

Применение тензорной методологии для проектирования математических моделей электромагнитных приводов

*А. М. Ланкин, Н.И. Горбатенко, С. И. Заитов, О. Р. Сторчак, И. О. Блажко,
А. Ю. Полухин*

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Аннотация: При создании модели нелинейной электротехнической системы на основе дифференциальных уравнений важно иметь в виду, что обычное дифференцирование не дает адекватного математического представления о протекающих нелинейных физических процессах. Даже в простейшем случае проводника с током, построение адекватной модели оказывается возможным, только если применить тензорный подход. С такой точки зрения, любая электротехническая система является объектом тензорной методологии. Типичным примером нелинейной электротехнической системы является электромагнитный привод переменного тока. Нелинейный характер процессов в таких устройствах обусловлен рядом причин. Основными причинами являются: вытеснение тока в обмотке электромагнитного привода переменного тока и насыщение стали магнитопровода в процессе намагничивания. Оба явления допускают тензорное описание, что подтверждается исследованиями, приведенными в статье.

Ключевые слова: динамическая характеристика намагничивания, электромагнит, математическая модель, тензорная методология.

Чтобы учесть эффект вытеснения тока, каждую катушку представим в виде n тонких проводников [1, 2]. В результате эффекта вытеснения тока величина и фаза тока в разных тонких проводниках будет различной. В тех тонких проводниках, которые расположены ближе к поверхности исходной катушки, величина тока будет больше [3]. В тонких проводниках, расположенных ближе к середине, - меньше. При этом чем больше будет число n , тем меньше будет эффект вытеснения тока в каждом отдельном тонком проводнике. С учетом вышесказанного, рассмотрим электромагнитный привод переменного тока как электротехническую систему, содержащую n взаимосвязанных электромагнитных контуров [4]. Пусть комплексное сопротивление k -той ветви $Z_{kk}(s)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) такой системы определяется, как:

$$Z_{kk}(s) = R_{kk} + sL_{kk} + \frac{1}{sC_{kk}},$$

где s - комплексная переменная, R_{kk} - активное сопротивление k -той ветви, L_{kk} - собственная индуктивность k -той ветви, C_{kk} - собственная емкость k -той ветви.

Между собственными индуктивностями ветвей L_{kk} , где $k = 1, 2, \dots, n$, могут быть электромагнитные связи. Эти связи определяются взаимными индуктивностями L_{ik} ($i \neq k$). Также в каждой ветви имеется источник напряжения. Обозначим напряжение в k -той ветви через u_k .

Система дифференциальных уравнений баланса напряжений [5], описывающая переходные процессы имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} + R_{11}'i_1 + \frac{1}{C_{11}} \int i_1 dt = u_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} + R_{22}'i_2 + \frac{1}{C_{22}} \int i_2 dt = u_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} + R_{nn}'i_n + \frac{1}{C_{nn}} \int i_n dt = u_n, \end{array} \right.$$

где $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ - потокосцепления, i_1, i_2, \dots, i_n - токи ветвей, $R_{11}', R_{22}', \dots, R_{nn}'$ - коэффициенты, которые численно равны активным сопротивлениям, определяемым на постоянном токе, $C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}$ - емкости в ветвях.

Такая система уравнений может иметь достаточно высокий порядок, который зависит от количества контуров нелинейной электромеханической системы.

В эту систему входят параметры $R_{11}', R_{22}', \dots, R_{nn}'$, которые можно поставить в зависимость от режима работы, моделируя тем самым, например, эффект вытеснения тока на высоких частотах. Но следует всегда иметь в виду, что активные сопротивления $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$, определяются только на постоянном токе и являются величинами постоянными. Поэтому если коэффициенты поставить в зависимость от каких-либо переменных, то такую

систему уравнений нельзя считать адекватной математической моделью. Неадекватность такой модели разъясняется далее по тексту.

Рассмотренная система уравнений может быть записана в более компактном виде:

$$\frac{d\psi_i}{dt} + R'_{ik} i^k + \frac{1}{C_{ii}} \int i^i dt = u_i,$$

в которой индекс i меняет свои значения от 1 до n . Величины R'_{ik} , входящие в это уравнение, можно представить в виде следующей таблицы:

$$R'_{ik} = \begin{pmatrix} R'_{ik} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R'_{ik} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R'_{ik} \end{pmatrix}.$$

Если i_k и ψ_i - векторы по определению, то R'_{ik} - тензор (объект, линейно преобразующий элементы i -ого линейного пространства в $(i+1)$ -ое ранга 2 (согласно обратному тензорному признаку).

Однако, производные:

$$\frac{d\psi_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

не являются компонентами тензора R'_{ik} . Поэтому уравнение:

$$\frac{d\psi_i}{dt} + R'_{ik} i^k + \frac{1}{C_{ii}} \int i^i dt = u_i, \quad (1)$$

тензорным не является. Следовательно, это уравнение неадекватно описывает процессы в электромагнитных приводах переменного тока, потому что в рассмотренной системе не учитываются процессы, связанные с вытеснением тока. В результате математическая модель оказывается линейной и потому приближенной.

Система уравнений связи потокосцеплений и токов также может быть представлена в тензорной форме [6]. Связь потокосцепления каждого контура

тензорной форме, то есть в форме, инвариантной к преобразованию координат. Такой моделью является уравнение:

$$\frac{d\psi_i}{dt} + \Omega_{ij}^k \psi_k \frac{dx^j}{dt} + R'_{ik} i^k + \frac{1}{C_{ii}} \int i^i dt = u_i,$$

в котором слагаемое:

$$\Omega_{ij}^k \psi_k \frac{dx^j}{dt},$$

учитывает эффект вытеснения тока.

В результате адекватной математической моделью может являться следующая система тензорных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_i}{dt} + \Omega_{ij}^k \psi_k \frac{dx^j}{dt} + R'_{ik} i^k + \frac{1}{C_{ii}} \int i^i dt = u_i, \\ \psi_i = L_{ik} i^k \equiv \sum_{k=1}^{k=n} L_{ik} i^k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right. \quad (2)$$

Полученная тензорная модель (2) позволяет адекватно описать нелинейные процессы, возникающие в электромагнитном приводе переменного тока [9, 10], за счет учета эффектов вытеснения тока в обмотке электромагнитного привода переменного тока и насыщения стали магнитопривода в процессе намагничивания.

Литература

1. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. — М.: Высшая школа, 1983. — 463 с.
2. Boldea I. Linear Electric Machines, Drives, and MAGLEVs Handbook. // Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. — pp. 23-26.
3. Сапогин В. Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.В., Манжула В.Г. Погонная индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной

плотностью тока в сложных функциональных блоках. // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 1). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4t1y2012/1264

4. Петухов С. В., Кришьянис М.В. Электропривод: Учебное пособие. // Архангельск: С(А)ФУ, 2015. – 303 с.

5. Zhao T., Wang G., Bhattacharya S., Huang A. Q. Voltage and Power Balance Control for a Cascaded H-Bridge Converter-Based Solid-State Transformer. // IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 28, no. 4, 2013. pp. 1523-1532.

6. Вильчевская Е.Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ: учеб. пособие // СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 46 с.

7. Чернышев А.Ю., Дементьев Ю.Н., Чернышев И.А. Электропривод переменного тока: учебное пособие // Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 213 с.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

9. Shaikhutdinov D.V., Lankin A.M., Narakidze N.D., Grechikhin V.V., Shirokov K.M., Gorbatenko N.I. Complex predict fault diagnostics of electromagnetic actuators based on the principle component analyses // Research Journal of Applied Sciences. 2015. T. 10. № 10. pp. 555-557.

10. Gorbatenko N. I., Lankin A. M., Lankin M. V., Shayhutdinov D. V. Deter-mination Of Weber-Ampere Characteristic For Electrical Devices Based On The Solution Of Harmonic Balance Inverse Problem // International Journal of Applied Engineering Research. Volume 10, Number 3 (2015) pp. 6509-6519.

References

1. Matveev A. N. Jelektrichestvo i magnetism [Electricity and magnetism]. М.: Vysshaja shkola, 1983. 463 p.



2. Boldea I. Linear Electric Machines, Drives, and MAGLEVs Handbook. Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. pp. 23-26.
3. Sapogin V. G., Prokopenko N.N., Marchuk V.V., Manzhula V.G. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4t1y2012/1264 .
4. Petuhov S. V., Krish'janis M.V. Jelektroprivod: Uchebnoe posobie [Electric drive: a textbook]. Arhangel'sk: S (A) FU, 2015. 303 p.
5. Zhao T., Wang G., Bhattacharya S., Huang A.Q. IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 28, no. 4, 2013. pp. 1523-1532.
6. Vil'chevskaja E.N. Tenzornaja algebra i tenzornyj analiz: ucheb. posobie [Tensor algebra and tensor analysis: a textbook.]. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2012. 46 p.
7. Chernyshev A.Ju., Dement'ev Ju.N., Chernyshev I.A. Jelektroprivod peremennogo toka: uchebnoe posobie [AC electric drive: a textbook]. Tomskij politehnicheskij universitet. Tomsk: Izd-vo Tomskogo politehnicheskogo universiteta, 2011. 213 p.
8. Landau L. D., Lifshic E. M. Teorija polja [Field theory.]. Izdanie 7-e, ispravlennoe. M.: Nauka, 1988. 512 p.
9. Shaikhutdinov D.V., Lankin A.M., Narakidze N.D., Grechikhin V.V., Shirokov K.M., Gorbatenko N.I. Research Journal of Applied Sciences. 2015. T. 10. № 10. pp. 555-557.
10. Gorbatenko N. I., Lankin A. M., Lankin M. V., Shayhutdinov D. V. International Journal of Applied Engineering Research. Volume 10, Number 3 (2015) pp. 6509-6519.