

Анализ вычислительной эффективности матричных уравнений движения систем твёрдых тел со структурой дерева в гамильтоновых переменных

В.Н. Иванов, В.А. Шимановский

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация: Рассматриваются методы компьютерного формирования уравнений движения систем абсолютно твёрдых тел древовидной структуры и алгоритмы приведения их к нормальной форме обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения движения выписываются с использованием формализма Гамильтона относительно расширенного набора переменных состояния механической системы. Уравнения представлены в наглядной матричной форме. Выписаны рекуррентные формулы для определения всех коэффициентов уравнений. Представлены алгоритмы редукции этих уравнений к уравнениям Гамильтона в обобщенных координатах и обобщенных импульсах. Приводится алгоритм решения полученных уравнений движения систем твердых тел, использующий L^TDL -разложение. Выписаны формулы, позволяющие вычислить объем арифметических операций, требуемых для приведения уравнений движения к нормальной форме с помощью рассмотренных алгоритмов. На основе этих формул проведен сравнительный анализ эффективности алгоритмов для систем твердых тел различной структуры и с различными типами связей между телами. Результаты анализа представлены в виде диаграмм. На диаграммах выделены области, в которых проявляется преимущество того или иного метода в зависимости от типа механической системы.

Ключевые слова: система твёрдых тел, уравнения движения, динамика, обобщённые импульсы, математическое моделирование, вычислительная эффективность.

Введение

В настоящее время на стадии проектирования новых изделий машиностроения для проверки принимаемых конструктивных решений широко используется компьютерное моделирование. Математические модели в виде системы твёрдых тел (СТТ) применяются в таких отраслях, как робототехника, биомеханика, автомобилестроение, аэрокосмическая промышленность [1,2]. Постоянно растущая сложность исследуемых систем, потребность в быстрых расчётах для сокращения сроков проведения опытно-конструкторских работ, требуют всё более эффективных методов моделирования СТТ.

Эффективность компьютерного моделирования СТТ зависит от вычислительной сложности алгоритмов формирования уравнений движения СТТ и методов их численного интегрирования. Существуют различные подходы к составлению уравнений движения (УД). Прежде всего, это подход, основанный на уравнениях Ньютона-Эйлера. При таком подходе строится расширенная система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) относительно декартовых ускорений (квазиускорений), ускорений обобщенных координат и реакций связей. К этой системе ДАУ либо применяются различные методы «прогонки» для её разрешения относительно ускорений и реакций связей с последующим интегрированием ускорений, либо разрабатываются специальные методы прямого интегрирования [3 – 5].

Другой подход (метод Эйлера-Лагранжа) заключается в проецировании уравнений Ньютона-Эйлера на касательные и ортогональные подпространства виртуальных движений тел системы. При проектировании в касательное подпространство УД получаются в форме Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах. При проектировании в ортогональное подпространство получаются уравнения в форме Лагранжа 1-го рода относительно множителей Лагранжа, квазиускорений и обобщенных ускорений. Работы, в которых рассматриваются методы этой группы, отличаются друг от друга степенью детализации алгоритмов построения УД применительно к различным системам твердых тел и подходами к решению возникающих ДАУ [5,6].

Важным аспектом является набор параметров, относительно которых составляются УД СТТ. Составление УД с использованием минимального числа параметров (например, обобщенных координат, как в уравнениях Лагранжа 2-го рода) приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), для которых существуют стандартные эффективные методы интегрирования. Но для вычисления коэффициентов таких

уравнений и приведения их к нормальной форме требуется приложить значительные вычислительные затраты. С другой стороны, если для описания динамики СТТ использовать расширенный набор параметров (например, как в подходе Ньютона-Эйлера), то УД СТТ составляются гораздо легче. Однако, в этом случае получается система ДАУ, интегрирование которой является более сложной задачей, чем интегрирование ОДУ.

Применение других форм УД (например, уравнений Гиббса-Аппеля, принципа Гаусса или уравнений Гамильтона) к моделированию СТТ в настоящее время разработано не так основательно, как в рассмотренных выше подходах Ньютона-Эйлера и Эйлера-Лагранжа. В первую очередь, это касается возможности использования уравнений Гамильтона [7]. Эти уравнения лучше ведут себя при численном интегрировании, что приводит к большей точности и устойчивости численного решения. Однако алгоритмизация компьютерного формирования уравнений Гамильтона для СТТ еще не завершена.

В этой статье делается шаг в продвижении использования формализма Гамильтона для исследования динамики СТТ. В данной работе представлены УД СТТ с разомкнутыми кинематическими цепями (древовидной структуры) с использованием квазискоростей, обобщенных координат, обобщенных и декартовых импульсов. Показано, что при проектировании на касательное и ортогональное подпространства виртуальных движений эти уравнения приводят к уравнениям Гамильтона. Кроме того, представлен алгоритм, позволяющий приводить полученную расширенную систему уравнений к нормальной форме ОДУ без непосредственного формирования уравнений Гамильтона. Проведён анализ вычислительной сложности предлагаемых методов для компьютерного моделирования различных классов механических систем.

Построение уравнений движения в гамильтоновых переменных

Рассмотрим систему абсолютно твёрдых тел со структурой дерева. Пусть N – число тел в системе. Тогда соединений между телами (шарниров) также будет N . Предположим, что кинематические связи, реализованные в шарнирах, являются голономными и идеальными. Пронумеруем тела и шарниры системы таким образом, чтобы для любого тела в графе системы номер предшествующего ему (родительского) тела был меньше, а шарниру, связывающему i -е тело с предшествующим, присвоим номер i .

В качестве обобщённых координат системы примем совокупность обобщённых параметров $q_i \in R^{n_i}$ ($i = 1, \dots, N$), задающих положение соседних тел в шарнире с номером i , $q = \text{col}(q_1, \dots, q_N)$.

В произвольной точке O_i тела i определим вектор

$$V_i = \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix},$$

который назовём декартовой скоростью тела, где $v_i \in R^3$ и $\omega_i \in R^3$ – векторы поступательной и угловой скорости тела в проекциях на оси связанной с телом системы координат. Наличие кинематических связей в шарнирах накладывает ограничения на скорости смежных тел в виде

$$V_i - C_i V_{k_i} = A_i \dot{q}_i + V_i^J \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1)$$

где k_i – номер родительского тела для i -го; $A_i \in R^{6 \times n_i}$ – матрица локального касательного базиса относительного движения в i -м шарнире, $V_i^J \in R^6$ – скорость дрейфа в шарнире (эта скорость отлична от нуля только в случае реономных связей); C_i – матрица сдвига и вращения, которая является удобным инструментом для преобразования шестимерных векторов скорости, импульса и силы к другим пространственным точкам и системам координат. Если ρ_i – вектор координат точки O_i в системе координат родительского тела, G_i – матрица направляющих косинусов между системами

координат родительского и дочернего тел, то матрица сдвига и вращения принимает вид

$$C_i = \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее оператор « \sim » преобразует вектор в кососимметрическую матрицу, которая при умножении на другой вектор может быть интерпретирована как векторное произведение этих векторов.

Совокупность уравнений (1) можно кратко записать в виде:

$$SV = A\dot{q} + V^J, \quad (2)$$

где $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N)$, $V^J = \text{col}(V_1^J, \dots, V_N^J)$, $V = \text{col}(V_1, \dots, V_N)$, $S \in R^{6N \times 6N}$ – нижняя треугольная блочная матрица, в каждой i -ой строке которой (кроме первой) только два ненулевых блока: единичная матрица на главной диагонали и матрица сдвига и вращения C_i со знаком минус в столбце, соответствующему родительскому телу. Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре СТТ, так и об относительном положении тел в системе, то её с полным правом можно называть матрицей кинематической структуры.

Из уравнения (2) выразим вектор декартовых скоростей СТТ как

$$V = T(A\dot{q} + V^J) = B\dot{q} + \beta, \quad (3)$$

где $T = S^{-1}$ – нижняя треугольная блочная матрица на главной диагонали которой расположены единичные матрицы, а блочный элемент, расположенный в i -ой строке и j -ом столбце, является либо нулевой матрицей, если i -е тело не потомок j -го, либо матрицей сдвига и вращения из системы координат j -го тела в систему координат i -го. Блочные элементы матрицы T могут быть вычислены по рекуррентным формулам [8]. Столбцы матрицы $B = TA$ из формулы (3) являются линейно независимыми $6N$ -мерными векторами, касательными к многообразию возможных

перемещений СТТ [9]. Поэтому матрицу B называют матрицей касательного локального базиса системы.

Декартовым импульсом i -го тела назовём шестимерный вектор:

$$P_i = M_i V_i,$$

где $M_i \in R^{6 \times 6}$ – матрица масс i -го тела определяется, как:

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{r}_i^c \\ m_i \tilde{r}_i^c & J_i \end{pmatrix},$$

где m_i – масса тела; r_i^c – радиус-вектор центра масс тела; J_i – тензор инерции тела. Соответственно, $6N$ -мерный вектор $P = MV$, где $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$, $P = \text{col}(P_1, \dots, P_N)$, назовём декартовым импульсом СТТ. Его представление в касательном локальном базисе B – вектор:

$$p = B^T P = A^T T^T M V \quad (4)$$

является ковариантным импульсом СТТ, соответствующим обобщённым координатам q , или просто обобщённым импульсом [9].

Запишем уравнения движения СТТ в форме Эйлера-Лагранжа:

$$M_i \dot{V}_i + \Omega_i M_i V_i = F_i + R_i - \sum_{j \in S_i} C_j^T R_j \quad (i = 1, \dots, N), \quad (5)$$

где $F_i \in R^6$ – вектор активных сил, действующих на i -е тело; $R_i \in R^6$ – вектор реакций связей в i -м шарнире; S_i – множество прямых потомков i -го тела; матрица $\Omega_i \in R^{6 \times 6}$ определяется, как:

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу кинематической структуры S и декартовый импульс P , совокупность уравнений (5) можно записать кратко в виде:

$$\dot{P} + \Omega P = F + S^T R, \quad (6)$$

где $\Omega = \text{diag}(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$, $F = \text{col}(F_1, \dots, F_N)$, $R = \text{col}(R_1, \dots, R_N)$.

Спроектируем уравнение (6) на касательное многообразие возможных перемещений СТТ:

$$B^T \dot{P} + B^T \Omega P = B^T F, \text{ или } \dot{B}^T P + B^T \dot{P} - \dot{B}^T P + B^T \Omega P = B^T F.$$

Окончательно получим:

$$\dot{p} = (\dot{B}^T - B^T \Omega)P + B^T F. \quad (7)$$

Здесь было учтено, что $\dot{B}^T P + B^T \dot{P} = \dot{p}$ и $B^T S^T R = A^T T^T S^T R = A^T R = 0$ (следует из принципа идеальности связей).

Преобразуем выражение в скобках в формуле (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{B}^T - B^T \Omega &= \dot{A}^T T^T + A^T \dot{T}^T - A^T T^T \Omega = \\ &= \dot{A}^T T^T + A^T (T^T \Omega - \Omega T^T) - A^T T^T \Omega = (\dot{A}^T - A^T \Omega) T^T. \end{aligned}$$

При выводе этой формулы использовалось правило дифференцирования матрицы кинематической структуры, полученное в работе [10]. Тогда уравнение (7) можно записать в виде:

$$\dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) P^* + Q, \quad (8)$$

где $Q = B^T F$ – вектор обобщённых сил; $P^* = T^T P$ можно называть вектором накопленных декартовых импульсов, так как его компоненты являются суммой импульса i -го тела и импульсов всех тел, для которых оно является предком. В развернутом виде компоненты P^* вычисляются по формуле:

$$P_i^* = M_i V_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T P_j^*. \quad (9)$$

Уравнения (2), (4), (8) и (9) образуют замкнутую систему $12N + 2n$ ДАУ, описывающую динамику СТТ со структурой дерева:

$$\begin{cases} MV - S^T P^* = 0, \\ -SV + A\dot{q} = -V^J, \\ A^T P^* = p, \\ \dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) P^* + Q, \end{cases} \quad (10)$$

Систему уравнений (10) условно можно разделить на две части. Её первые три уравнения образуют линейную систему относительно декартовых

скоростей V , накопленных декартовых импульсов P^* и обобщённых скоростей \dot{q} с симметричной блочно-трёхдиагональной матрицей. Ко второй части относится её последнее уравнение, которое разрешено относительно производных обобщённых импульсов \dot{p} .

Редукция уравнений движения (10) в гамильтоновых переменных

При численном моделировании необходимо УД СТГ (10) привести к нормальной форме ОДУ. В данном разделе опишем подходы к решению этой задачи, основанные на уменьшении размерности (редукции) УД СТГ.

Один из методов редукции основан на использовании касательного подпространства возможных перемещений. Для этого из системы уравнений (10) исключим декартовые скорости V и декартовые импульсы P^* . В результате получим два векторных уравнения:

$$(A^T T^T M T A) \dot{q} = p - A^T T^T M T V^J, \quad (11)$$

$$\dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) \Gamma^T M T (A \dot{q} + V^J) + Q. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) образуют замкнутую систему $2n$ ОДУ первого порядка относительно обобщённых координат и обобщённых импульсов и, по существу, являются уравнениями Гамильтона.

Другой метод редукции системы уравнений (10) связан с понятием ортогонального подпространства возможных перемещений. Пусть базис этого подпространства определяется матрицей Z , столбцы которой ортогональны столбцам матрицы A , то есть $A^T Z = 0$ и $Z^T A = 0$. Матрица Z легко вычисляется по известной матрице A , выделением линейно независимых столбцов симметричной матрицы $Z^* = E - A(A^T A)^{-1} A^T$.

Накопленный декартовый импульс P^* можно разложить по базисным векторам касательного и ортогонального подпространств:

$$P^* = A(A^T A)^{-1} p + Z\lambda, \quad (13)$$

где вектор $\lambda \in R^{6N-n}$ определяет импульсы реакций связей (множители Лагранжа на уровне скоростей) в шарнирах.

Во-первых, с помощью соотношения (13) исключим из системы (10) накопленный декартовый импульс P^* . Далее, выражаем из первого уравнения системы (10) вектор декартовых скоростей V и подставляем его во второе уравнение системы, которое проектируем на ортогональное подпространство (умножив его слева на Z^T). В результате получим

$$(Z^T S M^{-1} S^T Z) \lambda = Z^T (V^J - S M^{-1} S^T A (A^T A)^{-1} p), \quad (14)$$

$$\dot{q} = (A^T A)^{-1} (S M^{-1} S^T (A (A^T A)^{-1} p + Z \lambda) - V^J), \quad (15)$$

$$\dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) (A (A^T A)^{-1} p + Z \lambda). \quad (16)$$

Уравнения (14) – (16) образуют замкнутую систему $6N + n$ ДАУ относительно обобщённых координат, обобщённых импульсов и множителей Лагранжа, которые можно назвать уравнениями Гамильтона с множителями Лагранжа.

Таким образом, в обоих случаях редукции исходной системы ДАУ (10) задача нахождения производных для последующего интегрирования стандартными численными методами решения ОДУ сводится к задаче решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицами системы $A^T T^T M T A$ в первом случае и $Z^T S M^{-1} S^T Z$ – во втором. Обе эти матрицы симметричные и положительно определённые. Для решения уравнений (11) и (14) оптимальным будет метод $L^T D L$ -разложения, который сохраняет структуру разреженности указанных матриц.

Рекуррентный алгоритм разрешения уравнений движения (10)

УД СТГ в форме (10) можно приводить к нормальной форме ОДУ как описанными выше методами редукции, так и непосредственным решением этой системы уравнений относительно производных. Для наглядности запишем систему уравнений (10) в развёрнутом виде по телам:

$$\begin{cases} M_i V_i - P_i^* + \sum_{j \in S_i} C_j^T P_j^* = 0, \\ C_i V_{k_i} - V_i + A_i \dot{q}_i = -V_i^J, \\ A_i^T P_i^* = p_i, \\ \dot{p}_i = (\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i) P_i^* + A_i^T F_i^*, \end{cases} \quad (i=1, \dots, N), \quad (17)$$

где

$$F_i^* = F_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T F_j^*.$$

Первые три уравнения системы (17) образуют СЛАУ относительно переменных V_i , P_i^* и \dot{q}_i с симметричной блочной квазитрёхдиагональной матрицей. Заметим, что при любой кинематической структуре СТТ в каждой строке системы (17) под главной диагональю содержится только один ненулевой матричный элемент. Поэтому, для решения этой СЛАУ можно воспользоваться схемой L^TDL -разложения для блочной трёхдиагональной матрицы. Вывод рекуррентных формул этого метода описан в [11]. Здесь мы приведем окончательный алгоритм метода.

for $i = N:1$

$$F_i^* = F_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T F_j^*$$

$$M_i^* = M_i + \sum_{j \in S_i} (C_j^T M_j^* C_j - U_j^T D_j U_j)$$

$$\pi_i^* = \sum_{j \in S_i} (C_j^T (M_j^* V_j^J + \pi_j^*) - U_j^T D_j u_j)$$

$$\text{Разложить } A_i^T M_i^* A_i = L_i^T D_i L_i$$

$$\text{Решить } L_i^T D_i U_i = A_i^T M_i^* C_i$$

$$\text{Решить } L_i^T D_i u_i = p_i - A_i^T (M_i^* V_i^J + \pi_i^*) \quad (18)$$

end

for $i = 1:N$

$$\text{Решить } L_i \dot{q}_i = u_i - U_i V_{k_i}$$

$$V_i = C_i V_{k_i} + A_i \dot{q}_i + V_i^J$$

$$P_i^* = M_i^* V_i + \pi_i^*$$

$$\dot{p}_i = (\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i) P_i^* + A_i^T F_i^*$$

end

Сравнение эффективности алгоритмов моделирования СТТ

Сравнение алгоритмов моделирования динамики СТТ проведём с точки зрения объёма арифметической работы, необходимой для построения уравнений движения СТТ и приведения их к нормальной форме ОДУ на каждом шаге численного интегрирования. Объём вычислительных затрат алгоритмов будем измерять числом флопов (одна операция над числами в формате с плавающей точкой). Оценка количества флопов – это грубый подход, применяемый в случае отсутствия других инструментов к измерению эффективности программ, поскольку этот подход игнорирует затраты на индексацию, обмены с памятью и многочисленные прочие издержки, возникающие при исполнении программы на компьютере.

Сравним вычислительную трудоёмкость для трёх вариантов приведения УД СТТ (10) к нормальной форме ОДУ:

1. TSP – построение УД СТТ в виде уравнений Гамильтона (11), (12) и разрешение уравнения (11) методом разреженного L^TDL -разложения.

2. OSP – построение УД СТТ в виде уравнений Гамильтона с множителями Лагранжа (14) – (16) и разрешение уравнения (14) методом разреженного L^TDL -разложения.

3. ERA – построение УД СТТ в виде уравнений с расширенным составом переменных (10) и разрешение их по алгоритму (18).

Первые два метода разрешения УД СТТ сводятся в итоге к решению СЛАУ с различными матрицами. В зависимости от кинематической структуры СТТ эти матрицы имеют разную степень разреженности. Так, для СТТ со структурой «цепочка» (все тела, кроме последнего, имеют одного потомка) матрица $A^T T^T M T A$ будет полностью заполнена, а матрица $Z^T S M^{-1} S^T Z$ иметь ленточную структуру. И, наоборот, для СТТ со структурой «звезда» (все тела, кроме первого, являются потомками первого) матрица $Z^T S M^{-1} S^T Z$ будет плотной, а матрица $A^T T^T M T A$ иметь максимальную степень

разреженности. Заметим, что при L^TDL -разложении эти матрицы не претерпевают заполнения.

Для учёта влияния кинематической структуры СТТ на вычислительную трудоёмкость алгоритмов введём следующие коэффициенты:

$$\eta_i = \sum_{j \in W_i} n_j, \quad \tau_i = \sum_{j \in W_i} n_j, \quad \mu_i = m_i + \sum_{j \in S_i} m_j \quad (i = 1, \dots, N),$$

где n_i – число степеней свободы в i -м шарнире; m_i – число связей в i -м шарнире ($m_i = 6 - n_i$); W_i – множество номеров шарниров, составляющих путь между нулевым и i -м телами. Числа η_i равны количеству ненулевых элементов в i -ой строке блочной треугольной матрицы L при разложении матрицы $A^T T^T M T A$, а числа μ_i равны количеству ненулевых элементов в i -ой строке блочной треугольной матрицы L при разложении матрицы $Z^T S M^{-1} S^T Z$.

В таблице 1 приведены формулы, позволяющие оценить количество флопов, необходимых на каждом шаге численного интегрирования для указанных методов, в зависимости от числа тел в механической системе, её кинематической структуры и числа степеней свободы в шарнирах.

Таблица № 1

Удлинение и скорость деформации при испытании различных нитей

Метод	Количество флопов
TSP	$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \eta_i^3 + \frac{17}{2} \eta_i^2 + \frac{235}{6} \eta_i + 42 \tau_i + 147 \right) - \sum_{i=2}^N \left(\frac{1}{3} \eta_{k_i}^3 + \frac{17}{2} \eta_{k_i}^2 + \frac{235}{6} \eta_i - 397 \right)$
OSP	$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \mu_i^3 + \frac{17}{2} \mu_i^2 + \frac{421}{6} \mu_i + 11 n_i + 239 \right) - \sum_{i=2}^N \left(\frac{1}{3} m_i^3 + \frac{5}{2} m_i^2 - \frac{11}{6} m_i - 192 \right)$
ERA	$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} n_i^3 + \frac{39}{2} n_i^2 + \frac{1537}{6} n_i + 828 \right) - (6 n_1^2 + 145 n_1 + 684)$

Анализ формул в таблице 1 позволяет сделать следующие выводы.

В методе TSP оценка вычислительной трудоёмкости лежит между $O(N)$ для систем со структурой «звезда» и $O(N^3)$ для систем со структурой «цепочка». Напротив, в методе OSP количество флопов изменяется от $O(N)$ для «цепных» систем до $O(N^3)$ для «звёздных». Таким образом, метод TSP

эффективен для систем с короткими кинематическими цепями и малым числом степеней свободы в шарнирах, а метод OSP эффективен для систем с большим числом степеней свободы в шарнирах и малым числом ветвей в древовидной структуре системы. В связи с тем, что при фиксированном числе тел в механической системе условие минимизации числа ветвей означает наличие длинных цепочек тел, эти два метода дополняют друг друга.

Отрицательной особенностью методов TSP и OSP является сильная зависимость объёма арифметической работы от структуры взаимосвязей тел в системе. Вычислительная трудоёмкость метода ERA совершенно не зависит от кинематической структуры СТТ, а количество флопов на каждом шаге интегрирования для любой СТТ пропорционально числу тел в системе. Однако коэффициент пропорциональности велик, и поэтому при малом числе тел в системе количество арифметических операций в этом методе больше, чем в методах TSP и OSP.

На рис.1 представлены схемы выбора наиболее эффективного метода моделирования СТТ. Рассматриваются системы, содержащие цепочки тел одинаковой длины, закреплённые на базовом теле. На каждой диаграмме по вертикальной оси отложено количество цепей, а по горизонтальной – их длина. На диаграммах выделяются области по указанным переменным, в которых проявляется преимущество того или иного метода. Кроме того, на каждой диаграмме показаны изолинии числа тел в системе.

Из схем на рис. 1 следует, что для механических систем с малым числом степеней свободы в шарнирах и короткими кинематическими цепями метод TSP имеет наименьшие вычислительные затраты. По мере увеличения длины цепочек метод ERA начинает демонстрировать меньшие затраты, и чем больше степеней свободы в шарнирах, тем раньше это происходит. Метод OSP превосходит эти методы только в случае систем с трёх- и

четырёхстепенными шарнирами. При этом его эффективность проявляется одновременно при увеличении количества и длины цепочек в СТТ.

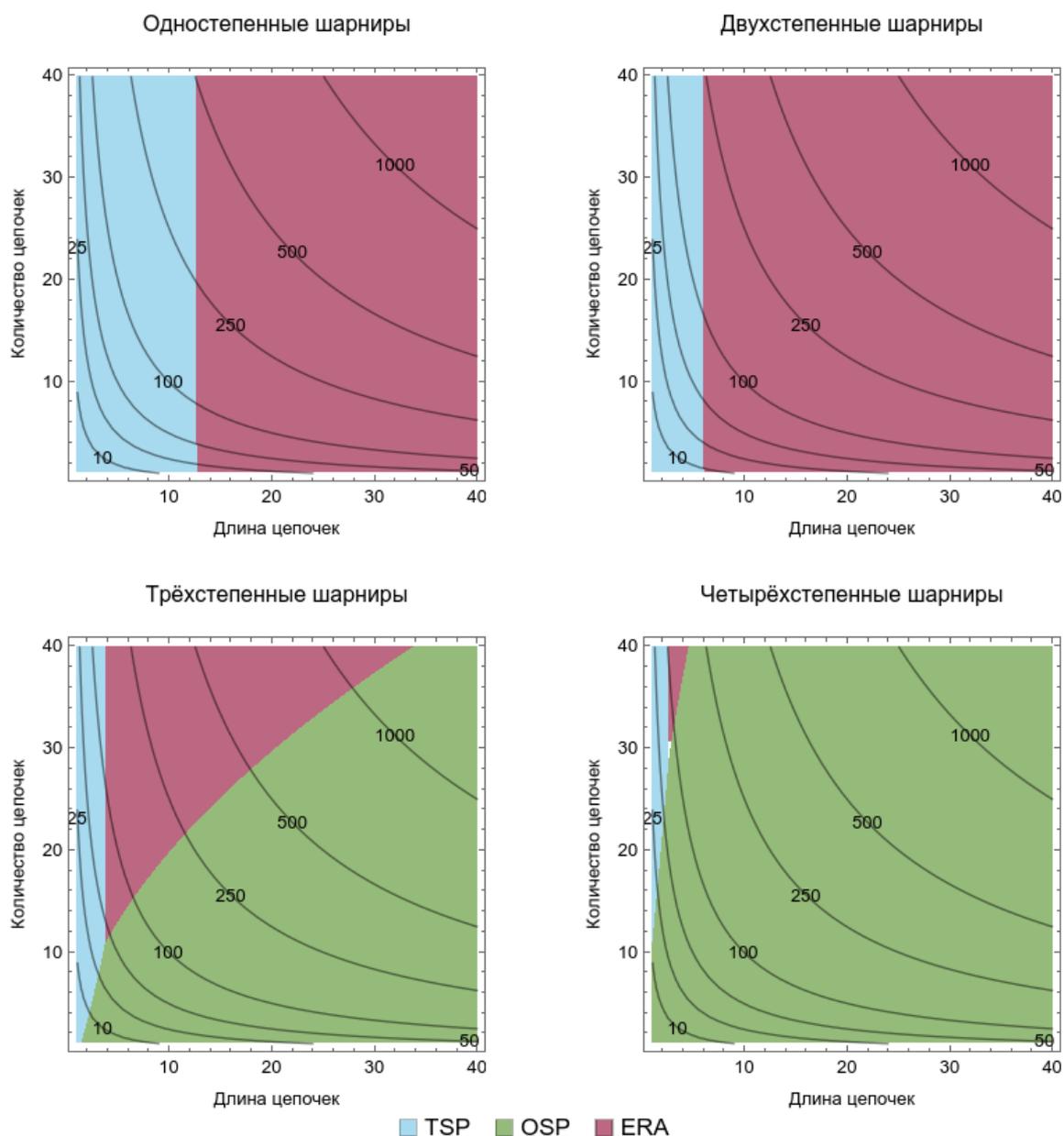


Рис. 1. – Диаграммы выбора эффективного метода моделирования

Заключение

В работе представлены уравнения движения СТТ с древовидной структурой в компактной матричной форме. Уравнения содержат декартовы и обобщённые импульсы, обобщённые координаты и квазискорости.

Записываются рекуррентные формулы для компьютерной генерации уравнений из простейших базовых матриц (блоков), описывающих структуру, масс-инерционные, геометрические и кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров) механической системы.

Группа кинематических уравнений, входящих в расширенную систему уравнений, имеет квазитрехдиагональную блочную структуру, что позволяет использовать методы «прогонки» для их решения относительно обобщенных скоростей. Рассматриваются методы редукции и методы «прогонки» для приведения этой системы уравнений к нормальной форме.

Представлены формулы, позволяющие оценить вычислительную сложность указанных алгоритмов.

Сравнивается эффективность рассмотренных методов компьютерного моделирования СТТ, различающихся числом тел, структурой связей и числом степеней свободы.

Построены диаграммы для выбора наиболее эффективного метода моделирования СТТ различной конфигурации.

Литература

1. Фадеева М. Э., Чудаков Д. А., Маташнев А. А., Сидоров В. Н., Пономарев А. И. Моделирование механической трансмиссии колесной машины 4x2 с задней ведущей осью // Инженерный вестник Дона. 2022. № 12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2022/8090/.
2. Новикова Ю. А., Терещенко Г. В. Моделирование положения центра тяжести самолета в различных режимах полета // Инженерный вестник Дона. 2022. № 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2022/7917/.
3. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms. New York: Springer, 2008. 281 с.
4. Schiehlen W., Eberhard P. Applied Dynamics. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. 228 p.



5. Shabana A. A. Dynamics of Multibody Systems. Cambridge University Press: Cambridge University Press, 2020. 420 p.
6. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 236 p.
7. Naudet J., Lefeber D., Daerden F., Terze Z. Forward Dynamics of Open-Loop Multibody Mechanisms Using an Efficient Recursive Algorithm Based on Canonical Momenta, Multibody System Dynamics, 2003, vol. 10, no. 1, pp. 45-59.
8. Иванов В. Н., Домбровский И. В., Набоков Ф. В., Шевелев Н. А., Шимановский В. А. Классификация моделей систем твёрдых тел, используемых в численных расчётах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 139-155.
9. Величенко В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988. 280 с.
10. Иванов В. Н., Полосков И. Е., Шимановский В. А. Математические модели систем связанных твёрдых тел в импульсах Пуассона // Фундаментальные исследования. 2016. № 10-3. С. 493-499.
11. Иванов В. Н. Алгоритмы решения уравнений движения в импульсах Пуассона систем твердых тел со структурой дерева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. № 4(39). С. 25-31.

References

1. Fadeeva M. E., Chudakov D. A., Matashnev A. A., Sidorov V. N., Ponomarev A. I. Inzhenernyj vestnik Dona. 2022. № 12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2022/8090/.
2. Novikova Yu. A., Tereshchenko G. V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2022. № 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2022/7917/.
3. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms. New York: Springer, 2008. 281 p.



4. Schiehlen W., Eberhard P. Applied Dynamics. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. 228 p.
5. Shabana A. A. Dynamics of Multibody Systems. Cambridge University Press: Cambridge University Press, 2020. 420 p.
6. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 236 p.
7. Naudet J., Lefeber D., Daerden F., Terze Z. Forward Dynamics of Open-Loop Multibody Mechanisms Using an Efficient Recursive Algorithm Based on Canonical Momenta, Multibody System Dynamics, 2003, vol. 10, № 1, pp. 45-59.
8. Ivanov V. N., Dombrovskiy I. V., Nabokov F. V., Shevelev N. A., Shimanovskiy V. A. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2012. № 2. pp. 139-155.
9. Velichenko V. V. Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki [Matrix-geometric methods in mechanics with applications to robotics problems]. M.: Nauka, 1988. 280 p.
10. Ivanov V. N., Poloskov I. E., Shimanovskiy V. A. Fundamental research. 2016. № 10-3. pp. 493-499.
11. Ivanov V. N. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2017. № 4(39). pp. 25-31.