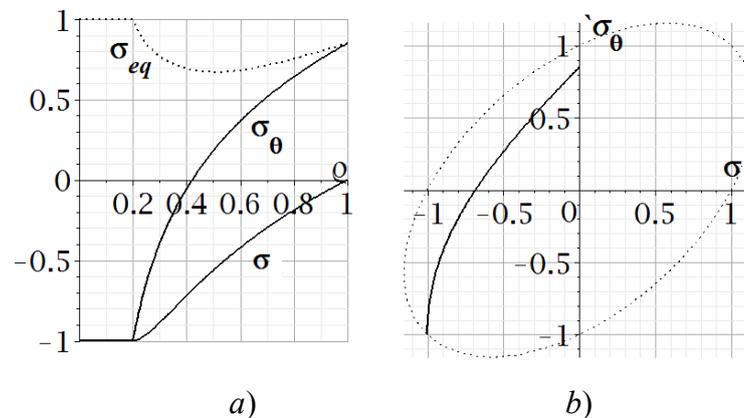


Рис. 2. а) напряжения, б) годограф вектора напряжений, когда

$$c_1 = 0.2, T_a = 237.5.7, \alpha E = 0.012, \nu = 0.2, p_b = 0$$

На рис. 3 приведены графики напряжений и годограф вектора напряжений, когда пластическая область занимает область $c_2 \leq \rho \leq b$.

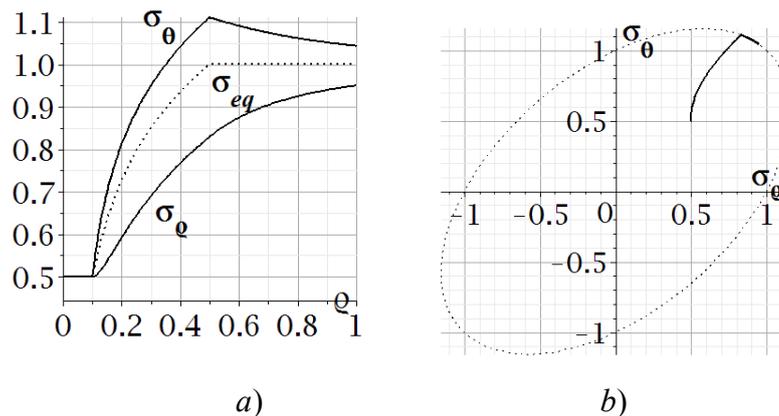


Рис.3. а) напряжения, б) годограф вектора напряжений, когда
 $a = 0.1, \nu = 0.4, p_b = 0.95, \alpha E = 0.012, Ta = 112.3$

В области $0 \leq \rho \leq a$ рис. 2 а) и рис. 3 а), где реализуется однородное напряженное состояние $\sigma_r = \sigma_\phi = const$, соответствует одна точка годографа напряжений рис. 2 б) и рис. 3 б).

Графики для годографа вектора напряжений являются элементом верификации алгоритма решения задачи. Такой прием верификации использовался также в работах [9, 10].

Выводы

Рассматриваемая модель не учитывает зависимость внутренних параметров управления k, ν, E и др. от температуры, что привносит следующую существенную особенность. В центральной пластической области $0 \leq \rho \leq c_1$ поле напряжений однородное и, если эта область находится в пластическом состоянии, то в ней реализуется режим полной пластичности $\sigma_r = \sigma_\phi = k$. Данный результат непосредственно следует из того, что для плоского напряженного состояния в пластической области задача статически определимая, а уравнение равновесия и условие пластичности не учитывают влияние температуры. Результаты исследования, приведенные в настоящей работе, позволяют достаточно просто

формулировать алгоритм определения значений внутренних параметров состояния, поскольку полученные формулы для нахождения значений параметров управления позволяют определять, когда и где будет происходить переход точек диска из упругого состояния в пластическое.

Литература

1. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970, 506 p.
2. Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006, 882 p.
3. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963, 252 с.
4. Gamer U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated disk // Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8, pp. 41–51.
5. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74, pp. 27–39.
6. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й. Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. С. 310–312.
7. Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Механика твердого тела. 2014. № 2. С. 124–131.
8. Афанасьев А. А., Горностаев К. К., Ковалёв А. В., Чеботарев А. С. О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 57–66.
9. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом

зависимости предела текучести от температуры // Инженерный вестник Дона, 2017, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359

10. Бердзенишвили Г. Г., Артемов М. А., Барановский Е. С., Сёмка Э. В., Фатхудинов Д. Б. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника // Инженерный вестник Дона, 2018, № 2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4973/.

11. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука. 1969. 420 с.

References

1. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970, 506 p.

2. Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006, 882 p.

3. Parkus H. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya [Unsteady thermal stresses]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 252 p.

4. Gamer U. Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8, pp. 41–51.

5. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74, pp. 27–39.

6. Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzeng Y. R. Dokladi Akademii nauk, 2012. V. 443, p. 310–312.

7. Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Mechanika tverdogo tela. 2014. № 2, p. 124–131.

8. Afanas'ev A. A., Gornostaev K. K., Kovalev A. V., Chebotarev A. S. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2017. № 50, pp. 57–66.

9. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359



10. Berdzenishvili G. G., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Semka E. V., Fatchudinov D. B. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2018. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4973

11. Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti [Foundations of the Theory of Plasticity]. Moscow: Nauka, 1969, 420 p.