

Преимущества шагового метода определения предельных нагрузок в стержневых системах

Л.Н.Панасюк, Н.А.Савельева, В.С. Тюрина, А.В. Сазонова

Донской государственной технической университет

Аннотация: В статье приводится алгоритм шагового метода определения предельных нагрузок для упругопластических стержневых систем. Разработан итерационный процесс с усложнением используемых гипотез, учитывающих влияние момента и продольной силы на предельное состояние отдельных сечений, протяженность зон пластической деформации по длине стержня. Продемонстрировано преимущество шагового метода определения предельных нагрузок в стержневых системах в сравнении с «прямым методом» А.Р. Ржаницына. Определены функции формы в зависимости от типа сечения в явном виде; разработан алгоритм табулирования функции формы.

Ключевые слова: стержневые системы, шаговый метод, пластический шарнир, предельное состояние, предельная нагрузка.

Алгоритм шагового метода определения предельных нагрузок для упругопластических стержневых систем состоит из следующих пунктов.

1. На первом этапе расчета для исходной схемы при "единичной" внешней нагрузке $\bar{P}_0 = \bar{\beta} P_0^2$ формируется матрица жесткости K^1 (верхний индекс указывает номер этапа) и из решения системы уравнений определяется вектор перемещений, соответствующий единичной нагрузке [1,2]:

$$K^{(1)} \bar{q}^{(1)} = \bar{P}_0 \Rightarrow \bar{q}^{(1)} = (K^{(1)})^{-1} \bar{P}_0$$

По вектору $\bar{q}^{(1)}$ определяются ординаты эпюр изгибающих моментов, возникающих в системе от единичных внешних сил.

$$\bar{q}^{(1)} \Rightarrow \bar{M}^{(1)} = \{ \bar{M}_i^{(1)} \}, \quad i = \dots s \quad (1)$$

В (1) множество ординат эпюры моментов $\{ \bar{M}_i^{(1)} \}$ определяется количеством расчетных сечений s .

Предельная нагрузка первого этапа, когда в системе появляется первый пластический шарнир, определяется минимальным коэффициентом

пропорциональности нагрузки $\beta^{(1)}$, где выборка минимума осуществляется по всем сечениям.

$$\beta_{(i)}^{(1)} \left| \overline{M}_i^{(1)} \right| = M_{PP,i}, \beta^{(1)} = \min \{ \beta_{(i)}^{(1)} \}, i = 1 \dots s \quad (2)$$

В (2) $M_{PP,i}$ - предельный момент в сечении i . Предельная эпюра моментов, вектор перемещений и нагрузка в конце первого этапа определяют в виде:

$$M_{PP}^{(1)} = \beta^{(1)} \overline{M}^{(1)}, q_{PP}^{(1)} = \beta^{(1)} \overline{q}^{(1)}, P_{PP}^{(1)} = \beta^{(1)} \overline{P}_0$$

2. В начале второго этапа изменяется расчетная схема конструкции – в сечениях с предельными значениями изгибающего момента вводятся пластические шарниры.

В расчетных сечениях из решения уравнения (3) определяется значения приращения параметра β , при котором в очередном сечении образуется пластический шарнир, и из всего множества значений выбирается минимальное [3-5].

$$\begin{cases} \left| M_{PP,i}^{(1)} + \Delta\beta_i^{(2)} \Delta\overline{M}^{(2)} \right| = M_{PP,i}, \\ \Delta\beta^{(2)} = \min \{ \Delta\beta_i^{(2)} \}, i = 1 \dots s \end{cases} \quad (3)$$

После этого определяют нагрузку, эпюру моментов и вектор угловых перемещений в конце второго этапа, т.е. при образовании новой группы пластических шарниров:

$$\begin{cases} \beta^{(2)} = \beta^{(1)} + \Delta\beta^{(2)}, \\ P_{PP}^{(2)} = \beta^{(2)} P_0, \\ M_{PP}^{(2)} = M_{PP}^{(1)} + \Delta\beta^{(2)} \bullet \Delta\overline{M}^{(2)}, \\ q_{PP}^{(2)} = q_{PP}^{(1)} + \Delta\beta^{(2)} \bullet \Delta\overline{q}^{(2)} \end{cases} \quad (4)$$

По индукции на итерации m процесс определяется в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{cases} K^{(m)} \Delta \bar{q}^{(m)} = \Delta \bar{P}^{(m)} = \Delta \bar{\beta}^{(m)} P_0, \\ \Delta \bar{q}^{(m)} = (K^{(m)})^{-1} \Delta \bar{P}^{(m)}, \\ \Delta \bar{q}^{(m)} \Rightarrow \Delta \bar{M}^{(m)} = \left\{ \Delta \bar{M}_{(i)}^{(m)} \right\} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \left| M_{PP,i}^{(m-1)} + \Delta \beta_i^{(m)} \Delta \bar{M}^{(m)} \right| = M_{PP,i}, \\ \Delta \beta^{(m)} = \min \left\{ \Delta \beta_i^{(m)} \right\}, i = 1 \dots s. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \beta^{(m)} = \beta^{(m-1)} + \Delta \beta^{(m)}, \\ P_{PP}^{(m)} = \beta^{(m)} P_0, \\ M_{PP}^{(m)} = M_{PP}^{(m-1)} + \Delta \beta^{(m)} \bullet \Delta \bar{M}^{(m)}, \\ q_{PP}^{(m)} = q_{PP}^{(m-1)} + \Delta \beta^{(m)} \bullet \Delta \bar{q}^{(m)}. \end{cases} \quad (7)$$

В шаговом процессе (5) – (7) очередной измененный вариант схемы конструкции рассчитывается не на полную нагрузку, а на приращение нагрузки после образования нового пластического шарнира. Предельный внутренний момент в пластическом шарнире учтен в предыдущей расчетной схеме в конце этапа нагружения. На новом этапе приращения нагрузки изменение момента в пластическом шарнире отсутствует, т.к. сечение уже исчерпало возможность сопротивления. Поэтому в варианте шагового процесса, в отличие от "прямого метода" А.Р. Ржаницына, не производится добавление в пластический шарнир уравновешенной пары предельных моментов, за счет чего повышается простота предлагаемого алгоритма.

В рассмотренном варианте схемы нагрузка определялась вектором P_0 , все компоненты которого изменялись пропорционально одному параметру, т.е. был рассмотрен процесс простого нагружения. Итак, предположим, что процесс изменения внешней нагрузки моделируется следующим образом. На первом этапе внешние силы возрастают от нуля до промежуточного конечного значения, определяемого вектором P_1 . Затем внешние силы изменяются от P_1 до некоторого нового значения, определяемого вектором P_2 , затем до P_3 и т.д. до исчерпания несущей способности конструкции [6,7]. В (5) – (7) вектор P_0 заменяется на ΔP_1 . Если на некотором этапе получим

значение параметра $\beta^{(m)} > 1$, то это означает, что «проскочили» точку изменения закона роста нагрузки, поэтому на этом этапе проводится дополнительная внутренняя итерация. Параметр $\beta^{(m)}$ полагается равным единице, и вычисляются значения моментов и перемещений, соответствующей полной нагрузке P_1 :

$$\begin{cases} \beta^{(m)} = 1, \Delta\beta^{(m)} = 1 - \beta^{(m-1)}, \\ P_{PP}^{(m)} = P_1, \\ M_{PP}^{(m)} = M_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{M}^{(m)}, \\ q_{PP}^{(m)} = q_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{q}^{(m)}. \end{cases}$$

Внешняя итерация (5) – (7) повторяется снова с заменой P_0 на ΔP_2 . Если далее при достижении предельного состояния параметр β вновь превысит единицу, то вновь повторяется внутренняя итерация с последующей заменой P_0 на ΔP_3 , а предельная нагрузка в конце второго этапа роста силы составит P_2 [8,9]. Окончательно этот итерационный процесс запишем в виде:

$$\begin{cases} K^{(m)} \Delta\bar{q}^{(m)} = \Delta\bar{P}^{(m,n)} = \Delta\bar{\beta}^{(m)} \Delta P_n, \\ \Delta\bar{q}^{(m)} = (K^{(m)})^{-1} \Delta\bar{P}^{(m,n)}, \\ \Delta\bar{q}^{(m)} \Rightarrow \Delta\bar{M}^{(m)} = \{\Delta\bar{M}_{(i)}^{(m)}\} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} |M_{PP,i}^{(m-1)} + \Delta\beta_i^{(m)} \Delta\bar{M}^{(m)}| = M_{PP,i}, \\ \Delta\beta^{(m)} = \min\{\Delta\beta_i^{(m)}\}, i = 1 \dots s \\ \text{если } \beta^{(m)} > 1 \text{ то перейти к (11)} \\ \text{если } \beta^{(m)} < 1 \text{ то перейти к (10)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \beta^{(m)} = \beta^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)}, \\ P_{PP}^{(m,n)} = \beta^{(m)} \Delta P_n + \Delta P_{n-1}, \\ M_{PP}^{(m)} = M_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{M}^{(m)}, \\ q_{PP}^{(m)} = q_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{q}^{(m)}, \text{ перейти к (8)}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \beta^{(m)} = 1, \Delta\beta^{(m)} = 1 - \beta^{(m-1)}, \\ P_{PP}^{(m,n)} = P_n, \\ M_{PP}^{(m)} = M_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{M}^{(m)}, \\ q_{PP}^{(m)} = q_{PP}^{(m-1)} + \Delta\beta^{(m)} \bullet \Delta\bar{q}^{(m)}, \text{ перейти к (8)}. \end{cases} \quad (11)$$

Окончание итерационного процесса наступает при превращении системы или ее части в механизм, признаком чего будет вырожденная матрица жесткости на очередной итерации.

Дальнейшее развитие шагового алгоритма связано с усложнением используемых гипотез, учитывая влияния момента и продольной силы на предельное состояние отдельных сечений, протяженность зон пластической деформации по длине стержней.

При одновременном действии изгибающего момента и продольной силы в предельном состоянии происходит смещение "нейтральной" оси относительно оси симметрии (рис.1), при этом заштрихованная часть сечения воспринимает продольную силу, остальная – момент.

В частном случае для прямоугольного сечения известна формула Прагера для определения условия возникновения предельного состояния при одновременном действии изгибающего момента и продольной силы:

$$\begin{cases} v^2 + \mu = 1, \\ v = \frac{N_{PP}^M}{N_{PP}^0}, \mu = \frac{M_{PP}^N}{M_{PP}^0} \end{cases} \quad (12)$$

где M_{PP}^0 – предельный момент в сечении без учета продольной силы;

M_{PP}^N – предельный момент при действии некоторой продольной силы.

Аналогичные обозначения приняты и для продольных сил. Для двутаврового сечения в предложено использовать формулу $v^2 - \gamma\mu v + \mu = 1$, где параметр γ определяется характером распределения материала по сечению двутавра. При сравнении этой формулы с точной для

идеализированного двутавра (с бесконечно тонкой стенкой) $\nu + \mu = 1$ следует, что $\gamma = \frac{\nu - 1}{\mu}$.

Рассмотрим предельное состояние для произвольного осесимметричного сечения (рис.1).

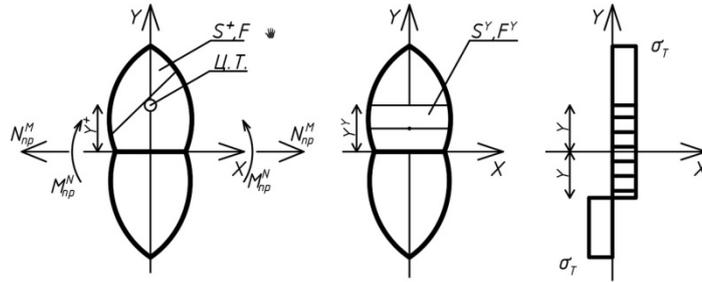


Рис.1. – Осесимметричное сечение

Пусть в предельном состоянии "нейтральная" ось смещена относительно оси симметрии на величину Y . На рисунке 1 обозначено: $F^Y S^Y, Y^Y$ - площадь, статический момент и ордината центра тяжести половины зоны сечения, воспринимающей продольную силу (заштрихована); $F^+ S^+, Y^+$ - аналогичные параметры верхней половины сечения. Воспринимаемый сечением момент M_{PP}^N можно получить алгебраической суммой полного предельного момента M_{PP}^0 и момента области Y M_{PP}^Y : $M_{PP}^N = M_{PP}^0 - M_{PP}^Y$, где $M_{PP}^Y = 2S^Y \sigma_T$. Из последних равенств следует:

$$\frac{M_{PP}^N}{M_{PP}^0} + \frac{M_{PP}^Y}{M_{PP}^0} = 1. \quad (13)$$

Отношение $\frac{M_{PP}^Y}{M_{PP}^0}$ равно $\frac{2F^Y Y^Y \sigma_T}{2F^+ Y^+ \sigma_T}$, откуда с учетом зависимости для

максимальных продольных сил следует:

$$\frac{M_{PP}^Y}{M_{PP}^0} = \frac{Y^Y}{Y^+} \cdot \frac{N_{PP}^M}{N_{PP}^0}. \quad (14)$$

Отношение $\frac{Y^Y}{Y^+}$ зависит от величины смещения нейтральной оси Y . В свою очередь Y функционально зависит от отношения $\frac{N_{PP}^M}{N_{PP}^0}$. Поэтому корректно следующее представление: $\frac{Y^Y}{Y^+} = g(\nu)$. Тогда с учетом (14) формулу для предельного состояния осесимметричного сечения запишем в виде:

$$\mu + g(\nu)\nu = 1. \quad (15)$$

Функция $g(\nu)$, которую далее будем называть функцией формы сечения (для краткости – ФФС), обладает следующими свойствами: непрерывна;

$g(\nu) \in [0,1]$; монотонно возрастает от нуля до единицы; однозначно определяется формой сечения. В зависимости от типа сечения функцию формы можно найти в явном виде, либо протабулировать по следующему алгоритму:

- определить положение центра тяжести и площадь половины сечения $Y^+ u F^+$;

- составить процедуры для определения $S^Y u F^Y$ и $\nu = \frac{N_{PP}^M}{N_{PP}^0} = \frac{F^Y}{F^+}$ через параметр Y ;

- по заданному ν численными методами (например, половинным делением) определить смещение нейтральной оси Y ;

- по найденному Y определить значение ФФС: $g(\nu) = \frac{Y^Y}{F^Y Y^+} = \frac{S^Y}{F^Y Y^+}$.

В соответствии с предложенной методикой определим ФФС и уравнение предельного состояния прямоугольного сечения с размерами $b \cdot 2h$.

Геометрические соотношения для прямоугольного сечения:

$Y^+ = 0.5hF^+ = bhF^+ = bY, S^Y = 0,5bY^2$. Определив $\nu = \frac{F^Y}{F^+} = \frac{Y}{h}$, получим

$Y = h\nu$. Подставив эти значения в уравнение для ФФС, получим:

$$g(\nu) = \frac{0.5b(h\nu)^2}{0.5bh^2\nu} = \nu. \text{ Подставив последнее равенство в (15), имеем формулу}$$

предельного состояния прямоугольного сечения, совпадающую с известной формулой Прагера.

Аналогично были построены ФФС и уравнение предельного состояния для двутавра с параллельными гранями полок (рис.2) [10].

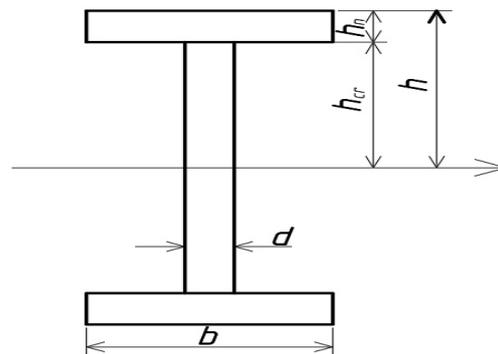


Рис.2. – Двутавровое сечение

Рассмотрены два варианта положения границы зоны Y : 1) в пределах стенки; 2) в пределах полки.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \nu \in \left[0, \frac{h_{cr}d}{F^+} \right] - \text{граница в зоне стенки:} \\ \text{ФФС: } q(\nu) = A_1\nu, \text{ где } A_1 = 0.5 \frac{(F^+)^2}{S^+d}, \\ \text{Предельная поверхность: } A_1\nu^2 + \mu = 1, \\ 2) \nu \in \left(\frac{h_{cr}d}{F^+}, 1 \right] - \text{граница в зоне полки:} \\ \text{ФФС: } q(\nu) = \frac{S_{cr}b + 0.5(\nu F^+ - F_{cr}) \cdot \left[\nu F^+ + F_{cr} \left(2\frac{b}{d} - 1 \right) \right]}{\nu b S^+} \\ \text{Предельная поверхность: } A_2\nu^2 + B\nu + \mu + C = 1, \\ \text{где } A_2 = 0.5 \frac{(F^+)^2}{bS^+}, B = \frac{F_{cr}F^+ \left(\frac{b}{d} - 1 \right)}{bS^+}, C = \frac{S_{cr}}{S^+} - \frac{F_{cr}^2 \left(2\frac{b}{d} - 1 \right)}{bS^+}. \end{array} \right. \quad (16)$$

Отметим, что первая группа формул в (16) справедлива для полок произвольного очертания, а вторая группа только для прямоугольных полок. Для полок сложной геометрии вместо второй группы полок следует проводить табуляцию по описанному ранее алгоритму.

Литература

1. Панасюк Л.Н. Прямые методы решения нестационарных задач теории сооружений. – автореферат дис. ...доктора технических наук / Ростовская – на – Дону гос. Академия строительства. Ростов – на – Дону, 1996. с. 44
2. Панасюк Л.Н. Шаговый метод определения предельных нагрузок в континуальных системах. – в сборнике: Строительство и архитектура – 2015. Современные информационно-экономические технологии: тенденции и перспективы развития материалы международной научно-практической конференции. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет», Союз строителей южного федерального округа, Ассоциация строителей дона. 2015. с. 105-107
3. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. – М.: Гос. из – во физ. – мат. л – ры, 1961. – с. 108 - 153
4. Беленя Е.И. Металлические конструкции. – 6-е изд. – М.: Стройиздат. 1986. – 560с.
5. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: Госстрой, Гипротис, 1986. – 188с.
6. Панасюк Л.Н., Чубка Ю.Ш., Тюрина В.С., Пошев А.У-Б. Прогнозирование накопления остаточных деформаций в строительных конструкциях // Инженерный вестник Дона. 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4645

7. Zgeng Lu, Hai-lin Yao, Jie Liu, Zhi Hu Experimental evaluation and theoretical analysis of multi-layered road cumulative deformation under dynamic loads // Road Materials and Pavement Design.2014. №1. pp. 35-54

8. Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 832 с.

9. Шеина С.Г., Кравченко Г.М., Костенко Д.С., Белаш В.В., Сравнение конструктивных решений подпорной стены котлована в условиях плотной городской застройки // Инженерный вестник Дона. 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4897.

10. Chen P.H., Cui L., Wan C., Yang Q., Ting S.K., Tiong R.L.K. Implementation of IFC-based web serves for collaborative building design between architects and structural engineers. Automation in Construction, 2005. № 14 pp. 115-128

References

1. Panasjuk L.N. Priamie metodi resheniia nestacionarnih zadach teorii soorygenij. [Direct methods for solving non-stationary problems of the theory of structures] avtoreferat dis. ...doktora tehniceskikh nayk, Rostovskaia-na-Dony gos. akademiia stroiteljstva. Rostov-na-Dony, 1996. 44p.

2. Panasjuk L.N. Shagovij metod opredeleniia predeljnih nagryzok v kontynyaljnih sistemah. v sbornike: Stroiteljstvo i arhitektyra 2015. Sovremennie informacionno-economicheskie tehnologii: tendencii i perspektivi razvitiia materialy mezhgdynarodnoj naychno-prakticheskoy konferencii. Federaljnoe gosudarstvennoe bydzsetnoe obrazovateljnoe ychrezhdenie vicshego professionaljnogo obrazovaniia «Rostovskij gosudarstvennij stroiteljnij yниверситет», Sojyz stroitelej jyzhnogo federeljnogo okryga, Associaciia stroitelej dona. 2015. pp. 105-107.

3. Pikovskij A.A. Statika sterzhnevnyh system so szhatimy elementami. М.: Gos. iz vo fiz. mat. l ry, 1986. pp. 108-153.



4. Belenya E.I. Metallicheskie konstruykcii. [Statics of rod systems with compressed elements]. 6-e izd. M.: Strojizdat. 1986. 560p. [Metal construction]
5. Prager V. Problemy teorii plastichnosti. [Problems of the theory of plasticity]. M.: Gosstroj, Giprotis, 1986. 188p..
6. Panasyuk L.N., Chubka Y.S., Tyurina V.S., Poshev A.U-B. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4645
7. Zgeng Lu, Hai-lin Yao, Jie Liu, Zhi Hu Road Materials and Pavement Design.2014. №1. pp. 35-54
8. D. D. Ivlev, L. A. Maksimova Predel'noe sostoyanie deformiruemyh tel i gornyh porod. [Limit state deformable bodies and rocks]. M.: FIZMATLIT, 2008. 832 p.
9. Sheina S.G., Kravchenko G.M., Kostenko D.S., Belash V.V. Inženernyj vestnik Dona. 2018. №1.
10. Chen P.H., Cui L., Wan C., Yang Q., Ting S.K., Tiong R.L.K. Automation in Construction, 2005. № 14 pp. 115-128