Вычисление площади изображения плоской области методами математического анализа

И.А. Данилина[1], Ю.А. Костиков[1], А.М. Романенков[1,2]

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация
[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук, Москва, Российская Федерация

Аннотация: В работе предложен способ вычисления площади плоской области по фотографии, основанный на применение методов математического анализа. Для вычисления площади применяется криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру, ограничивающему рассматриваемую область. Задание границы в виде сплайна Безье сводит вычисление криволинейного интеграла к вычислению нескольких определенных интегралов от базисных полиномов Бернштейна. Для интегралов от базисных полиномов Берштейна получен явный вид. Для сплайна Безье третьего порядка выведена формула для вычисления площади области через координаты опорных точек кривых Безье.

Ключевые слова: кубический сплайн, базисные полиномы Берштейна. кривая Безье, сплайн Безье, формула Грина, бета-функция, гамма-функция.

Введение

Рассматривается задача нахождения площади плоской области по изображению. Поставленная задача может быть актуальна, например, в следующих случаях: область труднодоступна или недоступна вовсе, область имеет сложную форму. Сюда же можно отнести задачу автоматизации нахождения площадей большого числа площадей различных объектов.

Вычисление площади плоской области на практике часто сводится к непосредственному вычислению количества пикселей, принадлежащих рассматриваемой области или применению приближенных методов (метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона и т.п.).

В работе предлагается принципиально другой подход к решению поставленной задачи, основанный на методах математического анализа. На начальном этапе проводится цифровая обработка полученного изображения и

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

выделение границы изучаемой области [1, 2]. Затем вводится система координат и выбираются точки $P_i(x_{i,} y_i)$, где $i = \overline{0, n}$, лежащие на границе области, причём точка$(x_{0,} y_0)$ совпадает с точкой $(x_{n,} y_n)$, так как речь идёт о замкнутой кривой.

Задачи выделения границы изображения и выбора точек на границе сами по себе достаточна сложны и не обсуждаются в этой статье.

По выбранным точкам строится замкнутый локальный эрмитов кубический сплайн [3,4]. В работе [5] рассматривается задача приближения функции, заданной на равномерной сетке, методом локальной полиномиальной сплайн-аппроксимации, причем сетка узлов сплайна выбирается смещенной относительно сетки исходных данных.

В работе [6] исследуется погрешность, которая возникает при локальной аппроксимации функции полиномиальными сплайнами порядка n. В статье [7] описан алгоритм аппроксимации сплайнами поверхности или части поверхности, не имеющих аналитического описания. В работе [8] приводится метод построения локального кубического сплайна, который аппроксимирует функцию, заданную на произвольной сетке, с такой же точностью, как и интерполяционный сплайн. В статье [9] исследована среднеквадратичная аппроксимация сплайнами функции, заданной со случайными погрешностями. Предложен алгоритм нахождения коэффициентов таких сплайнов, даны теоретические оценки погрешностей.

В работе [10] рассмотрено приближение на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x) = |2x - 1|$ полиномами Берштейна. Исследована скорость приближения для разных точек отрезка.

В работе [11] рассмотрены аналитические основы теории кривых Безье. Предложен способ построения составных кривых Безье, заданной гладкости, на плоскости и в многомерном пространстве. В работе [12] исследованы свойства аппроксимации плоских и пространственных кривых параметрическими сплайнами.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

Для построения сплайна вводится параметризация по суммарной длине хорд l_i.

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Обозначив параметр через s, получим значения параметра s_i, соответствующее точкам P_i.

$$s_i = \sum_{k=0}^{i-1} l_k$$

Тогда параметрические уравнения эрмитова локального кубического сплайна, задающий кривую между точками P_i и P_{i+1}, будут иметь вид

$$\begin{gathered} x(t) = x_i(1 - t^2)(1 + 2t) + x_{i+1}t^2(3 - 2t) + x'_i t(1 - t)^2 l_i - \\ -x'_{i+1}t^2(1 - t)l_i, \\ y(t) = y_i(1 - t)^2(1 + 2t) + y_{i+1}t^2(3 - 2t) + y'_i t(1 - t)^2 \\ - y'_{i+1}t^2(1 - t)l_i, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$x'_0 = x'_n = \frac{l_{n-1}}{l_0 + l_{n-1}} \frac{x_1 - x_0}{l_0} + \frac{l_0}{l_0 + l_{n-1}} \frac{x_n - x_{n-1}}{l_{n-1}},$$

$$x'_i = \mu_i \frac{(x_{i+1} - x_i)}{l_i} + \lambda_i \frac{(x_i - x_{i-1})}{l_{i-1}}, i = \overline{1, n-1},$$

$$y'_0 = y'_n = \frac{l_{n-1}}{l_0 + l_{n-1}} \frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{l_0}{l_0 + l_{n-1}} \frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}},$$

$$y'_i = \mu_i \frac{(y_{i+1} - y_i)}{l_i} + \lambda_i \frac{(y_i - y_{i-1})}{l_{i-1}}, i = \overline{1, n-1},$$

$$\mu_i = \frac{l_{i-1}}{l_{i-1} + l_i}, \qquad \lambda_i = 1 - \mu_i.$$

В формуле (1) $t = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i}$, следовательно, так как в знаменателе стоит длина хорды, соединяющей точки P_i и P_{i+1}, параметр t меняется в пределах от нуля до единицы.

Раскрыв скобки и приведя подобные в формуле (1), получим для функции, задающей кривую, параметрические уравнения в виде многочленов по степеням t.

$$x(t) = a_{xi}t^3 + b_{xi}t^2 + c_{xi}t + d_{xi},$$
$$y(t) = a_{yi}t^3 + b_{yi}t^2 + c_{yi}t + d_{yi}, \tag{2}$$

где

$$a_{xi} = -2x_i - 2x_{i+1} + x'_i l_i - x'_{i+1} l_i$$
$$b_{xi} = -x_i + 3x_{i+1} - 2x'_i l_i + x'_{i+1} l_i,$$
$$c_{xi} = 2x_i + x'_i l_i, \quad d_{xi} = x_i,$$
$$a_{yi} = -2y_i - 2y_{i+1} + y'_i l_i - y'_{i+1} l_i$$
$$b_{yi} = -y_i + 3y_{i+1} - 2y'_i l_i + y'_{i+1} l_i,$$
$$c_{yi} = 2y_i + y'_i l_i, \quad d_{yi} = y_i$$

Запишем полученную кубическую функцию в виде кривой Безье третьего порядка.

Параметрические уравнения плоской кривой Безье третьего порядка определяются четырьмя точками: точкой $P_i\,(x_{i,}\, y_i)$ — началом кривой, точкой $P_{i+1}\,(x_{i+1,}\, y_{i+1})$ — концом кривой и ещё двумя точками $P_{i1}\,(x_{i1,}\, y_{i1})$, $P_{i2}\,(x_{i2,}\, y_{i2})$, которые не лежат на кривой, а служат для определения её формы.

$$x(t) = x_i(1-t)^3 + 3x_{i1}t(1-t)^2 + 3x_{i2}t^2(1-t) + x_{i+1}t^3$$
$$y(t) = y_i(1-t)^3 + 3y_{i1}t(1-t)^2 + 3y_{i2}t^2(1-t) + y_{i+1}t^3 \tag{3}$$

Таким образом, чтобы получить уравнения кривой в виде Безье требуется найти координаты точек $P_{i1}\,(x_{i1,}\, y_{i1})$ и $P_{i2}\,\left(x_{i2,}\, y_{i2}\right)$, которые лежат между точками P_i и P_{i+1}. Для этого запишем уравнения (3) в виде многочленов по степеням t.

$$x(t) = (-x_i + 3x_{i1} - 3x_{i2} + x_{i+1})t^3 + (3x_i - 6x_{i1} + 3x_{i2})t^2 + \\ +(-3x_i + 3x_{i1})t + x_i$$
$$y(t) = (-y_i + 3y_{i1} - 3y_{i2} + y_{i+1})t^3 + (3y_i - 6y_{i1} + 3y_{i2})t^2 + \\ +(-3y_i + 3y_{i1})t + y_i \tag{4}$$

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в уравнениях (2) и (4), получим системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} -x_i + 3x_{i1} - 3x_{i2} + x_{i+1} = a_{xi} \\ 3x_i - 6x_{i1} + 3x_{i2} = b_{xi} \\ -3x_i + 3x_{i1} = c_{xi} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} -y_i + 3y_{i1} - 3y_{i2} + y_{i+1} = a_{yi} \\ 3y_i - 6y_{i1} + 3y_{i2} = b_{yi} \\ -3y_i + 3y_{i1} = c_{yi} \end{cases} \tag{6}$$

Решения систем (5) и (6) определяют координаты точек, которые необходимы для представления кривой в виде кривой Безье.

$$P_{i1}\left(\frac{1}{3}c_{xi} + d_{xi}; \frac{1}{3}c_{yi} + d_{yi}\right), \qquad P_{i2}\left(\frac{1}{3}b_{xi} + \frac{2}{3}c_{xi} + d_{xi}; \frac{1}{3}b_{yi} + \frac{2}{3}c_{yi} + d_{yi}\right)$$

Вычисление площади плоской области, ограниченной сплайном Безье.

Рассмотрим некоторую плоскую область D, ограниченную сплайном Безье. Площадь $\boldsymbol{S}$ этой области равна двойному интегралу от единицы по этой области.

$$\boldsymbol{S} = \iint_D 1\,dx\,dy \tag{7}$$

Отметим, что граница области D состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Применив к двойному интегралу (7) формулу Грина, получим формулу для вычисления площади через криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру [13].

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_{L^+} xdy - ydx \tag{8}$$

С учетом свойства аддитивности криволинейного интеграла вычисление площади сводится к вычислению криволинейных интегралов по отдельным кривым Безье с последующим суммированием.

Кривые Безье n-го порядка, из которых состоит сплайн, ограничивающий рассматриваемую область, — это параметрические кривые, задаваемые уравнениями

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_k^n(t), \tag{9}$$

где P_k — опорные точки, определяющие положение и форму кривой, $B_k^n(t)$ — базисные полиномы Берштейна n-го порядка:

$$B_k^n(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, t \in [0,1], \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ — число сочетаний.}$$

Расписав (9) в покоординатной форме, получим функции $x(t)$ и $y(t)$ в виде линейных комбинаций базисных полиномов Бернштейна.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{n} x_k C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\ y(t) &= \sum_{k=0}^{n} y_k C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned} \tag{10}$$

Так как кривая Безье задается параметрически, причем параметр меняется в пределах от нуля до единицы, вычисление интеграла (8) по каждой кривой Безье G, определяющей границу области, сводится к вычислению обычного определенного интеграла с известными пределами интегрирования

$$\int_G xdy - ydx = \int_0^1 \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

Производные функций $x(t)$ и $y(t)$, задаваемых формулами (10), также являются линейными комбинациями базисных полиномов Берштейна $(n-1)$ –го порядка. $x(t)y'(t)$ и $y(t)x'(t)$ — произведения линейных комбинаций базисных полиномов Берштейна, которые, в свою очередь, будут многочленами в форме Берштейна порядка $(2n-1)$.

Следовательно, вычисление определенного интеграла (8) сводится к вычислению нескольких интегралов вида

$$\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dt. \tag{11}$$

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

Для вычисления таких интегралов можно воспользоваться бета-функцией $B(x, y)$, которая определяется аналогичным интегралом:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,. \tag{12}$$

Потребовав, чтобы $(x-1)$ было равно k, а $(y-1)$ — $(n-k)$, соответственно $x = k+1,\ y = n-k+1$, получим:

$$\int_0^1 t^k\,(1-t)^{n-k}dt = B(k+1, n-k+1). \tag{13}$$

Для вычисления значения $B(k+1, n-k+1)$ воспользуемся свойством, связывающим бета-функцию с гамма-функцией [13].

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{14}$$

Гамма-функция является обобщением факториала и для любого целого неотрицательного n верно

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) позволяют получить значение бета-функции в интересующей нас точке.

$$B(k+1, n-k+1) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma((k+1)+(n-k+1))} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} =$$

$$= \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)C_n^k} \tag{16}$$

Осталось подставить найденное значение (16) в интеграл (13).

$$\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt = \frac{1}{(n+1)C_n^k} \tag{17}$$

Всё выше сказанное позволяет сделать вывод, что вычисление интегралов, входящих в формулу для вычисления площади, не требует

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

непосредственного интегрирования. И нахождение площади плоской области, ограниченной сплайном Безье, сводится к вычислению алгебраического выражения.

Вычисление площади плоской области, ограниченной сплайном Безье третьего порядка.

Рассмотрим более подробно случай, когда контур, ограничивающий плоскую область, аппроксимирован сплайном Безье третьего порядка. Для вычисления площади области, ограниченной таким контуром, требуется вычислить криволинейный интеграл второго рода.

Кривая Безье третьего порядка, приближающая часть контура между точками P_i и P_{i+1}, определяется четырьмя опорными точками $P_i(x_i, y_i)$, $P_{i1}(x_{i1}, y_{i1})$, $P_{i2}(x_{i2}, y_{i2})$, $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, координаты средних точек $P_{i1}(x_{i1}, y_{i1})$ и $P_{i2}(x_{i2}, y_{i2})$ являются решениями систем (5) и (6).

Выпишем в явном виде параметрические уравнения кривой Безье третьего порядка, которые являются линейными комбинациями базисных полиномов Берштейна 3-го порядка.

$$x(t) = x_i(1-t)^3 + 3x_{i1}t(1-t)^2 + 3x_{i2}t^2(1-t) + x_{i+1}t^3$$

(18)

$$y(t) = y(1-t)^3 + 3y_{i1}t(1-t)^2 + 3y_{i2}t^2(1-t) + y_{i+1}t^3,$$

где $t \in [0, 1]$.

Продифференцировав соотношения в (18) по *t,* получим линейные комбинации базисных полиномов Берштейна 2-го порядка, то есть, отметим ещё раз, производная от кривой Безье также является кривой Безье, порядок которой на единицу меньше.

$$x'(t) = 3((x_{i1} - x_i)(1-t)^2 + 2(x_{i2} - x_{i1})t(1-t) + (x_{i+1} - x_{i2})t^2)$$

(19)

$$y'(t) = 3((y_{i1} - y_i)(1-t)^2 + 2(y_{i2} - y_{i1})t(1-t) + (y_{i+1} - y_{i2})t^2)$$

Далее, с учетом формул (18) и (19) вычислим выражение $x(t)y'(t) - y(t)x'(t)$, которое тоже будет многочленом в форме Берштейна 5-ой степени.

Подставим получившийся полином в интеграл (8).

$$\boldsymbol{S_i} = \int_0^1 \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = [x_i y_{i1} - x_{i1} y_i] \int_0^1 (1-t)^5\,dt +$$

$$+[x_i(2y_{i2} + y_{i1}) - x_{i1}y_i - 2x_{i2}y_i] \int_0^1 t(1-t)^4\,dt +$$

$$+[x_i(y_{i+1} + 2y_{i2}) + 3x_{i1}y_{i2} - x_{i2}(2y_i + y_{i1}) - x_{i+1}y_i] \int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt +$$

$$+[x_i y_{i+1} + x_{i1}(2y_{i+1} + 3y_{i2}) - 3x_{i2}y_{i1} - x_{i+1}(y_i + 2y_{i1})] \int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt$$

$$+ [2x_{i1}y_{i1} + x_{i2}y_{i+1} - x_{i+1}(y_{i2} + 2y_{i1})] \int_0^1 t^4(1-t)\,dt +$$

$$+[x_{i2}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i2}] \int_0^1 t^5\,dt \qquad (20)$$

Для вычисления интегралов вида (11) при $n = 5$, входящих в (20), воспользуемся формулой (16).

$$\int_0^1 (1-t)^5\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^0} = \frac{1}{6}, \qquad \int_0^1 t(1-t)^4\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^1} = \frac{1}{30},$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^2} = \frac{1}{60}, \qquad \int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^3} = \frac{1}{60},$$

$$\int_0^1 t^4(1-t)\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^4} = \frac{1}{30}, \qquad \int_0^1 t^5\,dt = \frac{1}{(5+1)C_5^5} = \frac{1}{6}$$

Подставив значения интегралов в (19) и приведя подобные слагаемые, получим явную формулу для вычисления S_i.

$$\boldsymbol{S_i} = \frac{1}{10}(x_i(6y_{i1} + 3y_{i1} + y_{i+1}) + 3x_{i1}(-2y_i + y_{i2} + y_{i+1}) - 3x_{i2}(y_i + y_{i1} - 2y_{i+1}) - x_{i+1}(y_i + 3y_{i1} + 6y_{i2}))$$

Для того чтобы найти значение площади осталось просуммировать результаты, полученные для всех отрезков разбиения границы области.

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{1}{2}\boldsymbol{S_i}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача нахождения площади некоторой плоской области на изображения. Предложен алгоритм для решения поставленной задачи, который основан на вычислении циркуляции по замкнутому контору. По точкам, лежащим на границе области, построен сплайн из кривых Безье, который аппроксимирует границу изображения.

Благодаря явной функциональной зависимости, задающей границу, получена формула, позволяющая через координаты точек, определяющих кривые Безье на каждом участке, точно вычислить площадь, лежащую внутри контура.

Литература

1.Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 3-е изд. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.

2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. 2-е изд. М.: Мир, 2001. 604 с.

3.Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 352 с.

4.Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьтера. М.: Диалог-МИФИ, 1996. 240 с.

5.Волков Ю.С., Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т. Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Математические труды. 2011, том 14. №2. С. 73-82.

6. Волков Ю.С., Богданов В.В. О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимации сплайнами // Сибирский математический журнал. 2020, том 61. №5. С. 795-802.

7.Замятин А.В., Кубарев А.Е., Замятина Е.А. Алгоритм аппроксимации поверхности сплайнами //Вестник евразийской науки. 2012 № 3 URL: cyberleninka.ru/article/n/algoritm-approksimatsii-poverhnosti-splaynami (дата обращения: 07.05.2025).

8. Юферев В.С. Локальная аппроксимация кубическими сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981, том 21. №1. С. 5-10.

9. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Среднеквадратичная аппроксимация сплайнами // Математическое моделирование. 1997, том 21. №9. С. 107-116.

10. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. 2012. №26 (280). URL: cyberleninka.ru/article/n/priblizhenie-modulya-polinomami-bernshteyna (дата обращения: 07.05.2025).

11.Григорьев М.И., Малоземов В.Н., Сергеев А.Н. Полиномы Берштейна и составные кривые Безье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006, том 46. №11. С. 1962-1971.

12. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В., Маевский Е.В., Тишкин В.Ф. Ротационная инвариантность параметрической сплайн-аппроксимации // Математическое моделирование. 1998, том 10. №4. С. 83-90.

13.Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 2, Книга 2. 6-е изд. М.: Юрайт, 2020. 323 с.

References

1.Gonzalez R., Woods R. Citrovaja obrabotka izobrazhenij [Digital image processing]. M: Technosphera, 2021. 1104 p.

2.Rogers D., Adams J. Matematicheskie osnovy mashinnoj grafiki [Mathematical elements for computer graphics]. 2-e izd. M.: Mir, 2001. 604 p.

3. Zav'jalov Ju.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Metody splajn funkcij [Methods of spline functions]. M.: Nauka. Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1980. 352 p.

4. Shikin E.V., Plis A.I. Krivye i poverhnosti na jekrane komp'tera [Curves and surfaces on the computer screen]. M.: Dialog-MIFI, 1996. 240 p.

5. Volkov Ju.S., Strelkova E.V., Shevaldin V.T. Matematicheskie trudy. 2011, tom 14. №2. pp. 73-82.

6. Volkov Ju.S., Bogdanov V.V. Sibirskij matematicheskij zhurnal. 2020, tom 61. №5. pp. 795-802.

7. Zamjatin A.V., Kubarev A.E., Zamjatina E.A. Vestnik evrazijskoj nauki. 2012 № 3. URL: cyberleninka.ru/article/n/algoritm-approksimatsii-poverhnosti-splaynami (date assessed: 07.05.2025).

8. Juferev V.S. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 1981, tom 21. №1. pp. 5-10.

9. Kalitkin N.N., Kuz'mina L.V. Matematicheskoe modelirovanie. 1997, tom 21. №9. pp. 107-116.

10. Tihonov I.V., Sherstjukov V.B. Vestnik ChelGU. 2012. №26 (280). URL: cyberleninka.ru/article/n/priblizhenie-modulya-polinomami-bernshteyna (date assessed: 07.05.2025).

11. Grigor'ev M.I., Malozemov V.N., Sergeev A.N. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2006, tom 46. №11. pp. 1962-1971.

12. Kalitkin N.N., Kuz'mina L.V., Maevskij E.V., Tishkin V.F. Matematicheskoe modelirovanie. 1998, tom 10. №4. pp. 83-90.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025

13. Kudrjavcev L.D. Kurs matematicheskogo analiza [Course of mathematical analysis]. Tom 2, kniga 2. 6-e izd. M.: Jurajt, 2020. 323 p.

Дата поступления: 4.05.2025

Дата публикации: 27.06.2025

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2025