

## Определение внутренних напряжений внутри биметаллического стержня, возникающих при испытаниях на внутреннее трение

*А.Н. Венедиктов, Н.Л. Венедиктов*

*Тюменский индустриальный университет, Тюмень*

**Аннотация:** Изучение внутреннего трения электролитических покрытий затруднено невозможностью получения достаточно массивных образцов и испытания их независимо от подложки, в связи с чем приходится оценивать напряженное состояние системы образец-покрытие. Цель работы - найти связь внутренних напряжений, возникающих в покрытии, нанесенном на образец круглого сечения при испытаниях на внутреннее трение с помощью крутильного маятника. В ходе анализа напряженно-деформированного состояния биметаллического образца были найдены выражения для подсчета максимальных и минимальных напряжений в электролитическом покрытии. Взаимное влияние материала покрытия и основы было оценено численным методом с помощью программы Comsol Multiphysics.

В ходе работы на примере медного покрытия показано, что относительная разница между максимальными и минимальными внутренними напряжениями, возникающими в покрытии, нанесенном на цилиндрический образец, зависит только от диаметра образца и толщины покрытия. С использованием численных методов с помощью программы Comsol Multiphysics показано, что влиянием материала покрытия и основы друг на друга можно пренебречь.

**Ключевые слова:** внутреннее трение, внутренние напряжения, крутильный маятник, вращение бруса, электролитические покрытия.

Измерение параметров внутреннего трения, то есть неупругого рассеяния механической энергии внутри твердого тела [1, 2] широко применяется для изучения процессов, протекающих внутри материалов. Зачастую информация о диффузии [3], границах зерен, дефектах кристаллического строения, дислокационной структуре, получаемая с помощью измерения внутреннего трения, носит уникальный характер [4, 5].

Низкочастотное внутреннее трение обычно измеряют с помощью специального прибора - обратного крутильного маятника [6, 7].

Одним из факторов, определяющим поведение материала испытуемого образца, являются внутренние напряжения, возникающие в нем [8, 9]. Изучение внутреннего трения электролитических покрытий сопряжено с некоторыми трудностями, одной из которых является невозможность получения достаточно массивных образцов и испытания их независимо от

---

подложки. Таким образом, приходится испытывать покрытие в системе покрытие-основа с необходимостью учитывать взаимное влияние двух материалов на протяжении всего испытания.

Цель работы - найти связь внутренних напряжений, возникающих в покрытии, нанесенном на образец круглого сечения при испытаниях на внутреннее трение с помощью крутильного маятника.

Образец представлял собой цилиндр диаметром  $d$  с нанесенным на него электролитическим покрытием толщиной  $h$ , закрепленный между неподвижным захватом и крутильным маятником. Совершая колебательные движения маятник, создает скручивающий момент [10, 11], действующий на образец (рис. 1).

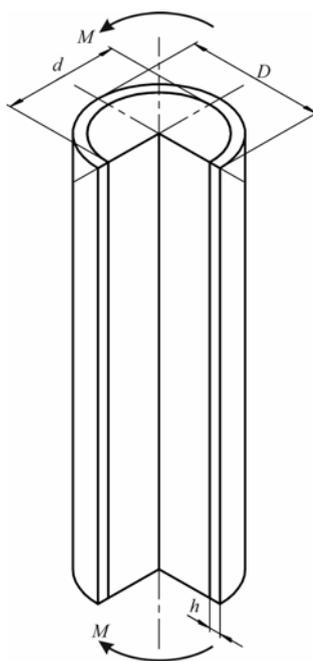


Рис. 1. - Образец с нанесенным на него покрытием

Так как в поперечных сечениях образца под действием маятника возникает только крутящий момент, то напряженно-деформированное состояние образца можно рассматривать в рамках теории кручения цилиндрического бруса.

Рассмотрим деформацию цилиндрического образца при кручении. Для нее характерно, что сечения, перпендикулярные оси цилиндра,

поворачиваются в плоскости относительно некоторой продольной оси, которая остается прямолинейной и не меняет своего положения. При этом сечения не искривляются, и радиусы их остаются прямыми.

Если к концам образца постоянного сечения и длины  $l$  приложить силу, создающую скручивающие моменты, то его напряженно-деформированное состояние будет однородно по всей длине.

Из теории сопротивления материалов известно, что при упругой деформации и небольшом угле закручивания может быть сделано допущение, что плоские поперечные сечения цилиндра после деформации остаются плоскими, и расстояния между ними не изменяются. Таким образом, деформацию цилиндра можно рассматривать как результат поворота поперечных сечений вокруг оси цилиндра в направлении крутящего момента, причем сечения не искривляются, и радиусы их остаются прямыми. Угол поворота сечения будет, очевидно, тем больше, чем дальше оно отстоит от закрепленного конца [12].

Такая деформация обуславливает появление в плоскости поперечного сечения касательных напряжений  $\tau$ , направление которых перпендикулярно к радиусу окружности поперечного сечения цилиндрического образца.

Деформации и соответствующие им касательные напряжения  $\tau$ , как это следует из экспериментальных данных, подчиняются закону Гука [3, 9]:

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dl} = G\rho \cdot \Theta, \quad (1)$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге, ГПа;  $\rho$  - расстояние от оси цилиндра;  $\varphi$  - угол закручивания образца ( угол, на который его правый конец повернется относительно левого);  $\Theta = \varphi / l$  – относительный угол закручивания. Модуль упругости при сдвиге  $G$  и относительный угол закручивания  $\Theta$  постоянны для сечения. Как можно заключить из

---

приведенной формулы, касательные напряжения  $\tau$  в сечении прямо пропорциональны расстоянию  $\rho$  от центра сечения.

Для практических расчетов нам необходимо связать  $\tau$  с крутящим моментом  $M_K$ . С этой целью введем в сечении образца полярные координаты  $\rho$ ,  $\alpha$ . Крутящий момент можно подсчитать как интеграл, взятый по площади сечения ( $F$ ) от моментов элементарных касательных усилий  $\tau \cdot dF$ :

$$M_K = \int_F \rho \tau \cdot dF. \quad (2)$$

Подставим (1) в (2).  $G$  и  $\Theta$  не зависят от положения  $dF$ , следовательно их можно вынести изпод знака интеграла. Тогда получим:

$$M_K = G \cdot \Theta \int_F \rho^2 \cdot dF = G \cdot \Theta \cdot J_p, \quad (3)$$

где  $J_p$  - полярный момент инерции, зависящий только от геометрии сечения. С учетом этой формулы получаем соотношение, связывающее  $M_K$  и  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{M_K}{G \cdot J_p}. \quad (4)$$

А теперь из (1) следует, что

$$\tau = \frac{M_K}{J_p} \cdot \rho. \quad (5)$$

Перейдем к рассмотрению напряженного состояния нашего образца. Если проскальзывание между покрытием и основой отсутствует, что наблюдается при нанесении электролитического покрытия должного качества, то напряженно деформированное состояние покрытия можно рассматривать как кручение круглой трубы.

Поперечное сечение такого образца будет представлять собой кольцо с наружным диаметром  $D$ , и внутренним -  $d$  (рис. 1). Электролитическое

покрытие кольцевого сечения обладает такой же симметрией, что и образец сплошного круглого сечения.

Поэтому и для деформации его плоских сечений естественно принять все те же предположения, что и для сплошного цилиндрического образца. На основе этого, анализируя деформацию выделенного из образца элементарного кольца, приходим к выражениям (3-5).

Полярный момент инерции в этих формулах определяется так же, как и для сплошного цилиндра:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF,$$

где  $F$  - площадь поперечного сечения нашего покрытия, имеющего форму кольца.

В полярных координатах, если пренебречь малыми высшего порядка,  $dF = d\rho d\alpha$ . Поэтому двойной интеграл может быть представлен в следующем виде:

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha.$$

Далее можно разделить переменные в этом интеграле и подсчитать его как произведение двух одинарных интегралов:

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4), \text{ где } c = \frac{d}{D}.$$

Крутящий момент найдем из выражения (4):

$$\Theta = \frac{M_k}{G \cdot J_p}, \text{ откуда } M_k = \Theta \cdot G \cdot J_p.$$

Для подсчета  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  из (5) с учетом полученного значения для  $J_p$  и  $M_k$  получаем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \cdot \frac{D}{2},$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \cdot (\rho_{\max} - h) = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \cdot \left( \frac{D}{2} - h \right).$$

Вычислим максимальные (на поверхности) и минимальные касательные напряжения в медном покрытии ( $G = 45,5$  ГПа) толщиной  $h = 25$  мкм в зависимости от угла закручивания в градусах (рис. 2). Наружный диаметр образца примем  $D = 1$  мм, длину образца - 10 см.

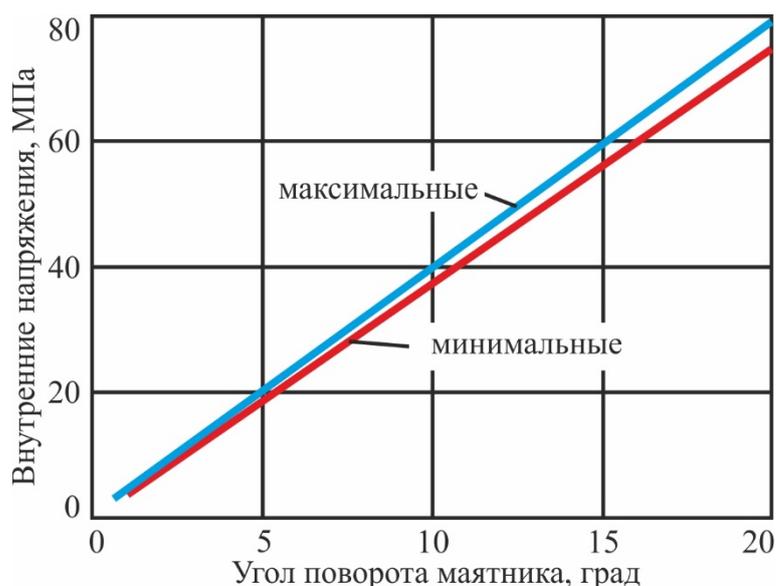


Рис. 2. - Минимальные и максимальные напряжения в покрытии в зависимости от угла поворота маятника

При угле закручивания 10 градусов абсолютная разница в касательных напряжениях между максимальными и минимальными составляет 1,98 МПа, а относительная 5 %. Для 5 градусов - 0,99 МПа и 5 % соответственно.

Относительная погрешность ( $\delta$ ) зависит только от диаметра образца и толщины покрытия:

$$\delta = \frac{D - 2 \cdot h}{D} \cdot 100\%.$$

Учитывая небольшую разницу между минимальными и максимальными напряжениями, не будет большой ошибкой принимать для расчетов, что тем более справедливо для относительно тонких покрытий, средние напряжения [13].

Влияние напряженного состояния покрытия и основы друг на друга покажем, используя компьютерную модель в *Comsol Multiphysics*, так как аналитическое решение этой задачи слишком трудоемко.

В качестве модели использовали образец диаметром 1 мм, с медным покрытием толщиной 25 мкм с основой из стали. Задача решалась в двумерной постановке. Относительный угол закручивания принимался равным 10 градусов (0,174 радиан). Результаты расчетов показаны на рис. 3. По результатам моделирования минимальные эквивалентные напряжения составили 32,23 МПа, максимальные - 35,7 МПа, что хорошо согласуется с полученными выше результатами.

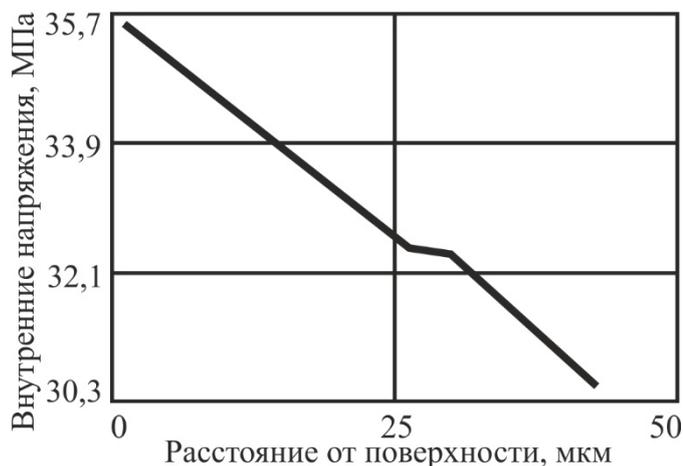


Рис. 3. - Распределение эквивалентных внутренних напряжений по толщине образца

### Выводы

1. Установлено, что относительная разница между максимальными и минимальными внутренними напряжениями, возникающими в покрытии, нанесенном на цилиндрический образец, зависит только от диаметра образца и толщины покрытия.

2. Показано, что влиянием материала покрытия и основы друг на друга можно пренебречь.

## Литература

1. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
2. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. М.: Metallurgiya, 1969. 330 с.
3. Nowick A.S., Berry B.S., Lawrence J.K. Anelastic Relaxation In Crystalline Solids // Journal of Applied Mechanics. 1975. 42. pp. 750-751.
4. Блантер М.С., Пигузов Ю.В. и др. Метод внутреннего трения в металловедческих исследованиях. М.: Metallurgiya, 1991. 248 с.
5. Блантер М.С., Головин И.С., Головин С.А. и др. Механическая спектроскопия металлических материалов. М.: Инж. акад., 1994. 256 с.
6. Дешевых В.В., Кульков В.Г., Коротков Л.Н., Степанов Н.Д. Низкочастотное внутреннее трение в ультрамелкозернистой меди // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. №4. С. 1885-1886.
7. Венедиктов А.Н., Венедиктов Н.Л. Разработка бесконтактного оптического датчика перемещения щелевого типа для регистрации колебаний крутильного маятника // Инженерный вестник Дона. 2019. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2019/5785.
8. Головин, И.С. Внутреннее трение и механическая спектроскопия металлических материалов. М.: МИСиС, 2012. 247 с.
9. Golovin I.S., Sinning H.R. Damping in some cellular metallic materials // Journal of Alloys and Compounds. 2003. 355. pp. 2-9.
10. Горшков А. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. Сопротивление материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 544 с.
11. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975. 655 с.
12. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 2000. 286 с.
13. Jiang Z.C., Tian Q.C., Ren Z.M. Development and characterization of a MnCu-based high damping alloy plate // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. 2019. 542 p.

## References

1. Novik A., Berri B. Relaksatsionnye yavleniya v kristallakh [Relaxation phenomena in crystals]. М.: Atomizdat, 1975. 472 p.
-



2. Postnikov B.C. Vnutrennee trenie v metallakh [Internal friction in metals]. M.: Metallurgiya, 1969. 330 p.
3. Nowick A.S., Berry B.S., Lawrence J.K. Journal of Applied Mechanics. 1975. 42. pp. 750-751.
4. Blanter M.S., Piguzov Yu.V. i dr. Metod vnutrennego treniya v metalovedcheskikh issledovaniyakh [Internal friction method in metal science research]. M.: Metallurgiya, 1991. 248 p.
5. Blanter M.S., Golovin I.S, Golovin S.A. i dr. Mekhanicheskaya spektroskopiya metallicheskih materialov [Mechanical spectroscopy of metallic materials]. M.: Inzh. akad., 1994. 256 p.
6. Deshevykh V.V., Kul'kov V.G., Korotkov L.N., Stepanov N.D. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2013. №4. pp. 1885-1886.
7. Venediktov A.N., Venediktov N.L. Inzeneryj vestnik Dona. 2019. № 2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2019/5785](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2019/5785).
8. Golovin, I.S. Vnutrennee trenie i mekhanicheskaya spektroskopiya metallicheskih materialov [Internal friction and mechanical spectroscopy of metallic materials]. M.: MISiS, 2012. 247 p.
9. Golovin I.S., Sinning H.R. Journal of Alloys and Compounds. 2003. 355. pp. 2-9.
10. Gorshkov A. G., Troshin V. N., Shalashilin V. I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. M.: FIZMATLIT, 2005. 544 p.
11. Darkov A.V., Shpiro G.S. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. M.: Vysshaya shkola, 1975. 655 p.
12. Sargsyan A.E. Soprotivlenie materialov, teorii uprugosti i plastichnosti [Resistance of materials, theory of elasticity and plasticity]. M.: Vysshaya shkola, 2000. 286 p.
13. Jiang Z.C., Tian Q.C., Ren Z.M. IOP Conference Series Materials Science and Engineering. 2019. 542 p.