

Семейство поверхностей, заданное формулами преобразования координат, и его огибающая

А. А. Ляшков, А. М. Завьялов

Введение

Вопросам исследования отображения ортогональным проецированием поверхности на плоскость посвящено значительное количество работ: [1, 2, 3, 4] и другие. В них, в основном, определяются некоторые дифференциальные характеристики очерка двумерной поверхности или алгебраической поверхности большей размерности. Так в работе [3] предлагается определять точки контурной линии по уравнениям поверхности, заданным в неявной форме и уравнениям, содержащим дифференциальные характеристики этой поверхности. Для расчета предлагается использовать методы вычислительной математики и методы нелинейного программирования. Что является не простой задачей. Анализа контурной линии и ее проекции не приводится.

Во многих прикладных задачах, связанных с профилированием режущего инструмента, определяют огибающую семейства поверхностей. Наряду с классическим подходом к определению огибающей в последнее время используется и новый. Так, если спроецировать график семейства двумерных поверхностей в пространство R^4 , то получим некоторую трехмерную гиперповерхность Σ . Криминанта этой поверхности является огибающей рассматриваемого семейства. Исследование поверхности Σ при задании ее параметрическими уравнениями и уравнением в неявной форме проведено в работах [5], [6]. Установлено ряд новых свойств такой поверхности. В связи с тем, что при профилировании режущего инструмента семейство поверхностей задается формулами преобразования координат [7], важной задачей является исследование полученной таким образом гиперповерхности.

Криминанта гиперповерхности

Пусть исходная поверхность задана в подвижной системе координат $OXYZ$ уравнением в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Эта поверхность совершает некоторое движение относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$. В общем виде формулы преобразования координат, выражающие x_1, y_1, z_1 через x, y, z , можно записать так

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y, z, \varphi), \\ y_1 &= f_2(x, y, z, \varphi), \\ z_1 &= f_3(x, y, z, \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

где φ – параметр относительного движения.

Уравнения (1) и (2) определяют семейство поверхностей в пространстве R^3 . При проецировании графика этого семейства в пространство R^4 будет получена гиперповерхность Σ в системе координат $X_1Y_1Z_1\Theta_1$ и заданная в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y, z, \varphi), \\ y_1 &= f_2(x, y, z, \varphi), \\ z_1 &= f_3(x, y, z, \varphi), \\ \theta_1 &= p \cdot \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где p – некоторая константа.

Наложим на две координаты y_1 и z_1 условия связи

$$y_1 = a, z_1 = b,$$

где a и b – некоторые константы.

Тогда функция Лагранжа, позволяющая определить условный экстремум координаты x_1 , будет

$$L = f_1(x, y, z, \varphi) + \lambda_1 \cdot [f_2(x, y, z, \varphi) - a] + \lambda_2 \cdot [f_3(x, y, z, \varphi) - b] + \lambda_3 \cdot F(x, y, z) + \lambda_4(\theta_1 - p\varphi).$$

Соответствующая система уравнений, из решения которой устанавливается связь параметров поверхности и параметра семейства, имеет вид

$$L_x = f_{1x}(x, y, z, \varphi) + \lambda_1 \cdot f_{2x}(x, y, z, \varphi) + \lambda_2 \cdot f_{3x}(x, y, z, \varphi) + \lambda_3 \cdot F_x(x, y, z) = 0,$$

$$L_{\theta_1} = \lambda_4 = 0,$$

$$L_y = f_{1y}(x, y, z, \varphi) + \lambda_1 \cdot f_{2y}(x, y, z, \varphi) + \lambda_2 \cdot f_{3y}(x, y, z, \varphi) + \lambda_3 \cdot F_y(x, y, z) = 0,$$

$$L_z = f_{1z}(x, y, z, \varphi) + \lambda_1 \cdot f_{2z}(x, y, z, \varphi) + \lambda_2 \cdot f_{3z}(x, y, z, \varphi) + \lambda_3 \cdot F_z(x, y, z) = 0,$$

$$L_\varphi = f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi) + \lambda_1 \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi) + \lambda_2 \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) + \lambda_3 \cdot F_\varphi(x, y, z) - \lambda_4 \cdot p = 0.$$

Рассматриваем последние три уравнения, с учетом $\lambda_4 = 0$, как систему неоднородных линейных уравнений относительно множителей Лагранжа. Из решения этой системы по формулам Крамера имеем

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_{\lambda_1}}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\Delta}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_{\lambda_3}}{\Delta},$$

а соответствующие определители будут

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{2y} & f_{3y} & F_y \\ f_{2z} & f_{3z} & F_z \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} & 0 \end{vmatrix} = F_y \cdot \begin{vmatrix} f_{2z} & f_{3z} \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix} - F_z \cdot \begin{vmatrix} f_{2y} & f_{3y} \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\lambda_1} = \begin{vmatrix} -f_{1y} & f_{3y} & F_x \\ -f_{1z} & f_{3z} & F_z \\ -f_{1\varphi} & f_{3\varphi} & 0 \end{vmatrix} = F_y \cdot \begin{vmatrix} -f_{1z} & f_{3z} \\ -f_{1\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix} - F_z \cdot \begin{vmatrix} -f_{1y} & f_{3y} \\ -f_{1\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\lambda_2} = \begin{vmatrix} f_{2y} & -f_{1y} & F_y \\ f_{2z} & -f_{1z} & F_z \\ f_{2\varphi} & -f_{1\varphi} & 0 \end{vmatrix} = F_y \cdot \begin{vmatrix} f_{2z} & -f_{1z} \\ f_{2\varphi} & -f_{1\varphi} \end{vmatrix} - F_z \cdot \begin{vmatrix} f_{2y} & -f_{1y} \\ f_{2\varphi} & -f_{1\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\lambda_3} = \begin{vmatrix} f_{2y} & f_{3y} & -f_{1y} \\ f_{2z} & f_{3z} & -f_{1z} \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} & -f_{1\varphi} \end{vmatrix} = -f_{1y} \cdot \begin{vmatrix} f_{2z} & f_{3z} \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix} + f_{1z} \cdot \begin{vmatrix} f_{2y} & f_{3y} \\ f_{2\varphi} & f_{3\varphi} \end{vmatrix} - f_{1\varphi} \cdot \begin{vmatrix} f_{2y} & f_{3y} \\ f_{2z} & f_{3z} \end{vmatrix},$$

После подстановки полученных зависимостей в первое уравнение системы неоднородных линейных уравнений получим

$$\Delta_{\lambda_1} \cdot f_{2x}(x, y, z, \varphi) + \Delta_{\lambda_2} \cdot f_{3x}(x, y, z, \varphi) + \Delta_{\lambda_3} \cdot F_x(x, y, z) + \Delta \cdot f_{1x}(x, y, z, \varphi) = 0. \quad (4)$$

Или после подстановок выражений из определителей

$$\begin{aligned} & \left\{ -F_y(x, y, z) \cdot [f_{1z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi)] + \right. \\ & \left. + F_z(x, y, z) \cdot [f_{1y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi)] \right\} \\ & f_{2x}(x, y, z, \varphi) + \\ & + \left\{ -F_y(x, y, z) \cdot [f_{2z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{1z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] + \right. \\ & \left. + F_z(x, y, z) \cdot [f_{2y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{1y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] \right\} \\ & \cdot f_{3x}(x, y, z, \varphi) + \\ & + \left\{ -f_{1y}(x, y, z, \varphi) \cdot [f_{2z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] + \right. \\ & \left. + f_{1z}(x, y, z, \varphi) \cdot [f_{2y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] - \right. \\ & \left. - f_{1\varphi}(x, y, z, \varphi) \cdot [f_{2y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3z}(x, y, z, \varphi) - f_{3y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2z}(x, y, z, \varphi)] \right\} \\ & \cdot F_x(x, y, z) + \\ & + \left\{ F_y(x, y, z) \cdot [f_{2z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3z}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] - \right. \\ & \left. - F_z(x, y, z) \cdot [f_{2y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{3\varphi}(x, y, z, \varphi) - f_{3y}(x, y, z, \varphi) \cdot f_{2\varphi}(x, y, z, \varphi)] \right\} \\ & \cdot f_{1x}(x, y, z, \varphi) = 0 \end{aligned}$$

Полученное равенство устанавливает связь координат исходной поверхности и параметра φ их семейства. Тогда уравнения (4), (1) и (3) определяют дискриминанту гиперповерхности, а уравнения (4), (2), (3) – ее криминанту и, соответственно, огибающую рассматриваемого семейства поверхностей.

Огибающая семейства сфер в их поступательном движении

В качестве примеров, иллюстрирующих достоверность полученных результатов, рассмотрим сферу, заданную в подвижной системе координат $OXYZ$ уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (5)$$

Эта сфера (*пример 1*) совершает поступательное перемещение вдоль оси u_1 (рис. 1) неподвижной системы координат, которое задается формулами преобразования координат

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y + \varphi, \\ z_1 &= z, \end{aligned} \quad (6)$$

где φ – параметр движения.

Тогда входящие в равенство (4) определители будут

$$\Delta = 2y, \quad \Delta_{\lambda_1} = \Delta_{\lambda_2} = \Delta_{\lambda_3} = 0,$$

Подставив полученные выражения в (4), получим $y=0$.

Уравнения сферы и формул преобразования координат, в которых $y=0$, позволяют определить огибающую рассматриваемого семейства сфер в виде

$$\begin{aligned}x_1^2 + z_1^2 &= R^2, \\y_1 &= \varphi.\end{aligned}$$

Эти уравнения определяют проектирующую относительно координатной плоскости X_1Z_1 цилиндрическую поверхность (рис. 1).

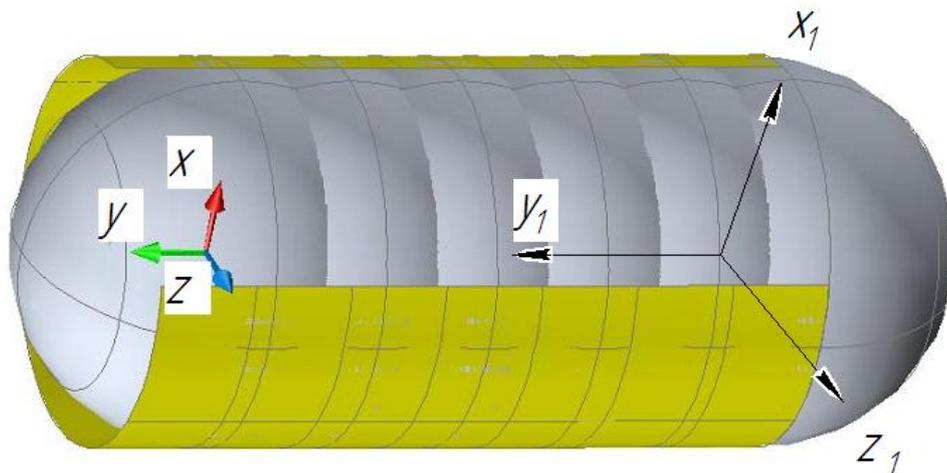


Рис. 1. – Семейство сфер и его огибающая

Огибающая семейства сфер в их винтовом движении

Пример 2. Пусть задана та же сфера (5), но совершает она винтовое движение (рис. 2). Формулы преобразования координат, определяющие это движение, имеют вид

$$\begin{aligned}x_1 &= (x + R) \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \\y_1 &= (x + R) \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \\z_1 &= z + p \cdot \varphi.\end{aligned}\tag{7}$$

Уравнения (5) и (7) определяют семейство поверхностей в пространстве \mathbb{R}^3 . График этого семейства в \mathbb{R}^4 представляет собой гиперповерхность, заданную в системе координат $X_1Y_1Z_1\theta_1$, в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= (x + R) \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \\y_1 &= (x + R) \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \\z_1 &= z + p \cdot \varphi, \\\theta_1 &= p_1 \cdot \varphi.\end{aligned}\tag{8}$$

Для установления связи параметров поверхности и движения вычислим определители, входящие в уравнение (4)

$$\begin{aligned}\Delta &= -2 \cdot y \cdot [(x + R) \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi] - 2 \cdot p \cdot z \cdot \cos^2 \varphi, \\\Delta_{\lambda_1} &= 2 \cdot y \cdot [-(x + R) \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi], \\\Delta_{\lambda_2} &= -2 \cdot y \cdot z, \quad \Delta_{\lambda_3} = y.\end{aligned}$$

Тогда уравнение связи параметров будет: $R \cdot y + p \cdot z = 0$. Откуда имеем

$$y = -\frac{p}{R} \cdot z. \quad (9)$$

Из уравнения сферы для $p=0$ (сфера совершает вращательное движение) следует: $x^2 + z^2 = r^2$. Из первых двух уравнений системы (7) $x = \pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - R$, а из трех уравнений этой системы получим

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2 + R^2 + 2 \cdot R \cdot x.$$

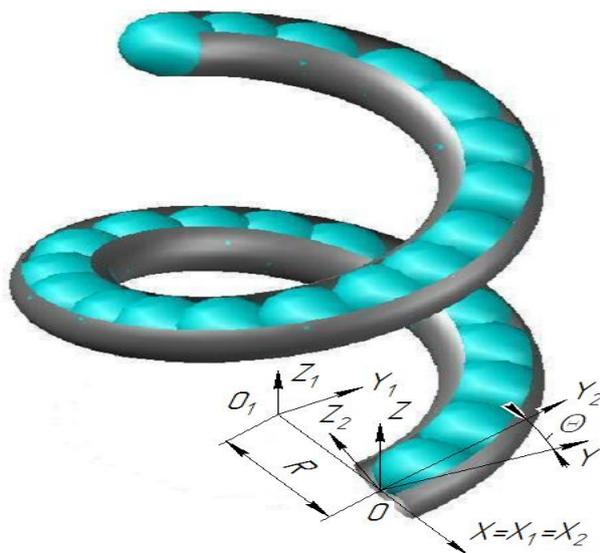


Рис. 2. – Винтовое движение сферы

После подстановок и преобразований получим уравнение

$$z_1 = \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2 - R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad (10)$$

графиком которого является тор (рис. 3)

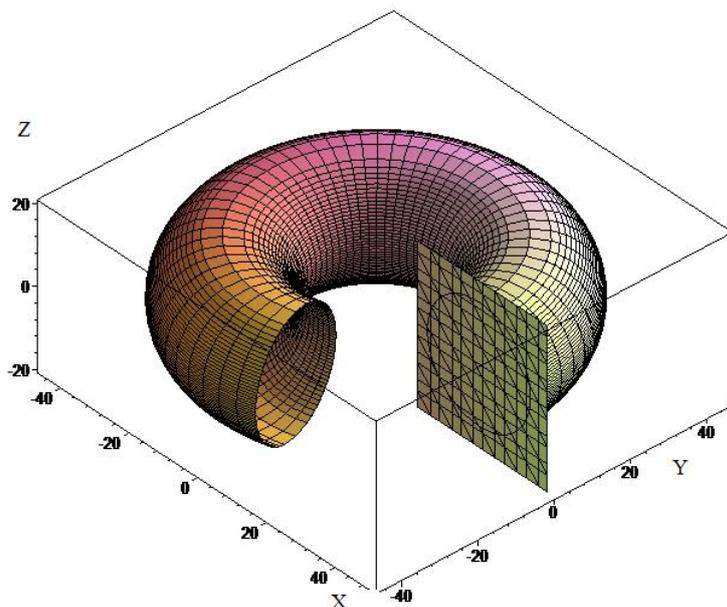


Рис. 3. – Модель тора и его сечение координатной плоскостью

После подстановки выражения для y из (9) в уравнение сферы получим

$$x = \pm \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{p}{R} \right)^2 \right].$$

Подставив выражения для x и y в уравнения (7) получим уравнения дискриминанты гиперповерхности (8)

$$\begin{aligned} x_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{p}{R} \right)^2 \right] + R \right\} \cdot \cos \varphi + \frac{p}{R} \cdot z \cdot \sin^3 \varphi, \\ y_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{p}{R} \right)^2 \right] + R \right\} \cdot \sin \varphi - \frac{p}{R} \cdot z \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi, \\ z_1 &= z + p \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Графиком полученных уравнений является трубчатая винтовая поверхность (рис. 4).

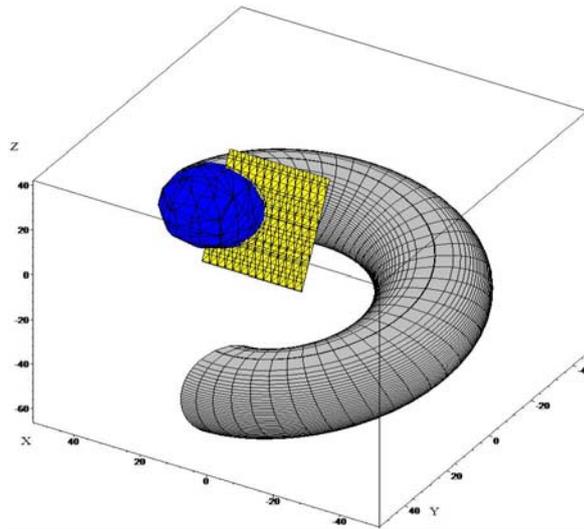


Рис. 4. – Модель трубчатой винтовой поверхности и сферы

Для $p=0$ система (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\pm \sqrt{r^2 - z^2} + R \right) \cdot \cos \varphi, \\ y_1 &= \left(\pm \sqrt{r^2 - z^2} + R \right) \cdot \sin \varphi, \\ z_1 &= z. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) в параметрической форме определяет ту же поверхность тора, что и уравнение (10).

Поверхность (11) может быть получена также винтовым движением окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной вектору касательной к винтовой линии (рис. 2). Уравнение винтовой линии, образованной движением точки O , будет

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cdot \cos \varphi, \\y_1 &= R \cdot \sin \varphi, \\z_1 &= p \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Касательная к винтовой линии определяется равенствами

$$\frac{X_1 - x_0}{-R \cdot \sin \varphi} = \frac{Y_1 - y_0}{R \cdot \cos \varphi} = \frac{Z_1 - z_0}{p}.$$

Для $\varphi=0$ координаты касательного вектора $\bar{a} = (0, R, p)$. Из уравнения плоскости, $a_x \cdot (X - x_0) + a_y \cdot (Y - y_0) + a_z \cdot (Z - z_0) = 0$, перпендикулярной этому вектору получим

$$y = -\frac{p}{R} \cdot z = -\operatorname{tg} \theta \cdot z.$$

Тогда уравнения поверхности, образованной винтовым движением окружности, будут

$$\begin{aligned}x_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} + R \right\} \cdot \cos \varphi + z \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin^3 \varphi, \\y_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} + R \right\} \cdot \sin \varphi - z \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi, \\z_1 &= z + p \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Последние уравнения, так же как и уравнения 11, определяют трубчатую винтовую поверхность (рис. 5).

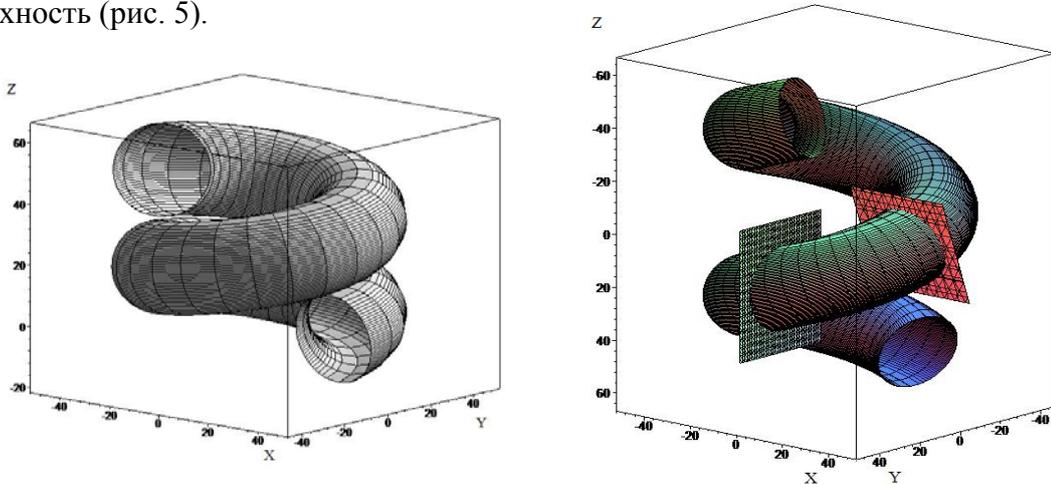


Рис. 5. – Модели трубчатой винтовой поверхности и сечение ее координатной плоскостью и плоскостью, перпендикулярной винтовой линии

Введя новый параметр $u = \frac{z}{\cos \theta}$ получим уравнение трубчатой винтовой поверхности в виде

сти в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - u^2} + R \right\} \cdot \cos \varphi + u \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\y_1 &= \left\{ \pm \sqrt{r^2 - u^2} + R \right\} \cdot \sin \varphi - u \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\z_1 &= u \cdot \cos \theta + p \cdot \varphi.\end{aligned}$$

График трубчатой винтовой поверхности для новой параметризации представлен на рис. 6.

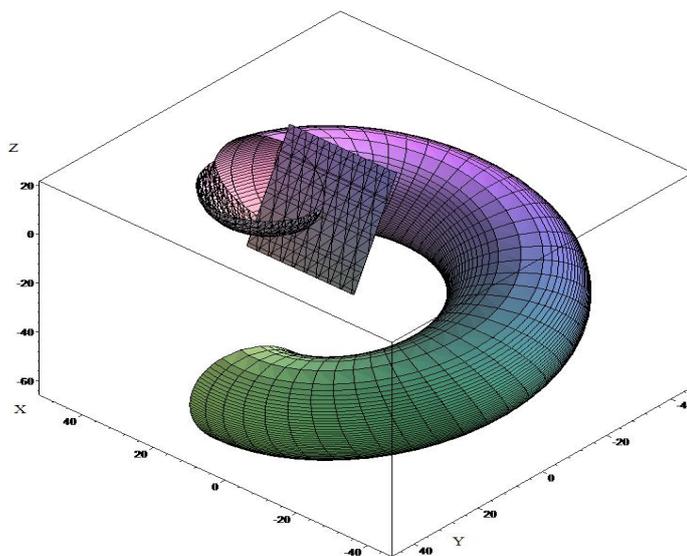


Рис. 6.

Таким образом, проведенные исследования, на основе полученных ранее результатов, гиперповерхности и ее отображения ортогональным проецированием на координатную гиперплоскость позволили получить в общем виде огибающую семейства двумерных поверхностей. Исходная поверхность задается уравнением в неявном виде, а семейство поверхностей определяется формулами преобразования координат.

Полученные результаты апробированы на двух примерах с получением как аналитических зависимостей так и соответствующих компьютерных полигональных моделей поверхностей, иллюстрирующих достоверность приведенных результатов.

Литература

1. Арнольд, В. И. Особенности гладких отображений [Текст] / В. И. Арнольд – Успехи мат. наук. – 1968. – т. XXIII, вып. 1(139). – С. 4–44.
2. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности [Текст]. / Дж., Брус, – М.: Мир, 1988. – 262 с.
3. Быков, В. И. Определение контурной линии на поверхности, заданной уравнением в неявной форме [Текст] // В сб.: Тезисы Всесоюзного научно-методического симпозиума “Применение систем автоматизированного проектирования конструкций в машиностроении”. – Ростов-на-Дону. – 1983 – С. 40–41.
4. Платонова, О. А. Проекция гладких поверхностей [Текст] / О. А. Платонова // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. – 1984. – т. 10. – С. 135-149.
5. Ляшков А. А., Волков В. Я., Отображение ортогональным проецированием гиперповерхности на гиперплоскость [Текст] // Вестник Иркутского Государственного Технического Университета. – 2012. – № 2. – С. 18-22.
6. Ляшков, А. А. Отображение ортогональным проецированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями / А. А. Ляшков // Омский научный вестник. – 2012. – № 2(110). – С. 9-13.
7. Лашнев С. И., Юликов М. И. Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ [Текст] / М.: Машиностроение, 1975. – 392 с.