Исследование напряжений на линии сопряжения ступенчатой пластины

П.В. Дородов

Различные детали и рабочие органы машин могут иметь резкие переходы от одного сечения к другому. В этих зонах проявляется значительная концентрация напряжений под действием внешних нагрузок, приводящая к возникновению трещин или больших остаточных деформаций, что является недопустимым явлением. Известно много методов определения напряжений в таких зонах. [1, 2] В данной работе предлагается метод определения напряжений и коэффициента концентрации, позволяющий прийти к точному решению задачи.

На примере плоской задачи рассмотрим сопряжение ступени 1 и основания 2 пластины переменной жесткости (рис.1). Линия сопряжения представляет собой прямую *[-t;t]*, соединяющую углы перехода от ступени к основанию.

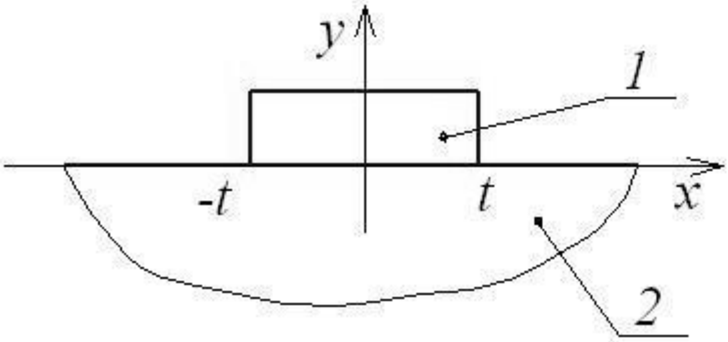

Рис. 1 Сопряжение ступенчатой пластины

1 – ступень, 2 – основание

Для решения этой задачи используем характеристическую часть особого интегрального уравнения с постоянными коэффициентами a и b на отрезке *[-t;t]* [3, 4, 5]:

$$a\varphi(x)+\frac{b}{\pi i}\int_{-t}^{+t}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-x}d\xi=f(x),$$

где $f(x)=\frac{dU}{dx}-i\frac{dV}{dx}$; U, V – перемещения точек линии сопряжения; $\varphi(x)=\sigma_y(x)+i\tau_{xy}(x)$; $\sigma_y(x),\tau_{xy}(x)$ – нормальные и касательные напряжения на линии сопряжения.

На рисунке 2 изображена пластина после внедрения ступени в основание.

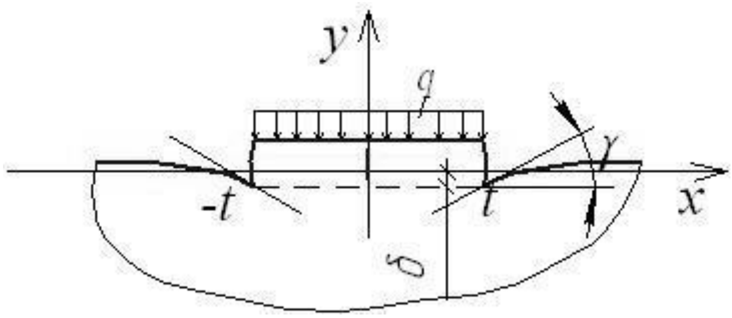

Рис. 2 Ступень после внедрения в основание

q – внешняя нагрузка; δ – вертикальное перемещение линии сопряжения; γ – угол наклона касательной в точке перехода контура пластины от ступени к основанию

В случае неограниченного решения в узлах $x=\pm t$ имеем [3, 4, 6]:

$$\varphi(x)=a^* f(x)-\frac{b^*}{\pi i}\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_{-t}^{+t}\frac{\sqrt{t^2-\xi^2}\,f(\xi)}{\xi-x}d\xi+\frac{C}{\pi\sqrt{t^2-x^2}}, \qquad (1)$$

где a^*, b^*, C– постоянные.

Предположим, что линия сопряжения после нагружения пластины остается прямой или ее искривлением можно пренебречь, тогда на линии интегрирования перемещения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} V(x)&=-\delta,\\ U(x)&=b_1 x,\end{aligned}\right\}$$

где δ, b_1 – некоторые постоянные и

$$f(x)=b_1,$$

а выражение (1) после разложения на действительную и мнимую части можно переписать

$$\sigma_y(x) = a^* b_1 + \frac{C}{\pi\sqrt{t^2 - x^2}}; \ \tau_{xy}(x) = -\frac{b^* b_1 x}{\sqrt{t^2 - x^2}}. \qquad (2)$$

Кроме напряжений σ_y и τ_{xy} возникает еще и σ_x, которое можно определить по закону Гука

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{du(x)}{dx}\right] = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)b_1\right] = \frac{Gb_1}{\varepsilon}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Для определения постоянных воспользуемся уравнением равновесия:

$$\int_{-t}^{+t} \sigma_ó dx = a^* b_1 2t + C = q2t \qquad (4)$$

и краевым условием – при $x=0$ нормальные напряжения из условий симметрии будут равны главным:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x(0) = \sigma_2, \\ \sigma_ó(0) = \sigma_1, \end{array}\right\}$$

тогда для максимальных касательные напряжений запишем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_ó(0) - \sigma_x(0)}{2} = \frac{q}{2}$$

или с учетом (2) и (3), имеем

$$\left(a^* - \frac{G}{\varepsilon}\right)b_1 + \frac{C}{\pi t} = q. \qquad (5)$$

Решая совместно (4) и (5), получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{N} = 2qtc^*, \\ b_1 = \frac{q}{a^*}\left(1 - c^*\right), \end{array}\right\}$$

где

$$\tilde{n}^* = \frac{k(1-\nu)}{(1-2\nu)^2\left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{k(1-\nu)}{(1-2\nu)^2}\right)}, \ a^* = \varepsilon b^* = \frac{\varepsilon\theta}{\varepsilon^2 - 1},$$

а напряжения примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_y &= q\left[1+\left(\frac{2t}{\pi\sqrt{t^2-x^2}}-1\right)c^*\right],\\
\sigma_x &= -\frac{qk(1-\nu)}{(1-2\nu)^2}\left(1-c^*\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{qx}{\varepsilon\sqrt{t^2-x^2}}\left(1-c^*\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из формул (6) видно, что на концах линии сопряжения напряжения σ_y и τ_{xy} неограниченно возрастают. Это объясняется идеально острыми углами. На самом деле углы скруглены. Переход от ступени к основанию пластины с закругленными углами изображен на рисунке 3.

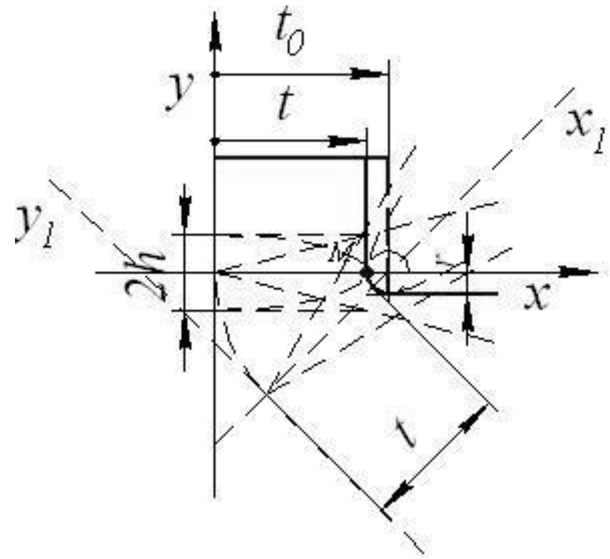

Рис. 3 Ступенчатая пластина со скругленными углами

Обозначим через α_σ теоретический коэффициент концентрации напряжений по нормальным напряжениям σ_y, то есть

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_y^{\max}}{\sigma_y^{\text{ном}}}.$$

Здесь

$$\sigma_y^{\max} = q\left[1+\left(\frac{2}{\pi\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}}-1\right)c^*\right],$$

где t_0 – полуширина ступени пластины с идеально прямыми (неокругленными) углами,

$$\sigma_{\text{ó}}^{\text{îîì}} = \sigma_y(0) = q\left(1 + \left(\frac{2}{\pi} - 1\right)c^*\right).$$

Тогда имеем

$$\alpha_\sigma = \frac{1 + \left(\dfrac{2}{\pi\sqrt{1 - \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^2}} - 1\right)c^*}{1 + (2/\pi - 1)\tilde{n}^*}$$

откуда

$$\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 = \frac{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2}{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2 - 4(c^*)^2}. \qquad (7)$$

Далее предположим, что скругленный угол по контуру совпадает с частью гиперболы (см. рис. 3)

$$\frac{x_1^{\ 2}}{t^2} - \frac{\text{ó}_1^{\ 2}}{h^2} = 1$$

в системе координат x_1, y_1 с действительной t и мнимой h полуосями. Оси x_1, y_1 повернуты к осям x, y под углом в 45^0.

Тогда для точки M скругленного контура можно записать

$$\frac{\left(t_0 - r/\sqrt{2}\right)^2}{t^2} - \frac{r^2}{2h^2} = 1. \qquad (8)$$

Так как α_σ зависит только от геометрии угла, следовательно, в точках линии гиперболы и эллипса с одинаковой кривизной коэффициенты концентрации должны быть одинаковы. Согласно [7, 8] для эллипса имеем:

$$\alpha_\sigma = \frac{2t}{h} + 1,$$

откуда

$$h = \frac{2t}{\alpha_\sigma - 1}. \qquad (9)$$

Учитывая (9), из выражения (8) получаем

$$\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 = \frac{(\alpha_\sigma - 1)^2 r^2}{8t^2} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{t^2} + \sqrt{2}\,\frac{r}{t} + 1. \tag{10}$$

Приравнивая правые части (7) и (10), имеем

$$\frac{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2}{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2 - 4(c^*)^2} - \frac{(\alpha_\sigma - 1)^2 r^2}{8t^2} - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{t^2} - \sqrt{2}\,\frac{r}{t} - 1 = 0.$$

Обозначим относительный радиус $r_0 = \dfrac{r}{2t}$, тогда последнее выражение можно переписать

$$\frac{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2}{\left(\alpha_\sigma - 1 + (\alpha_\sigma 2/\pi - \alpha_\sigma + 1)c^*\right)^2 \pi^2 - 4(c^*)^2} - \frac{(\alpha_\sigma - 1)^2 r_0^{\,2}}{2} - 2\left(2\sqrt{2} - 1\right)r_0^{\,2} - 2\sqrt{2}\,r_0 - 1 = 0. \tag{11}$$

На рисунке 4 изображена графическая зависимость (11) теоретического коэффициента концентрации напряжений от радиуса кривизны галтели и коэффициента Пуассона, который для всех материалов принимает значения $0 < \nu < 0{,}5$ и которому соответствует $0{,}89 < \tilde{n}^* < 1$. Построение проводилось в среде пакета программ Maple. Предложенное решение хорошо согласуется с действительным коэффициентом концентрации напряжений, найденным для модели из органического стекла (ν=0,35) при помощи лазерного интерферометра по методике, описанной в [9, 10]. Так, при $\dfrac{r}{2t} = 0{,}2$ действительный коэффициент концентрации составил 1,48, а теоретическое значение, найденное по выражению (11) дает 1,52, то есть относительное отклонение теории от эксперимента равно 2,7%.

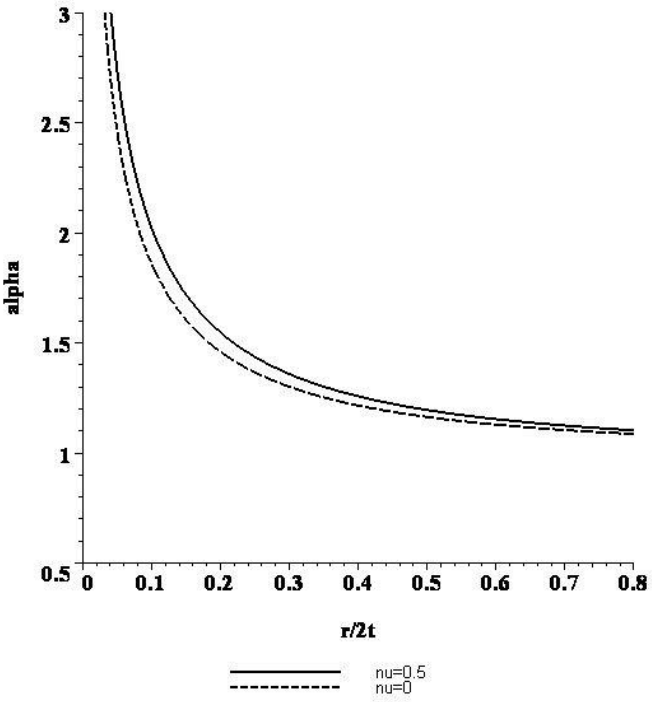

Рис. 4 Графическая взаимосвязь между коэффициентом концентрации напряжений и радиусом галтели

Из анализа графической зависимости можно сделать следующие выводы:

- так как линии с предельными коэффициентами Пуассона практически совпадают, то для исследования концентрации напряжений в галтелях можно пользоваться примерной формулой при $\tilde{n}^* = 1$

$$\frac{1}{\left(\alpha_\sigma{}^2 - 1\right)} - \frac{\left(\alpha_\sigma - 1\right)^2 r_0^2}{2} = 2r_0\left(\left(2\sqrt{2} - 1\right)r_0 + \sqrt{2}\right); \qquad (12)$$

- из выражения (12) видно, что $\alpha_\sigma \to 1$ при $\frac{r}{2t} \to \infty$, а так как в ступенчатых деталях используются выкружки с относительными радиусами $\frac{r}{2t}$ от 0,5 до 0,1, которым соответствуют коэффициенты концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 1{,}2 \ldots 2{,}02$, следовательно, применение технологического скругления углов с постоянными радиусами не является оптимальной формой перехода.

Литература:

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 344 с.
2. Бескопыльный А.Н. Методика экспериментального исследования предварительных напряжений в образце при вдавливании индентора / А.Н. Бескопыльный, А.А. Веремеенко // Инженерный вестник Дона [Электронный ресурс].– 2012. –№4. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: «Наука», 1968. – 512 с.
4. Дородов П.В. Приведение краевой задачи для плоского упругого тела к одному особому интегральному уравнению / П.В. Дородов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №06(80). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/.
5. Дородов П.В. Исследование напряжений в окрестности плоского горизонтального выреза / П.В. Дородов, А.В. Кулагин // Инженерный вестник Дона [Электронный ресурс].– 2012. –№2. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/.
6. Trjitzinsky W.J. Singular integral equations with Cauchy kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V.60. No. 2. P.167-214.
7. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
8. Inglis C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Institute of Naval Architects. 1913. V.55. P. 219-241.
9. Беркутов В.П. Интерферометр для определения нормальных напряжений в плоских прозрачных моделях / Н.В. Гусева, П.В. Дородов, М.М. Киселев // Датчики и системы, – №2. – 2009. – С. 26-30.

10. Беркутов В.П. Полярископ для определения разности главных напряжений в плоских моделях, изготовленных из оптически малочувствительных прозрачных материалов / Н.В. Гусева, П.В. Дородов, М.М. Киселев // Вестник Ижевского государственного технического университета, – №4 (40). – 2008. – С. 108-110.