Экстраполяция видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью

Л.Ю. Фадеева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Аннотация: В данной работе в явном виде решена задача экстраполяции видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью, существенным образом обобщающей рациональную плотность. Построена спектральная характеристика экстраполяции видеосигнала с помощью оригинального метода А. М. Яглома, последователя академика А.Н. Колмогорова, впервые поставившего задачу экстраполяции для случайных последовательностей и процессов. Сущность метода состоит в перенесении всех исследований и расчетов спектральных характеристик и плотностей с вещественной оси на комплексную плоскость. В работе рассмотрен интересный для практических приложений видеосигнал с квазирациональной спектральной плотностью специального вида, квазиполином в которой, как показано автором с помощью методов Чеботарева и Штурма, имеет все корни только в открытой верхней полуплоскости.
Ключевые слова: случайный процесс, видеосигнал, прогнозирование, фильтрация, спектральная характеристика, время прогнозирования.

Введение. Алгоритмы экстраполяции используются для решения многих актуальных научно-технических задач. Это, прежде всего, задачи автоматического управления; устройства прогноза, системы: с запаздыванием, управления и обработки сигналов, синтеза речи, сжатия аудио- и видеосигналов, улучшения качества изображения, в том числе его пространственного разрешения и т.п. [1, 2]. Усовершенствование алгоритмов экстраполяции и нахождение в явном виде формулы наилучшего линейного экстраполятора продолжает быть актуальной и в настоящее время. Для решения подобных задач часто используется спектральная характеристика, где присутствует полная информация об амплитудно – и фазо – частотных характеристиках сигнала. Изучение сигналов с квазипериодическими составляющими, а также алгоритмы экстраполяции для них оказываются более близкими к реальной действительности. К подобным исследованиям относится, например, метод синтезирования видеосигнала, который применяется, в том числе, в задачах контроля или диагностики неоднородных сред [3].

Целью данной работы является построение спектральной характеристики экстраполяции видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью и, следовательно, явное решение задачи экстраполяции по всему прошлому видеосигнала.

Основная заслуга в исследовании задач линейной экстраполяции случайных последовательностей и процессов принадлежит академику А.Н.Колмогорову [4], впервые четко сформулировавшему постановку задачи экстраполирования по всему прошлому случайных последовательностей. Для получения явных формул экстраполяции для случайных процессов и последовательностей пришлось значительно сузить класс изучаемых А.Н.Колмогоровым процессов, что и было сделано американскими математиками Д. Дубом [5] и Н.Винером [6]. Таким классом оказался класс процессов с рациональной спектральной плотностью

$$f_{\rho}(\omega)=\left|A(\omega)\right|^{2}/\left|B(\omega)\right|^{2},$$

где $A(\omega)$, $B(\omega)$ – полиномы.

Полученные в работах Н. Винера и Д.Дуба результаты были строго обоснованы, доказаны и в дальнейшем обобщены с помощью оригинального метода, предложенного А.М. Ягломом [7]. Согласно этому методу спектральную плотность, а также все другие функции того же аргумента, появляющиеся при решении, следует с самого начала рассматривать как значения на вещественной оси некоторых аналитических функций комплексного переменного и использовать далее общие свойства таких функций.

В результате обсуждения на математических конференциях по теории вероятностей вопроса о явном решении задачи экстраполяции для стационарных процессов появилась гипотеза о том, что для процесса с R – квазиполиномиальной спектральной плотностью *общего* вида

$$f(\omega)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(\omega)e^{i\omega g_k}/Q(\omega),$$

($Q_k(\omega)$, $Q(\omega)$ – полиномы, q_k – действительные числа) может быть найден явный вид спектральной характеристики экстраполирования и что этот вид является R – квазиполиномом. В ряде работ, проводимых в этом направлении [7, 8], были получены явные эктраполяционные формулы для некоторых стационарных процессов с R – квазиполиномиальными спектральными плотностями *частного* вида, однако, значительного продвижения в проверке этой гипотезы не произошло.

Методы решения задачи. В данной работе рассматривается стационарный случайный процесс $\{\xi(t),-\infty<t<\infty\}$, $M\xi(t) = 0$ со спектральной плотностью $f(\omega)$. Предположим, что известна реализация этого процесса на интервале $(-\infty;t]$.

При выводе формулы спектральной характеристики экстраполирования $\Phi_\tau(\omega)$, задающей наилучший линейный экстраполятор $\hat{\xi}(t;\tau)$ в виде $\hat{\xi}(t;\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\omega}\Phi_\tau(\omega)dZ(\omega)$, мы в значительной степени придерживались методов А.М. Яглома [7], позволивших ему эффективно построить спектральную характеристику в случае рациональной спектральной плотности и распространили его идеи на случай процессов со спектральной плотностью вида:

$$f(\omega)=\left|\sum_{k=0}^{n}Q_k(\omega)e^{-i\omega g_k}\right|^2/\left|S(\omega)\right|^2=\left|G(\omega)\right|^2/\left|\prod_{l=0}^{m_0}(\omega-a_l)\right|^2, \quad (1)$$

где $Q_k(\omega)$, $k = 0, 1, 2\ldots n$; $S(\omega)$ – многочлены степеней q_k и m_0 соответственно, a_l, l=0, 1, 2… m_0 – комплексные числа, $G(\omega)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(\omega)e^{-i\omega g_k}$ –

квазиполином, все корни которого расположены только в верхней полуплоскости; g_k – действительные числа, такие что $g_0=0<g_1<g_2<\dots g_n$.

В результате расчетов по методу А.М. Яглома была получена спектральная характеристика экстраполирования

$$\Phi_\tau(\omega)=\left[\sum\nolimits_{k=s+1}^{n} Q_k(\omega)e^{i\omega(\tau-g_k)}+P(\omega)\right]/\,G(\omega)\ ; \tag{2}$$

и функция

$$\Psi_\tau(\omega)=\left[e^{i\omega\tau}-\Phi_\tau(\omega)\right]f(\omega)=\left[\sum\nolimits_{k=0}^{s} Q_k(\omega)e^{i\omega(\tau-g_k)}-P(\omega)\right]\bar{G}(\omega)/\left|S(\omega)\right|^2, \tag{3}$$

в которых $P(\omega)=C_0\omega^{m_0-1}+C_1\omega^{m_0-2}+\dots+C_{m_0-1}m_0$ – многочлен степени m_0-1, неизвестные коэффициенты которого определяются из системы m_0 линейных алгебраических уравнений:

$$C_0a_k^{m_0-1}+C_1a_k^{m_0-2}+\dots+C_{m_0-1}=\sum\nolimits_{j=0}^{s} Q_j a_k e^{ia_k(\tau-g_j)},\ \ k=1,2,\dots m_0 \tag{4}$$

в случае простых корней. В случае кратных корней система (4) преобразуется очевидным образом.

Так как детерминант системы (4) (детерминант Вандермонда) отличен от нуля, то коэффициенты C_0, $C_1,\dots C_{m0\text{-}1}$ определяются из этой системы однозначно.

Таким образом, спектральная характеристика экстраполирования по всему прошлому процесса со спектральной плотностью (1) определяется формулой (2), где s ($0\le s\le n$) такое число, что $g_s\le\tau<g_{s+1}$, а неизвестные коэффициенты полинома $P(\omega)$ степени m_0-1 единственным образом находятся из системы m_0 линейных алгебраических уравнений (4) в случае простых корней полинома $S(\omega)$.

Результаты работы. Покажем теперь, как применяются полученные выше формулы (2) – (4) в следующем важном для практических приложений частном случае видеосигнала с двумя резонансными частотами со спектральной плотностью вида:

$$f_1(\omega)=|G(\omega)|^2/|S(\omega)|^2=|Q_0(\omega)+Q_1(\omega)e^{-i\omega g_1}+Q_2(\omega)e^{-i\omega g_2}|^2/|S(\omega)|^2=$$

$$=\left|\omega-1-i+e^{-i\omega}+\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{-2i\omega}\right|^2/\left[(\omega-i)(\omega+i)(\omega-2i)(\omega+2i)\right], \quad (5)$$

где $S(\omega)=(\omega-i)(\omega-2i)$, а все корни квазиполинома $G(\omega)=\omega-1-i+e^{-i\omega}+\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{-2i\omega}$ расположены в открытой верхней полуплоскости. Этот факт доказан в работе автора [9] на основе метода Чеботарева и обобщенного метода Штурма [10]. А именно, в работе автора [9] доказано, что квазиполином

$$\varphi_1(\omega)=(a-\alpha i\omega)\cos\omega-(b\omega+\alpha i)\sin\omega+a=$$

$$=\left(e^{i\omega}\right)/2\left\{\omega(b-c)i+d\omega+a-c-id+2ae^{-i\omega}+e^{-2i\omega}\left[\omega(d-ci-bi)+a+c+di\right]\right\} \quad (6)$$

при $$b>a>0,\quad c>0,\quad d>0 \quad (7)$$

имеет все корни только в открытой верхней полуплоскости H^+. Нетрудно убедиться в том, что квазиполином $\varphi_1(\omega)$ при a = 1/2, d = 1, b = c = 3/2 представляет собой произведение $\left(e^{i\omega}/2\right)\cdot G(\omega)$ и, поскольку соотношения (7) между a, b, c и d справедливы, а $e^{i\omega}\neq 0$ ни при каком ω, то все корни $G(\omega)$ расположены в H^+.

Отметим, что здесь n =2, $Q_0(\omega)=\omega-1-i$; $Q_1(\omega)=1$; $Q_2(\omega)=\omega(1-3i)+2+i$; g_1= 1; g_2 = 2; m_0 = 2 в формуле (1) и у квазиполинома $G(\omega)$ существует главный член, равный $\omega-1-i$ и потому согласно теореме Чеботарева – Меймана [9] функция $f_1(\omega)$ может являться спектральной плотностью (1 ≤ m_0 – 1, 1 – степень главного члена квазиполинома $G(\omega)$, m_0 = 2 – степень многочлена $S(\omega)$).

Примем τ = 1,5, тогда число s, фигурирующее в формуле спектральной характеристики $\Phi_\tau(\omega)$, будет равно 1 и потому согласно формуле (2) функция $\Phi_\tau(\omega)$ будет иметь вид:

$$\Phi_\tau(\omega)=\frac{Q_2(\omega)e^{i\omega(\tau-g_2)}+\rho\omega+\eta}{G(\omega)}=\frac{\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{i\omega(1,5-2)}+\rho\omega+\eta}{\omega-1-i+e^{-i\omega}+\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{-2i\omega}}, \qquad (8)$$

а функция $\Psi_\tau(\omega)$ запишется формулой:

$$\Psi_\tau(\omega)=\frac{\left[Q_0(\omega)e^{1,5i\omega}+Q_1(\omega)e^{0,5i\omega}-\rho\omega-\eta\right]\overline{G}(\omega)}{(\omega-i)(\omega+i)(\omega-2i)(\omega+2i)}=\frac{\left[(\omega-1-i)e^{1,5i\omega}+e^{0,5i\omega}-\rho\omega-\eta\right]\overline{G}(\omega)}{(\omega-i)(\omega+i)(\omega-2i)(\omega+2i)}. \qquad (9)$$

В формулах (8) и (9) $P(\omega)=\rho\omega+\eta$ - многочлен степени $m_0-1=2-1=1$, его неизвестные коэффициенты ρ и η определяются из системы двух линейных алгебраических уравнений, обеспечивающих аналитичность функции $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+.

Полюсами функции $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ являются мнимые числа $\omega=i$ и $\omega=2i$, поэтому система примет вид:

$$\begin{array}{r} \textit{в полюсе } \omega=i \\ \textit{в полюсе } \omega=2i \end{array}\left\{\begin{array}{l} \rho i+\eta=-e^{-1,5}+e^{-0,5} \\ 2\rho i+\eta=(i-1)e^{-3}+e^{-1} \end{array}\right. \qquad (10)$$

Решением системы (10) являются комплексные числа

$$\rho=e^{-3}-\left(e^{-1}+e^{-1,5}-e^{-0,5}-e^{-3}\right)\cdot i$$
$$\eta=2e^{-0,5}-e^{-1}+e^{-3}-2e^{-1,5}-ie^{-3}$$

Подставляя найденные комплексные числа ρ и η в формулу (8), получим формулу спектральной характеристики экстраполяции $\Phi_\tau(\omega)$ по всему прошлому процесса со спектральной плотностью $f_1(\omega)$ вида (6), а, следовательно, и сам наилучший линейный экстраполятор $\hat{\xi}(t;\tau)$, определяемый этой характеристикой по формуле $\hat{\xi}(t;\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\tau(\omega)dZ(\omega)$, в следующем окончательном виде

$$\hat{\xi}(t;1,5)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{i\omega(t-0,5)}+\left[e^{-3}\left(e^{-1}+e^{-1,5}-e^{-0,5}-e^{-3}\right)i\right]\omega e^{it\omega}+\left(2e^{-0,5}-e^{-1}+e^{-3}-2e^{-1,5}-ie^{-3}\right)e^{it\omega}}{\omega-1-i+e^{-i\omega}+\left[\omega(1-3i)+2+i\right]e^{-2i\omega}}\right\}dZ(\omega)$$

Таким образом, в работе построена спектральная характеристика экстраполяции видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью, существенным образом расширяющей и обобщающей рациональную плотность. При решении задачи экстраполяции использовались методы построения спектральных характеристик и плотностей А. М. Яглома. Рассмотрен важный и интересный с технической точки зрения видеосигнал с квазирациональной спектральной плотностью специального вида.

Литература

1. Сайфеддин Д., Булгаков А.Г., Круглова Т.Н. Нейросетевая система отслеживания местоположения динамического агента на базе квадрокоптера// Инженерный вестник Дона. 2014. №1. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2293.

2. Мисюра В.В., Мисюра В.И. Обработка и распознавание сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.

3. Sedelnikov Yu.E., Fadeeva L.Yu. The Synthesized Video – Signal Method in Nondestructiv Testing Problems // Russian Journal of Nondestructiv Testing. 2015. vol 51. No 5. p.320-328.

4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.

5. Doob J.L. The elementary Gaussian processes. Ann, Math Stat. 15, № 3, 1944, p. 229-282.

6. Wiener N., Masani H.P. The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, Acta Math. 98, 111-150, 1957. II Acta Math. 99, 93-137. 1958.

7. Yaglom A.M. An Introduction to the Teory of Stationaty Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

8. Григорьев С.В. Экстраполяция процессов со спектральной плотностью, знаменателем которой является квазиполином // Известия вузов. Математика. 1977. №6(181). С. 26-34.

9. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системыю. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

10. Чеботарёв Н.Г, Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Труды математического института им. В.А Стеклова, Т.26. Изд-во АН СССР. М., Л. 1949. 331с.

References

1. Sajfeddin D., Bulgakov A.G., Kruglova T.N. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2293.

2. Misjura V.V., Misjura V.I. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.

3. Sedelnikov Yu.E., Fadeeva L.Yu. Russian Journal of Nondestructiv Testing. 2015. vol 51. No 5. pp.320-328.

4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.

5. Doob J.L. The elementary Gaussian processes. Ann, Math Stat. 15, № 3, 1944, pp. 229-282.

6. Wiener N., Masani H.P. Acta Math. 98, 111-150, 1957. II Acta Math. 99. 1958. pp. 93-137.

7. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

8. Grigor'ev S.V. Izvestija vuzov. Matematika. 1977. №6 (181). p. 26-34.

9. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyju. T.4. №4 (2024): vypusk 14. pp. 1-8.

10. Chebotarjov N.G, Mejman N.N. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A Steklova, T.26. Izd-vo AN SSSR. M., L. 1949. 331p.

Дата поступления: 11.03.2025

Дата публикации: 25.04.2025