

## Расчёт системы труба-основание-насыпь как контактной задачи с трением

*А.Н. Попов*

*Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск*

**Аннотация:** В статье рассматривается решение задачи одностороннего контакта с трением на примере водопропускной арочной трубы в грунте. Односторонний контакт моделируется в виде линейной задачи дополненности, которая решается с помощью метода Лемке. Показаны особенности решения подобных задач. Приведено сравнение с современными подходами, указаны преимущества и недостатки предлагаемого метода.

**Ключевые слова:** конструктивная нелинейность, контакт с трением, односторонние связи, линейная задача дополненности, численные модели, метод конечных элементов, нарастающая нагрузка.

### Введение

Задача определения усилий взаимодействия и взаимных перемещений при расчёте контакта строительных конструкций или их частей является одной из приоритетных нелинейных задач строительной механики [1, 2] ещё с 60х – 70х. годов. Контактные задачи популярны по сей день [3, 4]. В силу невозможности работы грунта на растяжение – наиболее явный пример конструктивно-нелинейной задачи возникает при расчёте строительных конструкций, заглублённых в грунт [5, 6].

В качестве объекта исследования рассматривается водопропускная арочная труба в грунте. Считается, что в зоне контакта грунта с трубой или сваей грунт работает на сжатие и не работает на растяжение. Трение между грунтом и трубой-основанием осуществляется по закону Кулона. Задача одностороннего контакта с трением сводится к линейной задаче дополненности (ЛЗД) [7] и решается с помощью метода Лемке [8].

Предметом исследования является односторонний контакт с трением в виде ЛЗД.

Цель данной работы – определение эффективности использования предлагаемого подхода к определению усилий взаимодействия в системе труба-основание-насыпь. Можно выделить следующие задачи:

---

1. Написать программу решения ЛЗД методом Лемке.
2. Создать модель задачи.
3. Изучить особенности работы алгоритма
4. Оценить результаты решения.

### Методы

В предлагаемой далее постановке расчёта контактных задач с трением рассматривается контакт «узел в узел» (контактная пара). Предполагается, что в каждой контактной паре точки соединены односторонними связями. Связь по нормали (работает только на сжатие) к зоне контакта включена, когда эти точки находятся в контакте, и выключена в противном случае. Связь по касательной к зоне контакта включена, если усилия взаимодействия меньше предельных сил трения и выключена, если усилия взаимодействия равны предельным силам трения.

Принято следующее правило знаков:

– для усилий и перемещений по нормали к поверхности контакта: сжимающее усилие взаимодействия точек контактной пары  $x_{ni} > 0$ ; взаимное удаление точек контактной пары  $z_{ni} > 0$  (рис 1, а).

– для усилий и перемещений по касательной к поверхности контакта: если точки контактной пары условно разнести по нормали к зоне контакта, то усилия взаимодействия  $x_{ti} > 0$  создадут пару сил с моментом по ходу часовой стрелки; взаимное перемещение  $z_{ti} > 0$ , если совпадает по направлению с  $x_{ti} > 0$  (рис. 1, б).

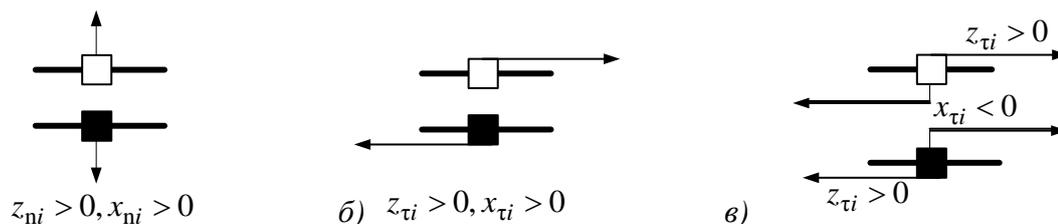


Рис. 1. – Правило знаков для усилий взаимодействия  $x$  и взаимных перемещений  $z$

В [9, 10] получена общая постановка задачи контакта с трением с учётом зазоров в виде ЛЗД:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{n\tau} \\ \mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ -\mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{z}_n \geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0; \quad \mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n = 0;$$
$$\mathbf{x}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ = 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0,$$

где:  $\mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n$  – векторы  $[m \times 1]$  усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактных пар по нормали к зоне контакта;  $\mathbf{x}_\tau = (\mathbf{x}_\tau^+ - \mathbf{x}_\tau^-)/2$  – вектор  $[m \times 1]$  усилий взаимодействия контактных пар по касательной к зоне контакта;  $\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$  – вектор  $[m \times 1]$  взаимных перемещений контактных пар по касательной к зоне контакта;  $\mathbf{R}_{nn}$  – контактная матрица жёсткости (КМЖ)  $[m \times m]$  для связей в контактных парах по нормали к предполагаемой зоне контакта от единичной дислокации узлов контактных пар по нормали к указанной зоне контакта;  $\mathbf{R}_{\tau\tau}$  – КМЖ  $[m \times m]$  для связей, введённых в контактных парах по касательной к зоне контакта от единичной дислокации контактных пар по касательной к зоне контакта;  $f$  – коэффициент трения между узлами контактной пары;  $\mathbf{R}_{Fn}$  – контактный грузовой вектор (КГВ)  $[m \times 1]$  для связей по нормали к зоне контакта;  $\mathbf{R}_{F\tau}$  – КГВ для связей по касательной к зоне контакта;  $\boldsymbol{\eta}$  – вектор взаимных начальных зазоров в зоне контакта. Таким образом, для определения параметров напряжённо-деформированного состояния (НДС) в контактной паре необходимы три неотрицательные переменные: одна отвечает за взаимодействие по нормали и две за взаимодействие по касательной.

## Расчёт

В силу большой протяжённости трубы, рассматривается задача плоской деформации. Очертанием арочной трубы в грунте является круг (рис. 2). Труба жёстко опирается на висячие сваи трения. Нагрузкой является собственный вес грунта. Труба и сваи взаимодействуют только с грунтом по модели одностороннего взаимодействия с трением. Таким образом, система труба-основание «висит» в грунте, что сильно осложняет решение задачи, поскольку у трубы и свай отсутствуют опоры. Рассматривается дискретизованная задача на основе метода конечных элементов (МКЭ). Подобные задачи с прямым подходом (без добавления опор) крайне сложно рассчитать в популярных программных комплексах (ANSYS, Lira, Abaqus). Чаще всего в них используется вариационные постановки задачи, которые требуют закрепления степеней свободы обеих контактирующих тел. Таким образом, для решения поставленной задачи необходим подход с использованием контактных конечных элементов или нуль-элементов.

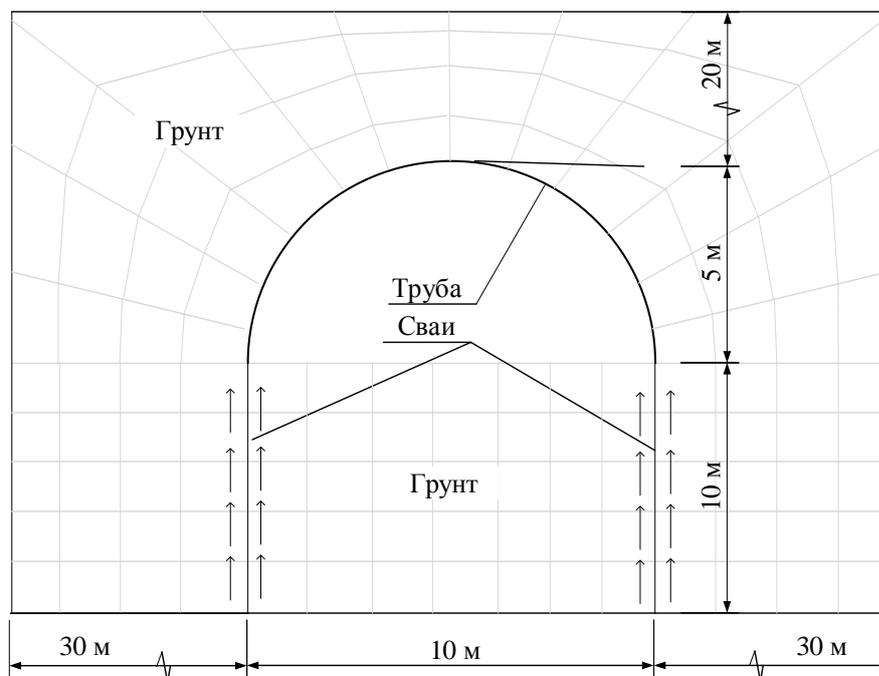


Рис. 2. – Схема системы труба-основание-насыпь

Основные параметры задачи: модуль упругости грунта  $E_s = 4.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , коэффициент Пуассона грунта  $\mu = 0.27$ , ширина вырезанной полосы  $t = 1 \text{ м}$ , удельный вес грунта  $\gamma = 2.26611 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ , модуль упругости трубы  $E_a = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , момент инерции арки  $I_{xa} = 2.110901 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ , площадь поперечного сечения арки  $A_a = 2.366322 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ , коэффициент трения скольжения по грунту  $f = 0.4$ . Характеристики сваи:  $E_p = 2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $A_p = 0.25 \text{ м}$ ,  $I_p = 5.208333 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$ . В качестве опор добавлены вертикальные ограничения в основании грунта и горизонтальные по бокам с учётом симметрии задачи. Учёт объёма грунта по бокам от трубы производился с учётом сходимости результатов решения с погрешностью менее 0.5%. На рис. 3 представлена сетка КЭ (скриншот схемы из программы).

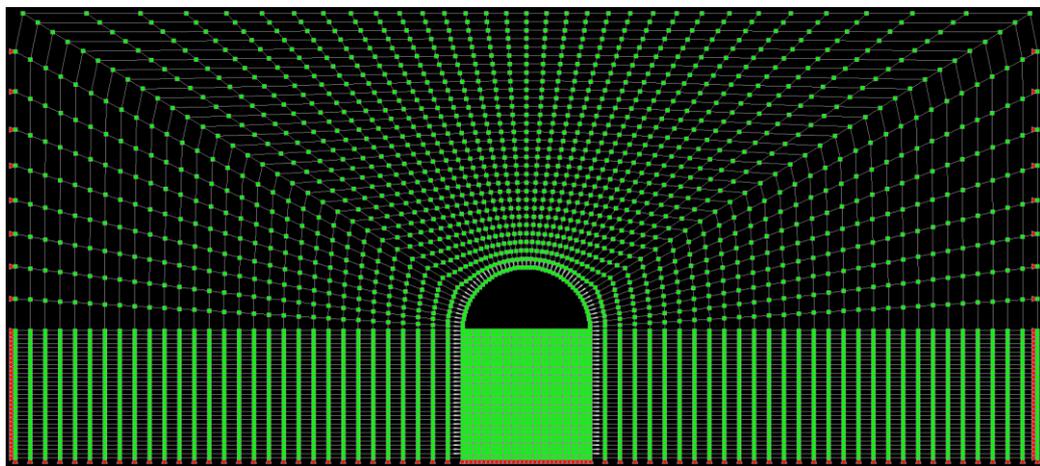


Рис. 3. – Схема задачи (программа)

В качестве результатов решения ЛЗД получаем усилия взаимодействия и взаимные перемещения по нормали  $x_n, z_n$  (рис 4, а) и по касательной  $x_\tau, z_\tau$  к зоне контакта (рис. 4, б). Из этого можно сделать выводы о наличии зон сцепления, отрыва и проскальзывания грунта с объектом. Из условий симметрии задачи показана только правая половина. Для проверки результатов обеспечиваются взаимные перемещения узлов  $z_n, z_\tau$  и решается

линейная задача. Полученные усилия взаимодействия из линейной задачи отличаются не более чем на  $10^{-10}H$  от усилий  $x_n, x_t$ , полученных при решении предложенным алгоритмом. Для данной задачи наименьшее усилие взаимодействия оказалось касательным в контактной паре в верхней части трубы  $0.000012H$ . Таким образом, точность полученных результатов

$$\text{составляет: } \frac{0.000012 - (0.000012 - 10^{-10})}{0.000012} \cdot 100 = 8.333 \cdot 10^{-4} \% .$$

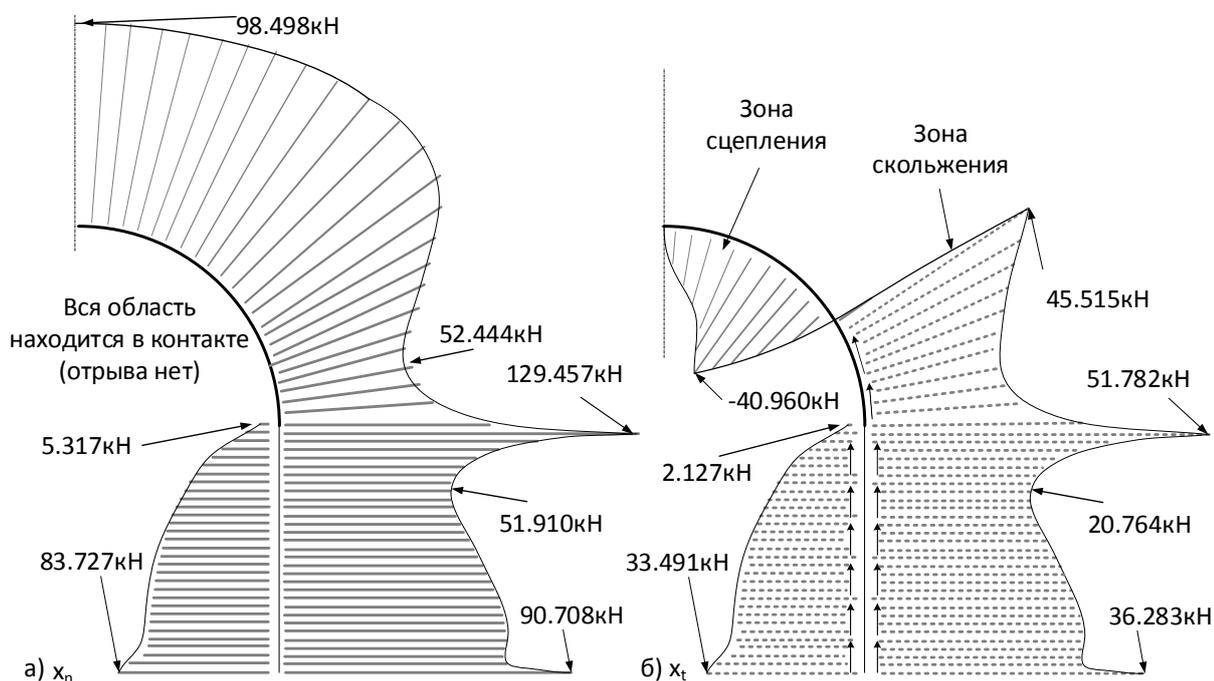


Рис. 4. – Усилия взаимодействия и взаимные перемещения

В сравнении с современными программными комплексами, требующими тщательную настройку множества параметров контакта (в вариационных подходах, метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа и тп), предлагаемый алгоритм крайне прост для конечного пользователя, т.к. параметрами контакта здесь будут являться только коэффициент трения и параметр точности задачи (параметр регулирующий остановку алгоритма Лемке). Однако, шаговая реализация данного алгоритма эффективна только при малых деформациях контактирующих тел.

## Выводы

Представленный метод позволяет решать достаточно сложные задачи контактного взаимодействия с высокой точностью до  $8.333 \cdot 10^{-4}\%$ , несмотря на сложную постановку задачи для алгоритмов решения конструктивно-нелинейных задач. Написана программа на языке программирования Python 3.10 с использованием библиотек `numpy`, `scipy`, `pyqt`, `pyqtgraph`.

1. Написан генератор сетки для объекта исследования с возможностью изменения параметров: очертания арки-трубы, высота трубы, пролёт трубы, длина свай, высота насыпи над аркой, объём грунта по бокам, густота сетки КЭ.

2. Алгоритм показал себя хорошо для трудной контактной задачи, когда одно из контактирующих тел не закреплено и по математической модели способно двигаться как жёсткое целое.

3. Результатами решения стали усилия взаимодействия и взаимные перемещения в зоне контакта, из которых уже в дальнейшем можно легко определить деформации и напряжения контактирующих тел.

## Литература

1. Auricchio F., Sacco E. Augmented Lagrangian finite elements for plate contact problems // Int. J. for Num. Meth. Eng. 1996, No. 39, Pp. 4141-4158.

2. Panagiotopoulos P. D., Lazaridis P. P. Boundary minimum principles for the unilateral contact problems // Int. J. Solids Structures, 1987, V. 23, № 11. Pp.1465-1484.

3. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И.. Об одном методе решения задач о термоупругодинамической неустойчивости скользящего фрикционного контакта // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2730](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2730).

4. Мантурова Е.А. Применение наноматериалов и нанофункциональных присадок в перспективных технологиях лубрикации контакта гребня колеса с

---

боковой поверхностью головки рельса // Инженерный вестник Дона, 2010, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/197](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/197).

5. Вайнштейн Е.В., Вайнштейн В.М., Нехорошков П.А. Исследование изменения касательных напряжений и вертикальных перемещений от лесовозного автопоезда в конструкции дорожной одежды и земляного полотна // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1399](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1399).

6. Акопян В.Ф.. Испытания моделей винтовых свай // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/620](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/620).

7. Ловцов А.Д. Линейная задача дополнительности в строительной механике систем с односторонними связями. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2013. - 198 с.

8. Lemke C. E. Some pivot schemes for the linear complementarity problem. // Math. Programming Study. 1978, No. 7. Pp. 15 - 35.

9. Попов А.Н., Ловцов А.Д. Frictional contact problem in building constructions analysis // Magazine of Civil Engineering. 2020. №100(8). URL: [engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.100.1/](http://engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.100.1/).

10. Попов А.Н., Ловцов А.Д. Контакт с трением в линейной задаче дополнительности с учётом зазоров // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. Выпуск 4 Том 297. С36-43.

### References

1. Auricchio F., Sacco E. Augmented Lagrangian finite elements for plate contact problems. Int. J. for Num. Meth. Eng. 1996, No. 39. Pp. 4141-4158.

2. Panagiotopoulos P. D., Lazaridis P. P. Int. J. Solids Structures, 1987, Vol. 23, No. 11. Pp. 1465- 1484.

3. Zelencov V.B., Mitrin B.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2730](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2730).



4. Manturova E.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/197](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/197).
5. Vajnshtejn E.V., Vajnshtejn V.M., Nehoroshkov P.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1399](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1399).
6. Akopjan V.F. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/620](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/620).
7. Lovcov A.D. Linejnaja zadacha dopolnitel'nosti v stroitel'noj mehanike sistem s odnostoronnimi svjazjami [Linear complementarity problem in structural mechanics systems with unilateral constraints]. Khabarovsk: PNU publisher, 2013. 198 p.
8. Lemke C. E. Some pivot schemes for the linear complementarity problem. Math. Programming Study. 1978, № 7. Pp. 15 - 35.
9. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis. Magazine of Civil Engineering. 2020. №100(8). Article No. 10001 URL: [engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.100.1/](http://engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.100.1/).
10. Popov A.N., Lovtsov A.D. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. 2021. № 4 V. 297. Pp. 36-43.