

Численные методы расчета тонких изотропных оболочек вращения

А.Я. Астахова¹, Р.С. Рузанкин²

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

²Высшая Школа Экономики

Аннотация: Численные методы расчета оболочек дают возможность получить широкий спектр решений при изменении различных параметров. Объектом данного исследования является математическая модель тонких, изотропных, упругих оболочек вращения постоянной толщины. Задача решается с позиции моментной теории. Для определения напряженно-деформированного состояния оболочки разрешающая система получена при преобразовании основных систем уравнений оболочек вращения моментной теории и разделения переменных. Все компоненты неизвестных функций и нагрузки раскладываются в ряды Фурье по окружной координате. Для верификации численного решения с помощью системы компьютерной математики *Maple 17* была составлена программа на языке программирования *Python*. Для построения графиков была использована библиотека *Matplotlib*. Приведены примеры численного расчета кольцевых сферических оболочек на действие кольцевых нагрузок. Представлены варианты действия одной и двух кольцевых нагрузок на оболочки с разными условиями опирания по контурам и разными углами полураствора. В табличной форме приведена разница результатов расчета между двумя методами для функций изгибающих моментов и функций перемещений, наибольшее значение которой составляет 0.0015%.

Ключевые слова: оболочка вращения, сферическая, изотропная, упругая, метод компьютерной математики, язык программирования *Python*.

В настоящее время широко применяются в инженерных конструкциях различного назначения тонкостенные элементы в форме оболочек. В различных областях техники наиболее распространены оболочки вращения. К ним относятся, например, емкости для хранения газа и сыпучих материалов, паровые котлы. Поверхности этих сооружений имеют форму цилиндра, сферы, конуса.

Численные методы расчета оболочек имеют определенную практическую направленность, т.к. дают возможность получить широкий спектр решений при изменении различных параметров. Объектом данного исследования является математическая модель тонких, однородных, изотропных, упругих оболочек вращения постоянной толщины. Задача

решается с позиции моментной теории. С конца девятнадцатого века зарубежные [1, 2] и отечественные ученые [3 – 5] разрабатывали методы расчета оболочек различных форм. В работе [2] были систематизированы основные результаты и сформулирована теория расчета (Теория Кирхгофа – Лява). Существуют различные подходы к определению напряженно-деформированного состояния конструкций, разработаны, например, энергетические методы [6, 7].

Полная система уравнений, содержащая уравнения равновесия, геометрические соотношения и соотношения упругости линейной теории представляет систему дифференциальных уравнений в частных производных [3 – 5]. В настоящее время не существует методов определения точного решения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, поэтому используют численные методы решения.

Для определения компонентов напряженно-деформированного состояния оболочки разрешающая система восьми обыкновенных дифференциальных уравнений получена при преобразовании основных систем уравнений оболочек вращения моментной теории и разделения переменных [8]. Все компоненты напряженно-деформированного состояния и нагрузки раскладываются в ряды Фурье по окружной координате φ . На рис. 1 показаны внутренние усилия, действующие на элемент срединной поверхности оболочки. Для оболочек вращения криволинейными координатами являются s – длина дуги вдоль образующей и φ – угол в параллельном круге.

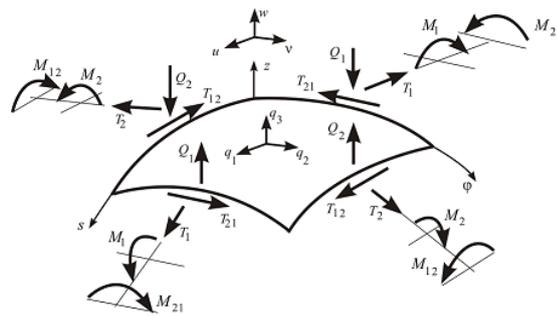


Рис. 1. – Внутренние усилия в оболочке

Для оболочки вращения (рис. 2) в соответствии с геометрией оболочки вводятся следующие компоненты усилий и перемещений для k -го слагаемого ряда Фурье (1):

$$\left. \begin{aligned} T_{rk} &= T_{1k} \cos \theta + V_{1k} \sin \theta; T_{zk} = T_{1k} \sin \theta - V_{1k} \cos \theta; \\ S_{1k} &= S_k + \frac{2 \sin \theta}{r} H_k; V_{1k} = Q_{1k} + \frac{k}{r} H_k; \\ u_{rk} &= u_k \cos \theta + w_k \sin \theta; u_{zk} = u_k \sin \theta - w_k \cos \theta; \\ q_{rk} &= q_{1k} \cos \theta + q_{2k} \sin \theta; q_{zk} = q_{1k} \sin \theta - q_{2k} \cos \theta. \end{aligned} \right\} (1)$$

Где T_{rk}, T_{zk} – радиальное, осевое усилия, S_{1k} – приведенное сдвигающее усилие, u_{rk}, u_{zk} – радиальное и осевое перемещения.

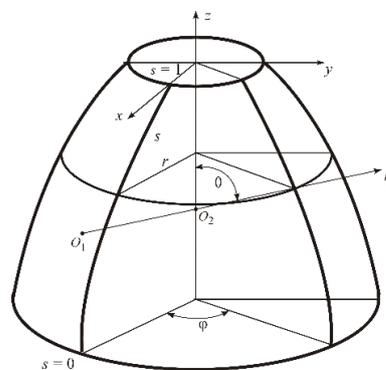


Рис. 2. – Геометрические параметры оболочки вращения

В разрешающей системе уравнений (2) M_{1k} является меридиональным изгибающим моментом, u_k – окружным перемещением, ϑ_k – углом поворота нормали в меридиональной плоскости. Система уравнений (2) представлена в векторной форме относительно коэффициентов ряда Фурье искомых функций:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = A(s)\bar{T} + \bar{q}(s), \quad (2)$$

где: $\bar{T} = (T_{rk}, T_{zk}, S_k, M_{1k}, u_{rk}, u_{zk}, v_k, \theta_k)$,

$$A(s) = \|a_{ij}\|, \bar{q} = (-q_{rk}, -q_{zk}, -q_{\theta k}, 0, 0, 0, 0, 0).$$

$A(s)$ – матрица переменных коэффициентов при неизвестных функциях, \bar{q} – компоненты внешней нагрузки. В расчетах принята безразмерная длина дуги вдоль меридиана $s = s_i/s_0$, s_0 – длина дуги меридиана, соответствующая рассматриваемому углу полураствора оболочки θ_0 (рис. 3).

Реализация решения осуществляется с помощью системы компьютерной математики *Maple* 17 [9] и встроенных библиотек языка программирования общего назначения высокого уровня *Python* [10].

Преимущества программного комплекса *Maple* для решения дифференциальных уравнений состоит в понятном для математиков описании задачи на языке программы. Это называется символьным описанием. Для верификации было составлено решение на языке программирования *Python*.

В философии разработки языка *Python* особое внимание уделено читабельности кода, синтаксис позволяет программисту выражать концепции в меньшем количестве строк кода, чем используется в языках, например, C^{++} или *Java*. Преимущества этого инструмента состоит в его встроенных библиотеках. Для решения разрешающих уравнений была использована библиотека *SciPy* с ее методом *Integrate*. Этот метод удобен тем, что можно, не прибегая к повторению нескольких запусков программы, решить систему дифференциальных уравнений с разными значениями параметров – их представляют в виде массива и этот массив используют как аргумент функции. Для построения графиков была использована библиотека *Matplotlib*.

Представлены примеры расчета тонких кольцевых сферических оболочек в разных программах. Принято: модуль упругости равен $E = 2.1 \cdot 10^4$

кН/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$, отклонение от вертикальной оси верхнего кольца (рис. 3) составляет $d = 10^\circ$.

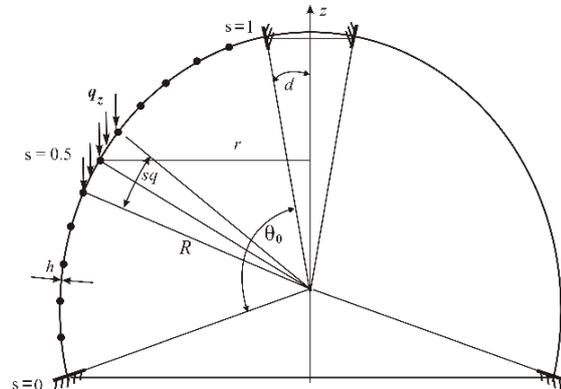


Рис. 3. – Сферическая оболочка

Кольцевая нагрузка (рис. 4) приложена в середине меридиана, действует вдоль меридиана на длине равной $sq = 0.1$.

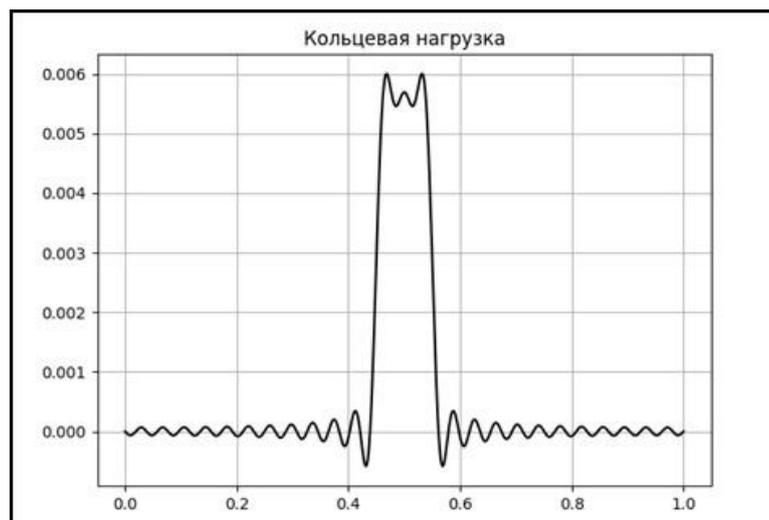


Рис. 4. – Кольцевая нагрузка приложена в середине меридиана

Рассматривается сферическая оболочка с отношением радиуса кривизны к толщине оболочки $R/h = 100$, угол полураствора равен $\theta_0 = 90^\circ$, опирание по контурам – жесткое защемление, для сравнения результатов работы *Maple* и *Python* (рис. 5 – 9) представлены эпюры внутренних усилий и угла поворота нормали. На всех рис. 5 – 8 слева результат работы *Maple*, справа – *Python*.

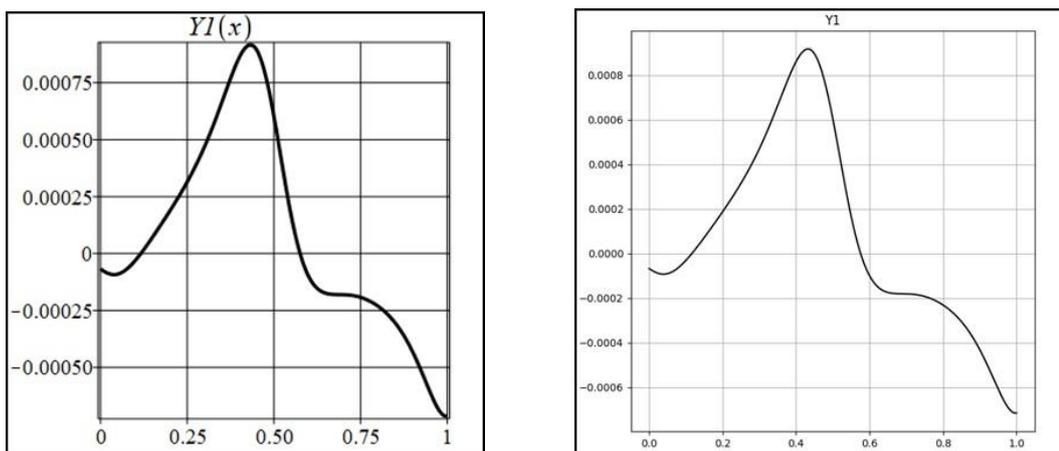


Рис. 5. – Эпюры радиального усилия T_r

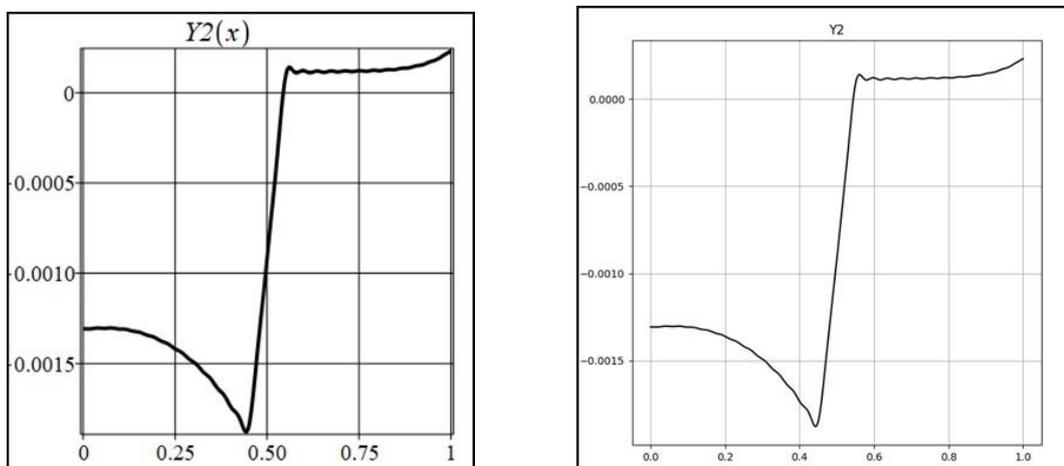


Рис. 6. – Эпюры осевого усилия T_z

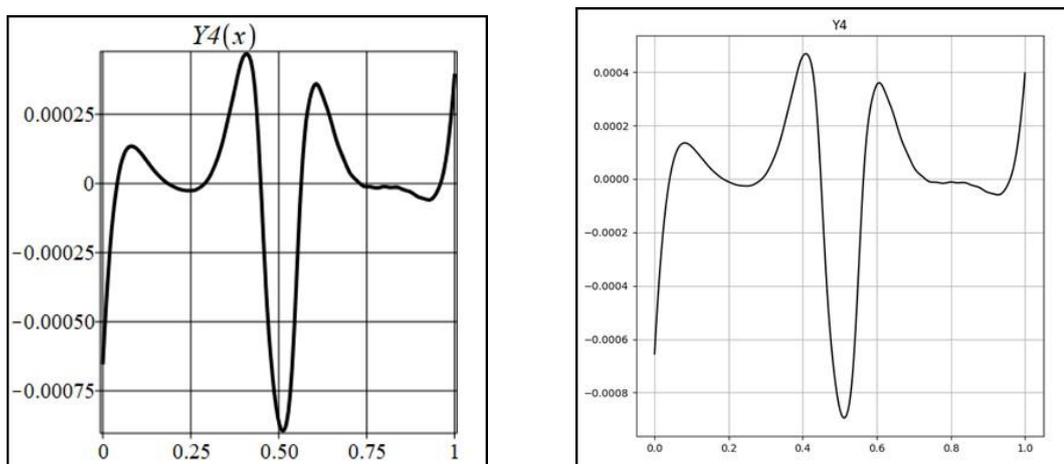


Рис. 7. – Эпюры меридионального изгибающего момента M_1

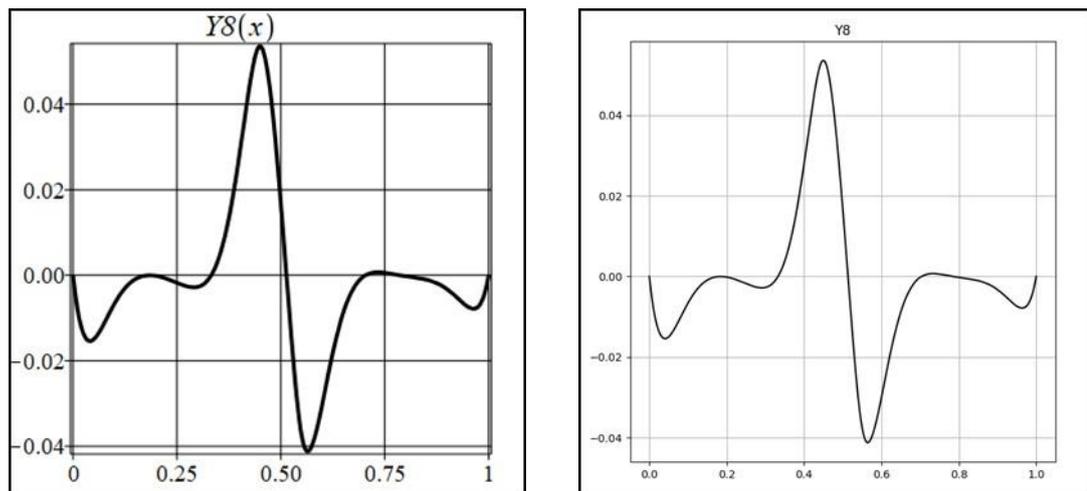


Рис. 8. – Угол поворота нормали ϑ

Ниже приведена разница в виде таблицы для основных неизвестных (табл. 1 – 3). Рассматриваются значения в середине действия одной кольцевой нагрузки (рис. 3) при величине $q = 3 \text{ кН/см}^2$, отношении радиуса к толщине оболочки $R/h = 100$, для нескольких значений угла полураствора θ_0 .

Таблица № 1

Разница между основными неизвестными при $\theta_0 = 90^\circ$

$\theta_0 = 90^\circ$	<i>Python</i>	<i>Maple</i>	Разница
Момент M_1/Eh^2	-8.95e-04	-8.95e-04	0.0000033%
Перемещение u_r/h	-4.22e-01	-4.22e-01	0.0000046%
Перемещение u_z/h	-5.30e-01	-5.30e-01	0.0000011%

Таблица № 2

Разница между основными неизвестными при $\theta_0 = 100^\circ$

$\theta_0 = 100^\circ$	<i>Python</i>	<i>Maple</i>	Разница
Момент M_1/Eh^2	-7.76e-04	-7.76e-04	0.0000376%
Перемещение u_r/h	-4.04e-01	-4.04e-01	0.0005929%
Перемещение u_z/h	-5.37e-01	-5.37e-01	0.0000952%

Таблица № 3

Разница между основными неизвестными при $\theta_0 = 130^\circ$

$\theta_0 = 130^\circ$	<i>Python</i>	<i>Maple</i>	Разница
Момент M_1/Eh^2	-4.84e-04	-4.84e-04	0.0013760%
Перемещение u_r/h	-2.40e-01	-2.40e-01	0.0014892%
Перемещение u_z/h	-6.63e-01	-6.63e-01	0.0003464%

Отметим, что наибольшая разница в расчетах (таблицы 1 – 3) по разным программам – *Python* и *Maple* составляет не более 0.0015%.

При действии двух кольцевых нагрузок (рис. 9) на рис. 9 – 10 показаны эпюры меридионального изгибающего момента в кольцевой сферической оболочке с углом полураствора $\theta_0 = 90^\circ$, $d = 10^\circ$ – угол отклонения от вертикальной оси верхнего контура, рассматриваются разные соотношения $R/h = 25, 50, 100, 150$.



Рис. 9. – Обозначение точек для сопоставления результатов расчета

Рис. 10 – кольцевая сферическая оболочка имеет жесткое защемление по верхнему и нижнему контурам, рис. 11 – задано шарнирное опирание по верхнему и нижнему контурам.

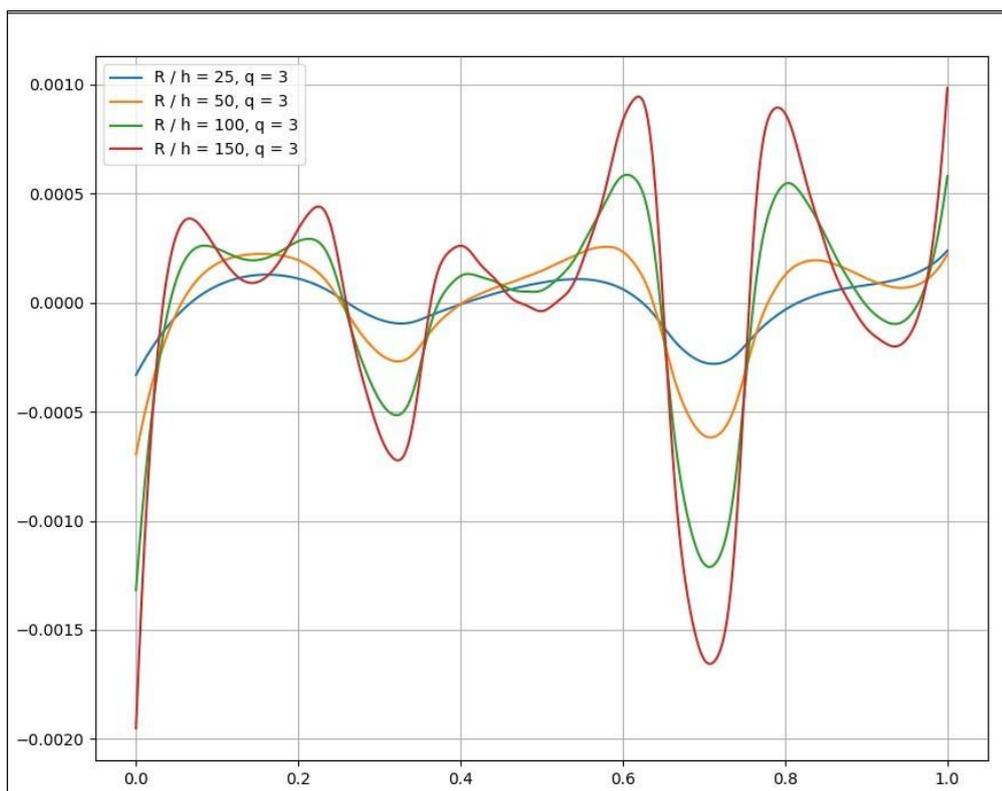


Рис. 10. – Эпюры моментов при жестком защемлении на контурах, $\theta_0 = 90^\circ$

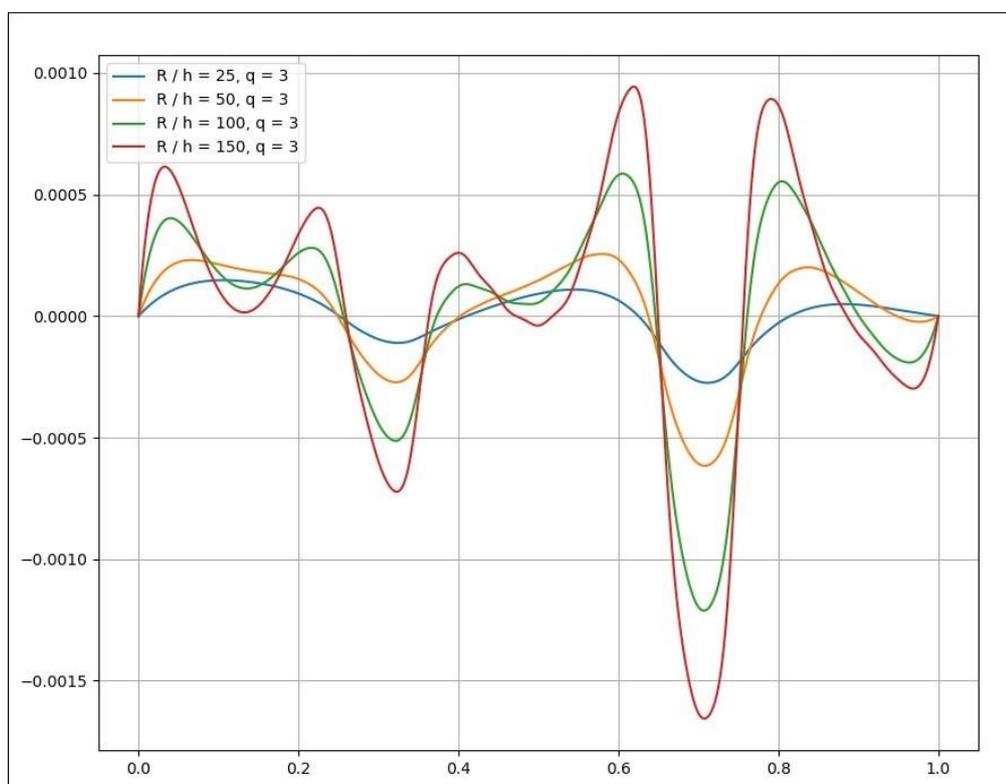


Рис. 11. – Эпюры моментов при шарнирном опирании на контурах, $\theta_0 = 90^\circ$

В табличной форме показано сопоставление результатов работы *Maple* в точках 1 и 2 (рис. 9) при разных условиях опирания на контурах для оболочек с разными значениями отношения радиуса кривизны к толщине.

Меридиональный изгибающий момент (M_1/Eh^2) в таблицах 4 и 5.

Таблица № 4

Значение момента M_1/Eh^2 в первой точке

R/h	Шарнир-Шарнир M_1/Eh^2	Заделка-Заделка M_1/Eh^2	Разница
25	-1.10e-04	-9.58e-05	13.24 %
50	-2.72e-04	-2.70e-04	0.98 %
100	-5.13e-04	-5.16e-04	0.54 %
150	-7.23e-04	-7.23e-04	0.04 %

Таблица № 5

Значение момент M_1/Eh^2 во второй точке

R/h	Шарнир-Шарнир M_1/Eh^2	Заделка-Заделка M_1/Eh^2	Разница
25	-2.75e-04	-2.81e-04	2.25 %
50	-6.16e-04	-6.18e-04	0.3 %
100	-1.21e-03	-1.21e-03	0.04 %
150	-1.66e-03	-1.66e-03	0.02 %

Радиальное перемещение u_r/h в таблицах 6 и 7.

Таблица № 6

Радиальное перемещение u_r/h в первой точке

R/h	Шарнир-Шарнир u_r/h	Заделка-Заделка u_r/h	Разница
25	5.77e-03	5.43e-03	5.99 %
50	5.43e-03	5.77e-03	5.89 %
100	-8.01e-02	-8.25e-02	2.87 %
150	-2.73e-01	-2.78e-01	1.8 %

Таблица № 7

Радиальное перемещение u_r/h во второй точке

R/h	Шарнир-Шарнир u_r/h	Заделка-Заделка u_r/h	Разница
25	-1.22e-02	-1.29e-02	6.26 %
50	-7.48e-02	-7.67e-02	2.61 %
100	-4.19e-01	-4.25e-01	1.51 %
150	-1.09e+00	-1.11e+00	1.12 %

Осевое перемещение u_z в таблицах 8 и 9.

Таблица № 8

Осевое перемещение u_z/h в первой точке

R/h	Шарнир-Шарнир u_z/h	Заделка-Заделка u_z/h	Разница
25	-1.53e-02	-1.26e-02	17.89 %
50	-7.18e-02	-6.39e-02	10.99 %
100	-3.21e-01	-3.01e-01	6.3 %
150	-7.62e-01	-7.25e-01	4.85 %

Таблица № 9

Осевое перемещение u_z/h во второй точке

R/h	Шарнир-Шарнир u_z/h	Заделка-Заделка u_z/h	Разница
25	-3.86e-02	-3.64e-02	5.59 %
50	-1.94e-01	-1.89e-01	2.75 %
100	-9.48e-01	-9.34e-01	1.52 %
150	-2.35e+00	-2.32e+00	1.13 %

Таким образом для оболочки с углом полураствора 90° влияние разных условий опирания на контурах на значения меридионального изгибающего момента для точек 1 и 2 при $R/h = 50, 100, 150$ составляет меньше 1%. Для



оболочек с $R/h = 25$ разница значений моментов в точке 1 составляет 13%, а в точке 2 – примерно 2%. Функции перемещений: для оболочек с $R/h = 25, 50$ наибольшее значение разницы в точках 1 и 2 составляет $\sim 18\%$, для оболочек с $R/h = 100, 150$ наибольшее значение разницы в точках 1 и 2 составляет $\sim 6,3\%$.

Литература

1. Love A. E. H. The small free vibrations and deformation on a thin elastic shell. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 1888, Vol.179, pp. 491-546.
 2. Reissner H. Form änderung und Spannungen einer dünnwandigen, an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale. Eine Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode // ZAMM. 1933. Vol. 13, iss. 2. pp. 133–138.
 3. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Изд. АН СССР, 1962. 520 с.
 4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: «Наука», 1976. 512 с.
 5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: «Наука», 1966. 636 с.
 6. Литвинов В.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки // Инженерный вестник Дона, 2012, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/722/.
 7. Бурцева С.В., Стрельников Г.П. К определению перемещений оболочек вариационно-энергетическим методом // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL:
-

ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1633/.

8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек, т.4, Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. Думка, 1981. 544 с.

9. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2014. 800 с.

10. Francisco J. Blanco-silva. Mastering SciPy: Implement State-of-the-art Techniques to Visualize Solutions to Challenging Problems in Scientific Computing, With the Use of the Scipy Stack. Packt Pub Ltd. 2015. 382 p.

References

1. Love A. E. H. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 1888, Vol.179, pp. 491-546.

2. Reissner H. ZAMM. 1933. Vol. 13, iss. 2. pp. 133–138.

3. Vlasov V.Z. Obshay teoriy obolochek [General theory of shells]. Moskva: Izd. AN SSSR, 1962. 520 p.

4. Goldenveyzer A.L. Teoriy uprugih tonkih obolochek. [Elastic thin shell theory]. Moskva: Nauka, 1976. 512 p.

5. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. Plastiny i obolochki [Plates and shells]. Moskva: Nauka, 1966. 636 p.

6. Litvinov V.V., Yzyev B.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/722/.

7. Burzeva S.V., Strelnikov G.P. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013, №2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1633/.

8. Grigorenko Y.M., Vasilenko A.T. Metodi rascheta obolochec, t.4, Teoriy obolochec peremennoy zestkosti [Methods of Shell Calculation, Vol. 4, Theory of Shells of Variable Stiffness]. Kiev: Nauk. Dumka, 1981. 544 p.

9. Diykonov V.P. Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetax [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moskva: DMK Press, 2014. 800 p.



10. Francisco J. Blanco-silva. Mastering SciPy: Implement State-of-the-art Techniques to Visualize Solutions to Challenging Problems in Scientific Computing, With the Use of the Scipy Stack. Packt Pub Ltd. 2015. 382 p.

Дата поступления: 24.07.2024

Дата публикации: 31.08.2024