Решение задач в постановке нелинейной наследственности

Ю.Ш. Чубка, В.С. Тюрина, Л.Н. Панасюк

Академия строительства и архитектуры ФГБОУ ВПО "Донской государственный технический университет"

Аннотация: В статье рассмотрены прямая и альтернативная формы гипотез нелинейной наследственности. Определена связь между ядрами получения и релаксации прямой и альтернативной формулировок. Рассмотрен алгоритм решения задачи малых упруго-пластических деформаций с учётом наследственности материала методом конечных элементов.

Ключевые слова: нелинейная наследственность, интеграл, функционал, ядро ползучести, теория упругости, деформирование, релаксация, ползучесть, напряжение, метод конечных элементов.

В одномерной нелинейной наследственной теории упругости используется представление нелинейного функционала в виде ряда кратных интегралов Фреше [1]. В соответствии с предложением Ю.Н. Работнова [2-4] в представлении нелинейного функционала Фреше каждое ядро определяется как произведение одинаковых функций от ”k” различных аргументов.

С учетом обозначений (1) уравнение записано как (2).

$$\tilde{\sigma} = J_0 * d\sigma = \int_0^t J_0(t-\theta)d\sigma(\theta) = (1+L^*)\sigma \qquad (1)$$

$$\varepsilon = a_1\tilde{\sigma} + a_2\tilde{\sigma}^2 + a_3\tilde{\sigma}^3 \qquad (2)$$

В предложении о сходимости ряда (2) из его обращения следует (3).

$$\tilde{\sigma} = (1+L^*)\sigma = \phi(\varepsilon) \qquad (3)$$

В (3) ε, α – деформации и напряжения одномерной теории наследственности; $L*$ - интегральный оператор Вольтерры; операция $L*\alpha$ обозначает свертку двух функций L и σ, где L – ядро ползучести. Зависимость (3) при $t=0$ совпадает с формой физического закона одномерной нелинейной теории упругости, поэтому $\varphi(\varepsilon)$ определяет мгновенную диаграмму деформирования. В частном случае одномерной вязкоупругости уравнение (3) описывает закон прямой пропорциональности $\tilde{\sigma} = E_0\varepsilon$. При $L\equiv 0$ имеем закон одномерной нелинейной теории упругости $\sigma = \varphi(\varepsilon)$. Зависимость (3) можно переписать (4).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}_c}, \text{ где } \tilde{E}_C = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon} \tag{4}$$

Известна альтернативная форма записи закона наследственной упругопластичности [5,6]. При этом напряжения представлены в виде ряда Фреше (5).

$$\sigma = \int_0^t R_1(t-\theta_1)d\varepsilon(\theta_1) + \int_0^t \int_0^t R_2(t-\theta_1, t-\theta_2)d\varepsilon(\theta_1)d\varepsilon(\theta_2) + \ldots \tag{5}$$

Так же, как и ранее, предполагается выполнение гипотезы Ю.Н. Работнова – (6).

$$K_k(t-\theta_1, t-\theta_2, \ldots t-\theta_k) = b_k \prod_{\varepsilon=1}^{k} K_0(t-\theta_s) \tag{6}$$

С учетом обозначений (7) физические соотношения записаны в виде (8); их обращение дает (9).

$$\hat{\varepsilon} = R_0 * d\sigma = \int_0^t R_0(t-\theta)d(\theta) = (1-R^*)\varepsilon \tag{7}$$

$$\sigma = b_1\hat{\varepsilon} + b_2\hat{\varepsilon}^2 + \ldots \tag{8}$$

$$\hat{\varepsilon} = (1-R^*)\varepsilon = f(\sigma) \tag{9}$$

В (3) *R* – ядро релаксации, – модифицированная деформация, а *f(σ)* определяет мгновенную диаграмму деформирования. В силу чего функции *f* и *φ* – взаимообратимы, т.к. при *t=0* выполняются следующие равенства, определяющие одну и ту же мгновенную диаграмму деформирования: $\varepsilon = f(\sigma)$, $\sigma = \varphi(\varepsilon)$. Аналогично переходу от (3) к (4) выполним переход от (9) к (10).

$$\sigma = \hat{E}_c\hat{\varepsilon}, \text{ где } \hat{E}_c = \frac{\sigma}{\hat{\varepsilon}} \tag{10}$$

Итак, (3-4) определяют прямую Ю.Н. Работнова, а (9-10) альтернативную формы записи закона наследственной одномерной нелинейной теории упругости. Далее ядро L будем записывать с индексом единица (L1), чтобы подчеркнуть прямую форму закона, а ядро R с индексом два (R2) – альтернативная форма.

Установим взаимосвязь между ядрами ползучести и релаксации нелинейной наследственной теории упругости.

Обратим физическую зависимость в (9): $\sigma = \varphi(\ddot{\varepsilon})$. Умножив последнее равенство на $(1+L_1^*)$ в операторном смысле, получим (11).

$$\tilde{\sigma} = (1 + L_1^*)\phi(\hat{\varepsilon}) \tag{11}$$

Из сопоставления (11) и (3) следует, что операторы $(1+L_1^*)$ и $(1\text{-}R_2^*)$ могут быть резольветными только в том случае, если функции φ и f линейны. Далее устанавливается связь между ядрами ползучести и релаксации в прямой и альтернативной формулировках.

Введем вспомогательные операторы [7]: R_1 и L_2 такие, что выполняется попарно взаимная резольвентность операторов $(1+L_1^*)$ ˜ $(1\text{-}R_1^*)$ и $(1+L_2^*)$ ˜ $(1\text{-}R_2^*)$. Тогда имеем две формы записи закона нелинейной наследственной одномерной упругости (12).

Проведем простейший опыт на ползучесть σ = *const*. Рассматривая прямую и альтернативную форму уравнений (12), получим (13).

Аналогично из опыта на релаксацию (ε = *const*) имеем (14).

$$\begin{cases} \text{ПРЯМАЯ ФОРМА} \\ \text{Уравнение ползучести}: \quad \phi(\varepsilon) = \tilde{\sigma} = (1 + L_1^*)\sigma = \sigma + \int_0^t L_1(t-\theta)\sigma(\theta)d\theta \\ \text{или } \varepsilon = f\left[\left(1 + L_1^*\right)\sigma\right] = f(\tilde{\sigma}) \\ \text{Уравнение релаксации}: \quad \sigma = (1 - R_1^*)\phi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) - \int_0^t R_1(t-\theta)\phi(\varepsilon(\theta))d\theta \\ \text{АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМА}: \\ \text{Уравнение ползучести}: \quad \varepsilon = (1 + L_2^*)f(\sigma) = f(\sigma) + \int_0^t L_1(t-\theta)f(\theta)d\theta \\ \text{Уравнение релаксации}: \quad f(\sigma) = \hat{\varepsilon} = (1 - R_2^*)\varepsilon = \varepsilon - \int_0^t R_2(t-0)\varepsilon(\theta)d\theta \\ \text{или } \sigma = \phi\left[\left(1 - R_2^*\right)\varepsilon\right] = \phi(\tilde{\varepsilon}) \end{cases} \tag{12}$$

$$L_1 = \frac{E_K}{\sigma}\dot{\varepsilon},\ L_2 = \frac{E_C}{\sigma}\dot{\varepsilon}, \tag{13}$$

$$R_1 = \frac{1}{E_C \varepsilon}\dot{\sigma},\ R_2 = \frac{1}{E_K \varepsilon}\dot{\sigma}, \tag{14}$$

Входящие в (13) и (14) секущий и касательный модули определяются согласно мгновенной диаграмме деформирования в зависимости от величины постоянного напряжения или деформации. Зависимости (13) и (14) позволяют по результатам одной серии экспериментов определить характеристики аппроксимаций, применяемых в экспериментах другого типа. Пусть, например, из опыта на ползучесть определено ядро L_2. Тогда три других ядра определятся через L_2 согласно. Так, $L_1 = \frac{E_K}{E_C} L_2$, а ядра R_1 и R_2 определяются решением операторных уравнений, определяющих условие резольвентности ядер ползучести и релаксации: $R_1 \sim L_1$, $R_2 \sim L_2$. Очевидно, что в линейных задачах секущий и касательный модуль равны начальному, и тогда $L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$.

На основе приведенных зависимостей для одномерного случая можно построить определяющие уравнения нелинейной ползучести для сложного напряженного состояния. В работе рассмотрен частный случай построения теории малых упругопластических деформаций наследственного типа.

Приняты следующие гипотезы (запись ведется в прямой и альтернативной формулировках):

1) среда изотропна

2) материал вязкопластически несжимаем, т.е. объемная деформация является чисто упругой

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K_0}, K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\mu_0)}, \sigma_0 = 3K_0\varepsilon_0 \tag{15}$$

3) девиаторы деформаций и наследственных напряжений подобны и коаксильны (для прямой формулировки) или девиаторы напряжений и

наследственных деформаций подобны и коаксильны (для альтернативной формулировки), откуда следует (16) [5].

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_0 + \frac{\tilde{S}_{ij}}{2\hat{G}_c} \text{ — прямая}$$
$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} 3K_0\varepsilon_0 + 2\hat{G}_c\hat{e}_{ij} \text{ - альтернативная} \tag{16}$$

Частными случаями (16) при $L \equiv 0$ являются уравнения теории малых упругопластических деформаций. Если рассматривать линейную задачу, то из (16) следуют уравнения линейной вязкоупругости [8].

Полная система (17) уравнений теории малых упругопластических деформаций содержит уравнения равновесия, геометрические и физические зависимости, статические и кинематические граничные условия.

$$\begin{cases} A^T\sigma + p = 0, & \in V, \\ \hat{\varepsilon} = A\hat{u}, & \in V, \\ \sigma = \hat{D}_c\hat{\varepsilon}, & \in V, \\ A_S\sigma^T - g_s = 0, & \in S_1, \\ \hat{u} - \hat{u}_s = 0, & \in S_S \end{cases} \tag{17}$$

В (17) с учетом того, что $K_0 = \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\hat{\varepsilon}_0}{\hat{\varepsilon}_0} = \hat{K}_0\dfrac{\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}$, матрица физических зависимостей записана как (18).

$$\hat{D}_c = \begin{bmatrix} \hat{K}_0 + \frac{4}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & 0 & 0 & 0 \\ \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 + \frac{4}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & 0 & 0 & 0 \\ \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 - \frac{2}{3}\hat{G}_C & \hat{K}_0 + \frac{4}{3}\hat{G}_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{G}_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G}_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G}_C \end{bmatrix} \tag{18}$$

Исключив в (17) напряжения и деформации, система уравнений в перемещениях записана как (19).

$$\begin{cases} A^T \hat{D}_C \overline{A}\hat{u} + p = 0, \in V, \\ A_S^T \hat{D}_C \overline{A}\hat{u} - g_S = 0, \in S_1, \\ \hat{u} - \hat{u}_S = 0, \in S_2 \end{cases} \qquad (19)$$

Если принять гипотезу о том, что напряжения и модифицированные деформации связаны зависимостями потенциального типа, т.е. что существует U такая, что $\sigma = \dfrac{dU}{d\hat{\varepsilon}}$, то можно построить вариационное уравнение (20), для которого уравнениями Эйлера являются уравнения равновесия и статические граничные условия в (19), если функция модифицированных перемещений удовлетворяет кинематическим граничным условиям, а вектор-функции $\hat{\varepsilon}$ и σ удовлетворяют геометрическим и физическим зависимостям.

$$\Pi = \int_V U dv - \int_V \hat{u}^T p dv - \int_{S_1} \hat{u}^T q_S ds \qquad (20)$$

Функционал (20) не является квадратичным, поэтому здесь нельзя использовать традиционные методы решения задач линейной наследственности.

Точка стационарности (20) определяется аналогично обобщенному методу упругих решений [5]. В окрестности значений перемещений $\hat{u}(t^n) = \hat{u}^n$ функционал (20) разлагается в ряд Тейлора с удержанием только членов не выше второй степени (1.31).

$$\Pi \approx \Pi = \int_{(V)} \left[U^n + (U')^n + \frac{1}{2}\Delta\hat{\varepsilon}^T H^n \Delta\hat{\varepsilon} \right] dV - \int_{(V)} \hat{u}^T p dv - \int_{(S_1)} \hat{u}^T g_S ds \qquad (21)$$

В (21) использованы обозначения (22).

$$U' = \frac{dU}{d\hat{\varepsilon}} = \sigma^T = \varepsilon^{\hat{T}} \hat{D},$$

$$H=\frac{d^2U}{d\hat{\varepsilon}^2}=\frac{d\sigma^T}{d\hat{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\sigma_x}{\partial\hat{\varepsilon}_x} & \cdots & \frac{\partial\sigma_x}{\partial\gamma_{yz}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial\hat{\varepsilon}_x} & \cdots & \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial\gamma_{yz}}\end{bmatrix} \qquad (22)$$

Так, например, первый элемент матрицы H определяется так: $\frac{\partial\sigma_x}{\partial\hat{\varepsilon}_x}=\left(\hat{K}_K+\frac{4}{3}\hat{G}_C\right)+\frac{4}{3}\frac{\hat{e}_x^2}{\hat{\varepsilon}_i^2}\left(\hat{G}_K-\hat{G}_C\right)$.

Напряжения в окрестности точки u^nможно вычислить по соответствующему приближению функции U – (23).

$$U\approx U^n+\left(\hat{\varepsilon}^n\right)^T\hat{D}^n+0.5\Delta\hat{\varepsilon}^T H\Delta\hat{\varepsilon},$$

$$\sigma=\left(\frac{dU}{d\hat{\varepsilon}}\right)^T\approx\hat{D}^n\hat{\varepsilon}^n+H^n\Delta\hat{\varepsilon}=\sigma^n+H^n\Delta\hat{\varepsilon} \qquad (23)$$

Приближенное вариационное уравнение, порождаемое квадратичной аппроксимацией (21), записано в виде (24).

$$\delta\Pi=\int\limits_{(V)}\delta\hat{\varepsilon}^T\left(\sigma^n+H^n\Delta\hat{\varepsilon}\right)dv-\int\limits_{(V)}\delta\hat{u}^T p\,dv-\int\limits_{(S_1)}\delta\hat{u}^T g_S\,ds=0 \qquad (24)$$

Для функционала (24) уравнениями Эйлера являются уравнения равновесия в приращениях $A^T H^n A\Delta\hat{u}=-p-A^T\hat{D}_c^n A\hat{u}^n,\in v$.

Решение вариационного уравнения (24) можно проводить методом конечных элементов (далее МКЭ), если провести независимые аппроксимации основных вектор-функций в (24) по пространственным и временным координатам [9, 10].

Пространственная область разбивается на сетку конечных элементов и на каждом из них вектор-функция модифицированных перемещений представляется в виде (25).

$$\hat{u}=\phi^T\hat{q},\in V_{ЭЛ} \qquad (25)$$

В (25) $\hat{q}$- вектор узловых модифицированных перемещений, ϕ^T- матрица координатных функций конечного элемента. Тогда модифицированные деформации выразим через модифицированные перемещения узлов конечного элемента (26).

$$\hat{\varepsilon} = A\phi^T \hat{q} = \Phi\hat{q} \qquad (26)$$

После подстановки (25), (26) в (24) в силу произвольности $\delta, \hat{q}$ следует (27)

$$\hat{k}_K^n \Delta\hat{q} = p - \hat{k}_c^n \hat{q}^n,$$

где $\hat{k}_k = \int\limits_{(V)} \Phi^T H\Phi dV$ - наследственная касательная матрица жесткости,

$$\hat{k}_c^n = \int\limits_{(V)} \Phi^T \hat{D}_C \Phi dV \text{ - наследственная} \qquad (27)$$

секущая матрица жесткости,

$p = \int\limits_{(V)} \phi\rho dv + \int\limits_{(S_1)} \phi g_S ds$ - вектор узловых сил

Если сооружение выполнено из однородно ползучего материала, то в этом случае уравнения (27) можно трактовать как уравнения обобщенного шагового метода, и решение задачи существенно упрощается. Алгоритм задачи однородной ползучести решения приведен в [7, 11]. Рассмотрим более сложный случай использования в системе элементов с разными ядрами ползучести, т.е. задачу неоднородной ползучести. Предполагаем, что сетка конечных элементов построена так, что материал одного конечного элемента является однородно ползучим. Тогда можно представить основное соотношение МКЭ (27) в виде (28).

$$k_K^{m-1}(1 - R^*)\Delta q^m = \Delta p^m, \in V_{ЭЛ} \qquad (28)$$

Интеграл $R^{*}\Delta q^{m}$ с помощью формулы трапеций приближенно представим в виде (29). При этом временная ось к моменту t разбита на m интервалов – $t = m\Delta t$.

$$R*\Delta q^{m} = \int_{0}^{t} R(t-\theta)\Delta q(\theta)d\theta = R(m\Delta t)\Delta q(0)\frac{\Delta t}{2} + \Delta t\sum_{n=2}^{m-1} R(m\Delta t - n\Delta t)\Delta q(n\Delta t) + R(0)\Delta q(m\Delta t) \tag{29}$$

С учетом (29) уравнения равновесия (28) аппроксимируются как (30).

$$\left(1-\frac{\Delta t}{2}R(0)\right)\hat{k}_{K}^{m-1}\Delta q^{m} = \Delta p^{m} + \frac{\Delta t}{2}R(m\Delta q)\hat{k}_{K}^{m-1}\Delta q^{1} + \Delta t\hat{k}_{K}^{m-1}\sum_{m=2}^{m-1} R\big((m-n)\Delta t\big)\Delta q^{m} \tag{30}$$

Введем обозначение (31).

$$\begin{cases} (1-\dfrac{\Delta t}{2}R(0))\hat{k}_{k}^{n-1} = \hat{k}_{k}^{n-1,1} \\ \dfrac{\Delta t}{2}R(n\Delta t)\hat{k}_{k}^{n-1} = \hat{k}_{k}^{n-1,1} \\ \Delta t R((m-n)\Delta t)\hat{k}_{k}^{n-1} = \hat{k}_{k}^{n-1,m-n} \end{cases} \tag{31}$$

С учетом принятых обозначений уравнения равновесия для ансамбля конечных элементов приведены в виде (32).

$$\hat{K}_{k}^{n-1,n}\Delta q^{n} = \Delta P^{n} + \hat{K}_{k}^{n-1,n}\Delta q^{1} + \sum_{m=2}^{m-1}\hat{K}_{k}^{n-1,m-n}\Delta q^{n} \tag{32}$$

В (32) глобальные матрицы жесткости $\hat{K}_{k}^{n-1,1}$ строятся традиционными способами по матрицам жесткости отдельных конечных элементов уравнения (32) определяют следующий итерационный алгоритм.

1. Вначале определяются мгновенные компоненты НДС, относящиеся к моменту $t=0$. Вообще-то говоря, эти компоненты развиваются за конечный временной отрезок, но т.к. рассматриваемое время несоизмеримо больше, то время роста нагрузки условно принимается нулевым.

   Считается, что на малом отрезке вязкие свойства системы не проявляются и поэтому решается стационарная задача.

2. На втором шаге определяются компоненты матриц жесткости $\hat{k}_K, \hat{k}_C$ всех конечных элементов системы. Для чего вычисляются модифицированные деформации, напряжения, модули для $t = \Delta t$. Если при интегрировании по пространственной области используются квадратурные формулы, то все указанные величины вычисляются в расчетных узлах. По локальным матрицам формируется общая система уравнений МКЭ и решается задача (32), в результате чего находится вектор приращения модифицированных перемещений $\Delta\hat{q}^2$. После чего расчет вновь повторяется со второго пункта до тех пор, пока не достигнем верхней границы временного отрезка, в пределах которого исследуется поведение сооружения. Контроль точности временной аппроксимации проводится при сгущении сетки временных конечных элементов (т.е. уменьшением Δt) до стабилизации решения.

В процессе нагружения сооружения, а также в процессе рассмотрения истории ее существования, возможно возникновение зон “разгрузки”. Активный и пассивный процесс деформирования в теории малых упругопластических деформаций различаем по знаку приращения интенсивности модифицированных деформаций: если $\Delta\hat{\varepsilon}_i > 0$, то в точке расчетной области происходит процесс активного деформирования. Разгрузка имеет место при $\Delta\hat{\varepsilon}_i \leq 0$. Согласно положению теории неупругонаследственных сред Ю.Н. Работнова полагаем, что при разгрузке зависимость между напряжениями и деформациями является линейной вязкоупругой. Тогда физические зависимости при разгрузке примут вид (33).

$$\Delta\sigma = \hat{D}_0 \Delta\hat{\varepsilon} \qquad (33)$$

Литература

1. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. Dover Phoenix Editions, 1959. – 304 p.

2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.- 383 с.

3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 650 с.

4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1968. – 752 с.

5. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н., Селим Ш.И. Деформационная теория пластичности наследственного типа.- Ростов н/Д.: РИСИ, 1991.- 18 с. //Деп. В ВИНИТИ N 3792-В91

6. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н., Рогачкин П.Л. Вариационные постановки задач наследственной теории течения с изотропным упрочнением //Вычислительная механика и моделирование работы конструкций и сооружений. – Ростов н/Д.: РГАС, 1992. -6 с.

7. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н., А.А.Аль-Тахиш. Определение предельных нагрузок для неоднородных вязкоупругопластических рам. – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1993.- 21 с.- Деп. в ВИНИТИ N 1169-В93.

8. Александров А.Ф., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990.-400 с.

9. Batht K.-J. Finite Element Procedures. K.-J. Batht .New Jersey: Prentice Hall, 1996. pp. 10-12.

10. Кадомцев М.И. Исследование деформирования частично заглубленного фундамента при гармоническом воздействии с использованием метода граничных элементов и метода конечных элементов // Инженерный вестник Дона, 2012, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/940.

11. Зотова Е. В., Панасюк Л. Н. Численное моделирование динамических систем с большим числом степеней свободы на импульсные // Инженерный вестник Дона, 2012, №3 URL: ivdon.ru/magazine/ archive/n3y2012/933.

References

1. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro.Differential Equations. Dover Phoenix Edition, 1959. 304 p.

2. Rabotnov Ju.N. Jelementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel. [Elements of hereditary mechanics of solids]. M.: Nauka, 1977. 383 p

3. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. [Mechanics of deformable solid]. M.: Nauka, 1979. 650 p.

4. Rabotnov Ju.N. Polzuchest' jelementov konstrukcij. [Creep of Structural Elements]. M.: Nauka, 1968.752 p.

5. Vasil'kov G.V., Panasjuk L.N., Selim Sh.I. Deformacionnaja teorija plastichnosti nasledstvennogo tipa. [Deformation theory of hereditary type of plasticity]. Rostov n.D.: RISI, 1991.- 18 p. ..Dep. V. VINITI N 3792-V91

6. Vasil'kov G.V., Panasjuk L.N., Rogachkin P.L. Variacionnye postanovki zadach nasledstvennoj teorii techenija s izotropnym uprochneniem.Vychislitel'naja mehanika i modelirovanie raboty konstrukcij i sooruzhenij. [Variation tasking hereditary flow theory with isotropic hardening. Computational mechanics and modeling of structures and buildings]. Rostov n.D.: RGAS, 1992. 6 p.

7. Vasil'kov G.V., Panasjuk L.N., A.A.Al'-Tahish. Opredelenie predel'nyh nagruzok dlja neodnorodnyh vjazkouprugoplasticheskih ram. [Determination of limit loads for non-uniform frames viscoelasticoplastic]. Rostov.na.Donu: RISI, 1993. 21 p. Dep. v VINITI N 1169.V.93.

8. Aleksandrov A.F., Potapov V.D. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. M.: Vysshaja shkola, 1990. 400 p.

9. Batht K.J. Finite Element Procedures. K.J. Baths. New Jersey: Prentice Hall, 1996. pp. 10.12.

10. Kadomtsev M.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/940.

11. Zotova E. V., Panasyuk L. N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №3 URL: ivdon.ru/magazine/ archive/n3y2012/933/