Моделирование колебания мембраны треугольной формы

Н.А. Чернышов

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация: Во многих современных технических конструкциях применяются мембраны различных форм. Это могут быть электроакустические приборы, медицинское оборудование, обшивка корпуса самолета треугольными ячейками. Известны решения о свободных колебаниях мембран прямоугольной и круглой формы методом Фурье. Также существует довольно много решений задач о колебаниях мембран различных форм методом конечного элемента. Аналитические решения для мембран более сложных форм представляют большой интерес в связи со сложной геометрией контура и трудности получения самого решения. В данной работе получены частные решения для задачи о свободных колебаниях мембраны правильной треугольной формы с различным заданным начальным изгибом поверхности и найдены собственные частоты колебаний.

Ключевые слова: Свободные колебания мембраны, мембрана правильной треугольной формы, собственные частоты колебаний.

Постановка задачи

Рассмотрим свободные колебания мембраны, представляющей собой упругую свободно изгибающуюся натянутую пленку. Толщина пленки и ее колебания малы по сравнению с размерами. Если мембрана выведена из состояния покоя, то ее точки начинают совершать движения перпендикулярно плоскости XOY, т.е. совершают поперечные колебания.

Пусть равносторонняя треугольная мембрана закреплена на границе и находится в плоскости XOY. Затем в начальный момент времени $t=0$ мембрана выводится из положения равновесия в плоскости XOY и начинает совершать колебания. Дифференциальное уравнение колебания мембраны имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

где W – отклонение точек мембраны от плоскости XOY, t – время.

Граничные условия мембраны:

$$\mathrm{W}\big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

Начальные условия:

$$\mathrm{W}\big|_{t=0} = f\left(x, y\right), \quad \left.\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

Будем искать решение в виде [2]:

$$\mathrm{W} = \mathrm{U}\left(x, y\right)\mathrm{T}\left(t\right). \tag{4}$$

После подстановки (4) в (1) получим:

$$\mathrm{U}\left(x, y\right)\mathrm{T}''\left(t\right) = a^2 \Delta \mathrm{U}\left(x, y\right)\mathrm{T}\left(t\right)$$

$$\frac{\mathrm{T}''}{\mathrm{T}} = a^2 \frac{\Delta \mathrm{U}}{\mathrm{U}}$$

Так как левая часть не зависит от x , а правая от t, то обозначим

$$\frac{\mathrm{T}''}{\mathrm{T}} = a^2 \frac{\Delta \mathrm{U}}{\mathrm{U}} = -a^2\lambda^2$$

Получим:

$$\mathrm{T}'' + a^2\lambda^2\mathrm{T} = 0 \tag{5}$$

$$\Delta \mathrm{U} + \lambda^2 \mathrm{U} = 0 \tag{6}$$

общее решения (5) будет:

$$\mathrm{T} = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t$$

Решение задачи

Решение уравнения (6) затруднено в связи со сложной геометрией мембраны в [3–10] рассматривались задачи с различной геометрией мембран и пластин. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\mathrm{F}''\left(x\right) + \lambda^2\mathrm{F}\left(x\right) = 0 \tag{7}$$

Его общее решение имеет вид:

$$\mathrm{F}\left(x\right) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

Введем три вспомогательные переменные ξ_i:

$$\xi_1 = y, \;\; \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y\right), \;\; \xi_3 = h - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + y\right) \tag{8}$$

где h – высота треугольника

Три переменные ξ_i, i=1,2,3 обладают следующими свойствами:

1. Уравнения сторон треугольника имеют вид :

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{9}$$

2. Сумма переменных ξ_i является постоянным числом.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = h \tag{10}$$

3. Если функция $F(\xi_i)$ зависит только от одной геометрической переменной ξ_i, то будем иметь вспомогательные дифференциальные равенства:

$$\Delta F(\xi_i) = \frac{d^2 F(\xi_i)}{d\xi_i^2}, \quad \Delta^2 F(\xi_i) = \frac{d^4 F(\xi_i)}{d\xi_i^4} \tag{11}$$

Функции $F(\xi_i)$, $F(\xi_1+\xi_2)$, $F(\xi_1+\xi_3)$, $F(\xi_2+\xi_3)$, учитывая (10) удовлетворяют дифференциальному уравнению (7). Применяя принцип суперпозиций, представим решение задачи (7) следующим образом:

$$U = F(\xi_1) + F(\xi_2) + F(\xi_3) - F(\xi_1+\xi_2) - F(\xi_2+\xi_3) - F(\xi_1+\xi_3) \tag{12}$$

Преобразуем выражение, применяя свойство (10):

$$U = C\left(\cos\lambda\xi_1 + \cos\lambda\xi_2 + \cos\lambda\xi_3 - \cos\lambda\left(h-\xi_1\right) - \cos\lambda\left(h-\xi_2\right) - \cos\lambda\left(h-\xi_3\right)\right) +$$
$$+D\left(\sin\lambda\xi_1 + \sin\lambda\xi_2 + \sin\lambda\xi_3 - \sin\lambda\left(h-\xi_1\right) - \sin\lambda\left(h-\xi_2\right) - \sin\lambda\left(h-\xi_3\right)\right) =$$
$$= \bar{C}\left(\sin\lambda\left(\xi_1 - \frac{h}{2}\right) + \sin\lambda\left(\xi_2 - \frac{h}{2}\right) + \sin\lambda\left(\xi_3 - \frac{h}{2}\right)\right)$$

где $\bar{C} = \dfrac{D\left(1+\cos\lambda h\right) - C\sin\lambda h}{\cos\dfrac{\lambda h}{2}}$

получили:

$$U = \bar{C}\left(\sin\lambda\left(\xi_1 - \frac{h}{2}\right) + \sin\lambda\left(\xi_2 - \frac{h}{2}\right) + \sin\lambda\left(\xi_3 - \frac{h}{2}\right)\right) \tag{13}$$

Рассмотрим граничные условия (2). Здесь возможны варианты:

$$\xi_1=0,\ \xi_2=0,\ \xi_3=0,\ \xi_1=\xi_2=0,\ \xi_1=\xi_3=0,\ \xi_2=\xi_3=0$$

в любом случае получим:

$$\mathrm{U}\big|_{\Gamma}=-\bar{C}\sin\lambda\frac{h}{2}$$

учитывая, что $\bar{C}\neq 0$, придем к условию

$$\sin\lambda\frac{h}{2}=0$$

собственные частоты имеют вид

$$\lambda_n=\frac{2\pi n}{h},\ n=1,2,3... \tag{14}$$

Учитывая, что начальные скорости (3) всех точек мембраны равны нулю, то $B=0$. Обозначим при $\lambda=\lambda_n$ постоянную $b_n=A\bar{C}$. Получим последовательность частных решений уравнения (1):

$$\mathrm{W}_n=b_n\cos\frac{2\pi n}{h}at\left(\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \tag{15}$$

Все точки мембраны колеблются с одним и тем же периодом

$$\mathrm{T_n}=\frac{h}{an},\quad n=1,2,3...$$

Амплитуда колебаний имеет вид:

$$\bar{\mathrm{A}}=\left|b_n\left(\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right)\right|$$

Общее решение уравнения (1) получим, сложив все частные решения (15)

$$\mathrm{W}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{2\pi n}{h}at\left(\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \tag{16}$$

Так как мембрана имеет в момент времени $t=0$ начальную форму (3), то

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right)=\\ =f_1\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+f_2\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+f_3\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

где $f(x,y)=f_1\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+f_2\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+f_3\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)$

Начальную форму необходимо подобрать таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (2) и возможно было бы решение уравнения (17). Рассмотрим частный случай и примем

$$f(x,y)=\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi n}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)$$

Тогда $b_n=1$. Принимая $n=1,2,3,...$ получим различные начальные формы. На рис. 1 показана первая форма колебаний мембраны при $n=1$.

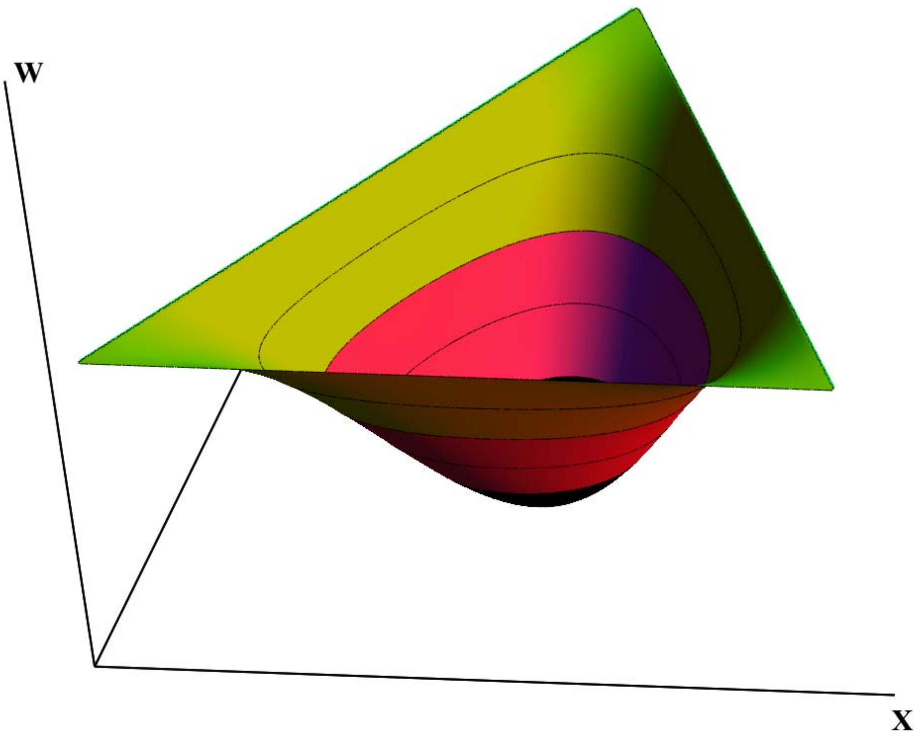

Рис. 1. – Первая начальная форма мембраны.

Общее решение при $n=1$.

$$W=\cos\left(\frac{2\pi}{h}at\right)\left(\sin\frac{2\pi}{h}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi}{h}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi}{h}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \qquad (18)$$

В более удобной форме общее решение после преобразований можно представить:

$$W = \cos\left(\frac{2\pi}{h}at\right)\sin\frac{\pi}{h}\xi_1 \sin\frac{\pi}{h}\xi_2 \sin\frac{\pi}{h}\xi_3 \quad (19)$$

На рис. 2 показана вторая форма колебаний мембраны при $n = 2$.

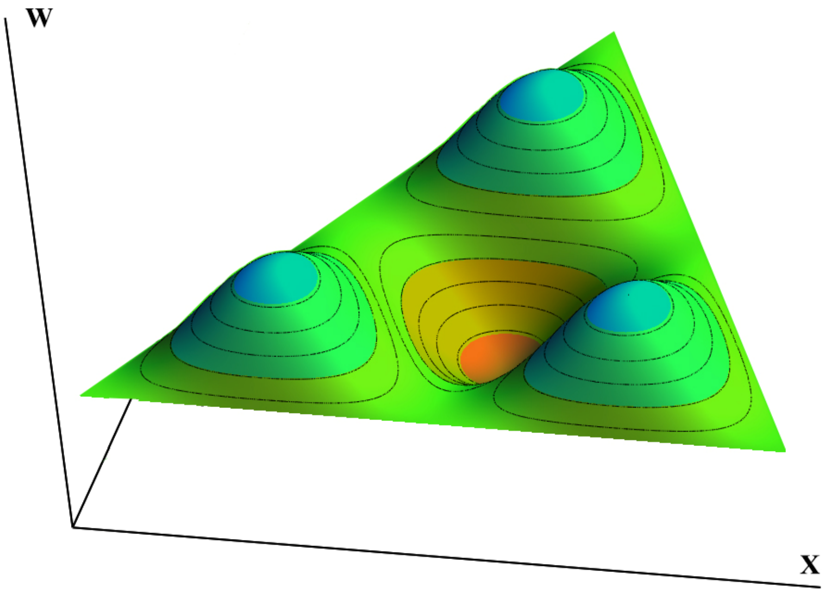

Рис. 2. – Вторая начальная форма мембраны.

На рис. 3 показана третья форма колебаний мембраны при $n = 3$.

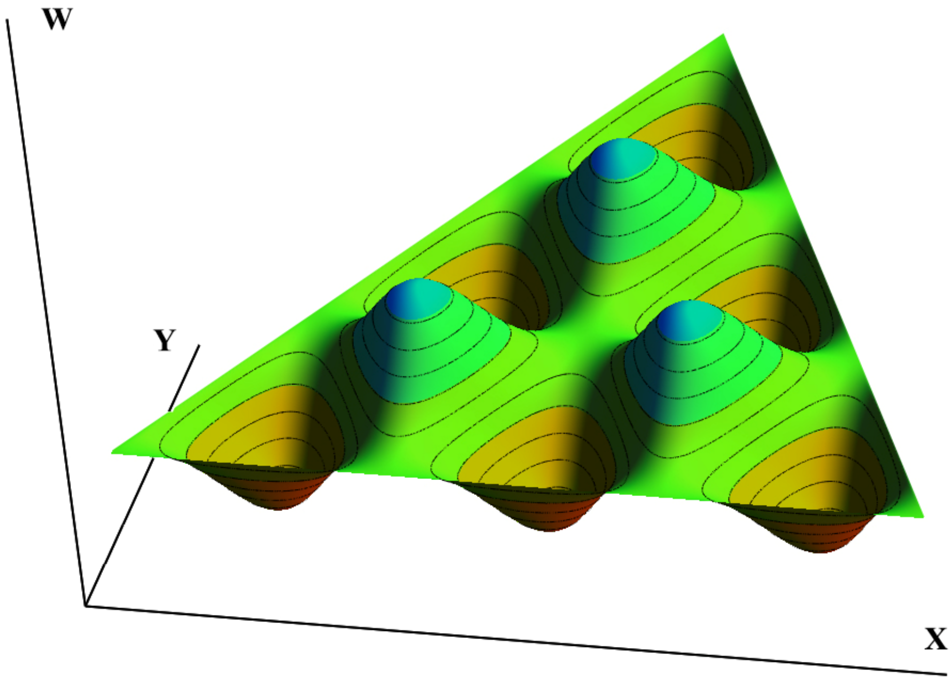

Рис. 3. – Третья начальная форма мембраны.

Общее решение для произвольного n имеет вид:

$$W = \cos\left(\frac{2\pi}{h}at\right)\sin\frac{\pi n}{h}\xi_1 \sin\frac{\pi n}{h}\xi_2 \sin\frac{\pi n}{h}\xi_3 \qquad (20)$$

Форма полученного решения похожа на решение для прямоугольной мембраны. В нем также присутствует произведение синусов, что обеспечивает гармонические колебания. На рис. 2, 3 видны зоны пучностей, узловые линии, что показывает сходство с характером колебаний прямоугольной мембраны.

В представленной работе найдены собственные частоты колебаний, получены частные решения задачи о свободных колебаниях мембраны правильной треугольной формы с начальным отклонением, а также построены первые три формы колебания мембраны.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: 1966.- 724 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: 1960.- 464 с.
3. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле. – М.: Физматгиз 1959.- 472 с.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука,1966.- 443 с.
5. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. A note on vibrating triangular equilateral plates subject to a hydrostatic state of in-plane stress. // Journal of sound and vibration. -1991. -N149. -pp.513-515.
6. Liew K.M. On the use of pb-2 Rayleigh-Ritz method for free flexural vibration of triangular plates with curved internal supports. // Journal of sound and vibration. -1993. -N165. - pp.329-340.
7. Mirza S., Bijlani M. Vibration of triangular plates // AIAA journal. -1983. -№ 21. - pp.1472-1475.
8. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Колебания треугольной упругой пластины под совместным действием равномерно распределенной

поперечной нагрузки и равномерного растяжения. Известия инженерно-технологической академии чувашской республики, 1998, Чебоксары, №11, с.87-95.

9. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Влияние вязкости на колебания треугольной пластины. «Актуальные проблемы механики оболочек», Труды международной конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова., 1998, Казанский гос. университет, с.237-243.
10. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Вязкоупругие колебания треугольной пластины. ПМТФ, 2001, т.42, №3, Новосибирск, с.152-158.

References

1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki. [Equations of mathematical physics] M.: 1966. 724 p.
2. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. [Fundamentals of mathematical analysis] M.: 1960. 464 p.
3. Timoshenko S.P. Teorija kolebanij v inzhenernom dele. [Theory of oscillations in engineering] M.: Fizmatgiz 1959. 472 p.
4. Sobolev S.L. Uravnenija matematicheskoj fiziki. [Equations of mathematical physics] M.: Nauka, 1966. 443 p.
5. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. Journal of sound and vibration. 1991. №149. pp.513-515.
6. Liew K.M. Journal of sound and vibration. 1993. №165. pp.329-340.
7. Mirza S., Bijlani M. Vibration of triangular plates AIAA journal. 1983. №21. pp.1472-1475.
8. Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Izvestija inzhenerno tehnologicheskoj akademii chuvashskoj respubliki, 1998, Cheboksary, N11, pp.87-95.
9. Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Vlijanie vjazkosti na kolebanija treugol'noj plastiny. «Aktual'nye problemy mehaniki obolochek», Trudy mezhdunarodnoj

konferencii, posvjashhennoj pamjati zasluzhennogo dejatelja nauki TASSR prof. Sachenkova A.V., 1998, Kazanskij gos. universitet pp.237-243.

10.Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Vjazkouprugie kolebanija treugol'noj plastiny. PMTF, 2001, t.42, №3, Novosibirsk, pp.152-158.