Инженерный вестник Дона, №9 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2022/7890

Математическая модель оптимального раскроя с возможностью изменения размеров и поворота прямоугольных заготовок

О.Ф. Козырь, В.А. Кривоносов

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»»

Аннотация: Предлагается вариант математической модели задачи оптимального раскроя полубесконечной полосы материала с возможностью поворота заготовок на 90 градусов. Рассматриваются двумерные заготовки, близкие к форме прямоугольника или вписанные в прямоугольник. Формализован процесс пересчета базовых размеров заготовок. Показано, что приращения длины и ширины прямоугольной заготовки могут быть определены различными способами. Разработанные математические модели ориентированы в основном на решение проблем небольших предприятий и производство несложных по форме изделий. Даны рекомендации по программной реализации модели раскроя.

Ключевые слова: математическая модель, оптимизация, оптимальный раскрой полубесконечной полосы, прямоугольные заготовки, пересчет размеров заготовок, поворот заготовок на 90°.

Оптимальный раскрой материалов является залогом эффективности многих отраслей лёгкой промышленности, таких, как швейная, обувная, мебельная, а также машиностроения, автомобилестроения и пр. Развитие технологий и изменение условий производства требуют модификации уже существующих [1 - 3], а также разработки новых моделей и способов раскроя [2, 4, 5]. На сегодняшний день актуальны как классические модели и методы [1 - 3], так и модели, использующие эвристические [4, 6] и интеллектуальные алгоритмы [7].

Особенностью современного этапа является учет индивидуальных особенностей потребителей. Это привело к заметному росту числа предпринимательских структур и малых предприятий, которые сориентированы на удовлетворение запросов небольших групп потребителей. Отсюда одна из главных проблем, существующих на таких предприятиях – это изменение параметров базовых изделий под требования заказчика.

Следующей особенностью можно считать то, что составление карт раскроя осуществляется в основном с использованием специализированных программных средств. Часто финансовые возможности небольших предприятий не позволяют им приобретать новейшие технологии и дорогостоящее оборудование, автоматизированные программные системы, реализующие сложнейшие математические модели и алгоритмы раскроя. Поэтому первоочередными задачами, стоящими перед исследователями, являются учет особенностей небольших предприятий и разработка достаточно простых, но дающих вполне приемлемые результаты, разновидностей математических моделей раскроя материала.

Рассмотрим составление карты раскроя двумерных заготовок, которые близки к форме прямоугольника, что нередко встречается в реальных условиях производства. Для удобства моделирования и упрощения расчетов впишем заготовки в прямоугольники, тогда размеры k-ой заготовки будут характеризоваться двумя величинами: длиной l^k и шириной w^k описанного вокруг неё прямоугольника. Будем считать, что данные размеры учитывают технологические припуски.

Сначала формализуем процесс изменения размеров заготовок, для чего введем следующие обозначения:

$l_б^k$ – длина k-го вида заготовки базового изделия;

$w_б^k$ – ширина k-го вида заготовки базового изделия;

l^k – вычисляемая длина k-го вида заготовки (прямоугольника);

w^k – вычисляемая ширина k-ого вида заготовки (прямоугольника);

$G_ж$ – желаемая ширина изделия;

$H_ж$ –желаемая длина изделия;

$G_б$ – базовая ширина изделия;

$H_б$ –базовая длина изделия;

K – количество видов заготовок в изделии.

В зависимости от типа и конструкции изделия, для расчета величины изменения размеров k-ой заготовки по длине Δl^k и по ширине Δw^k могут быть использованы различные способы. К примеру, значения приращений k-ой заготовки Δl^k и Δw^k могут быть задаваемой раскройщиком величиной или могут быть рассчитаны (1), исходя из соотношения размеров базовой заготовки к базовому изделию:

$$\begin{cases} \Delta l^k = \frac{l_б^k}{H_б} \cdot (H_{ж} - H_б) \\ \Delta w^k = \frac{w_б^k}{G_б} (W_{ж} - W_б) \end{cases} \quad (k = \overline{1;K}) \tag{1}$$

Понятно, что если приращение положительное число, то соответствующий параметр заготовки увеличится, если отрицательное, то уменьшится. Если приращение равно нулю, то пересчета данного параметра заготовки не требуется.

Пересчитаем ширину всех входящих в изделие заготовок (прямоугольников):

$$w^k = w_б^k + \Delta w^k \quad (k = \overline{1;K}) \tag{2}$$

А желаемые длины заготовок будут равны:

$$l^k = l_б^k + \Delta l^k \quad (k = \overline{1;K}) \tag{3}$$

В реальных условиях часто наибольший эффект дает разумное сочетание этих двух способов, когда для одной части выкраиваемых заготовок приращение является рассчитываемой величиной, а для другой части – задаваемой.

Задача оптимального раскроя будет заключаться в размещении прямоугольников на полубесконечной полосе [8, 9] используемого материала таким образом, чтобы общая длина отреза была наименьшей. При этом должно быть изготовлено заданное количество определенных видов заготовок. Часто в производстве используется материал, который позволяет выкраивать заготовки по любым направлениям. Это может быть полоса стального проката, рулон ткани подходящей расцветки и пр.

Пусть полоса материала имеет стандартную ширину, которую обозначим через W. Длину полосы будем считать бесконечной [8]. Схему составления карты раскроя изобразим на рис.1.

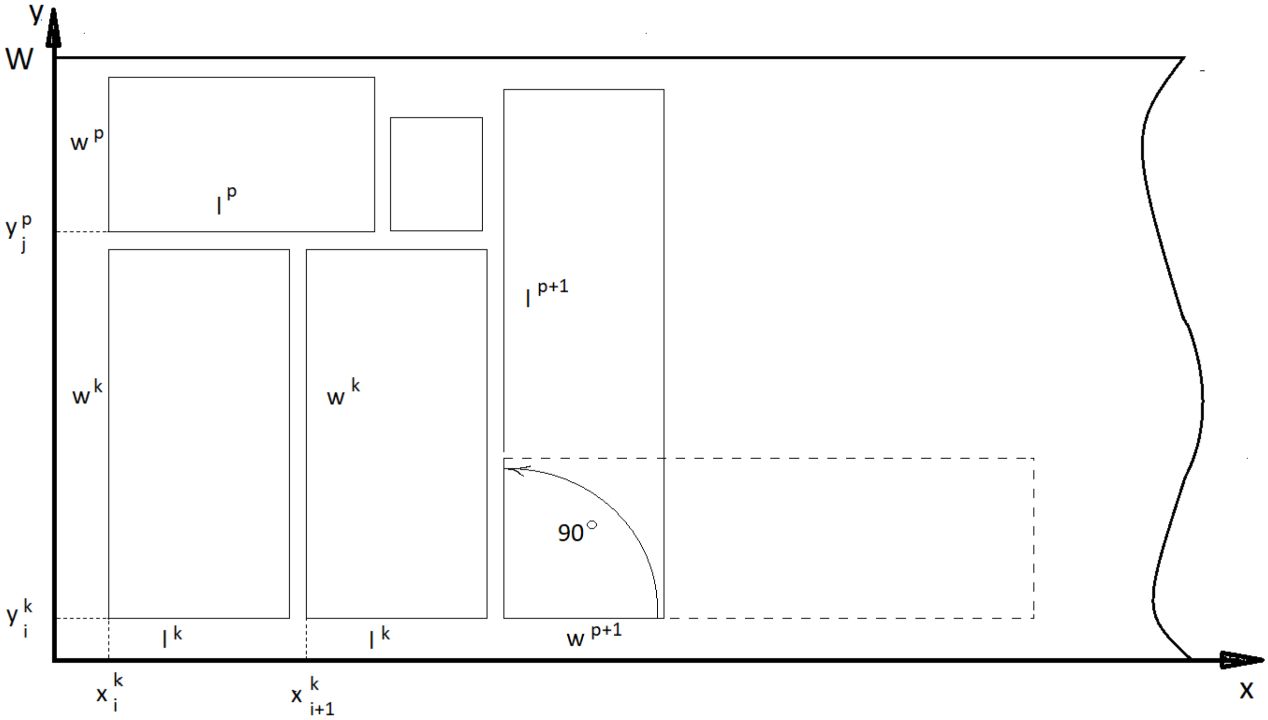

Рис. 1 - Графическое изображение параметров математической модели

К имеющимся добавим следующие обозначения:

W – ширина полосы;

k, p – вид заготовки;

K– количество видов заготовок;

i, j – номер заготовки k-го вида;

I^k– заданное количество (план) заготовок k-го вида;

$(x_i^k;\ y_i^k)$ – искомые координаты левого нижнего угла i-ой заготовки k-го вида ;

L – искомая длина отреза;

δ_i^k - искомая булева величина, показывающая вертикальное/горизонтальное положение заготовки:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0, \text{если } i - \text{ая заготовка } k - \text{го вида находится в обычном положении}, \\ 1, \text{ если } i - \text{ая заготовка } k - \text{го вида повернута на } 90^\circ (\text{вертикально}) \end{cases}$$

α_{ij}^{kp} - булева величина, показывающая взаимное расположение заготовок по оси x:

$$\alpha_{ij}^{kp} = \begin{cases} 0, \text{ если i-ая заготовка k-го вида находится правее j-ой заготовки p-го вида}, \\ 1, \text{ если i-ая заготовка k-го вида находится левее j-ой заготовки p-го вида} \end{cases}$$

β_{ij}^{kp} - булева величина, показывающая взаимное расположение заготовок по оси y:

$$\beta_{ij}^{kp} = \begin{cases} 0, \text{ если i-ая заготовка k-го вида находится выше j-ой заготовки p-го вида}, \\ 1, \text{ если i-ая заготовка k-го вида находится ниже j-ой заготовки p-го вида} \end{cases}$$

Требуется найти такое множество комбинаций $(x_i^k;\ y_i^k;\ \delta_i^k)\quad (i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K})$, показывающее положение заготовок на полубесконечной ленте материала, чтобы длина общего отреза листа была минимальной, т.е.:

$$L = \min \max_{\substack{1\le i\le I^k \\ 1\le k\le K}} \left(x_i^k + l^k \left(\frac{w^k}{l^k}\right)^{\delta_i^k} \right) \tag{4}$$

При условиях:

– прямоугольники не должны пересекаться: по оси x (5) и по оси y (6)

$$x_j^p + (1 - \alpha_{ij}^{kp}) \cdot l^p \left(\frac{w^p}{l^p}\right)^{\delta_j^p} \le x_i^k + \alpha_{ij}^{kp} \cdot l^k \left(\frac{w^k}{l^k}\right)^{\delta_i^k} \le x_j^p + (1 - \alpha_{ij}^{kp}) \cdot l^p \left(\frac{w^p}{l^p}\right)^{\delta_j^p} \tag{5}$$

$$(i, j = \overline{1; I^k}, \qquad k, p = \overline{1; K})$$

$$y_j^p + (1 - \beta_{ij}^{kp}) \cdot w^p \left(\frac{l^p}{w^p}\right)^{\delta_j^p} \le y_i^k + \beta \cdot w^k \left(\frac{l^k}{w^k}\right)^{\delta_i^k} \le y_j^p + (1 - \beta_{ij}^{kp}) \cdot w^p \left(\frac{l^p}{w^p}\right)^{\delta_j^p} \tag{6}$$

$$(i, j = \overline{1; I^k}, \qquad k, p = \overline{1; K})$$

– размещения заготовок относительно друг друга:

$$1 \leq \alpha_{ij}^{kp} + \alpha_{ji}^{pk} + \beta_{ij}^{kp} + \beta_{ji}^{pk} \leq 2 \quad (i, j = \overline{1; I^k},\ k, p = \overline{1; K}) \tag{7}$$

– прямоугольники не должны пересекать границ полосы: по оси *x* (8), по оси *y* (9) и (10):

$$x_i^k \geq 0 \quad (i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K}) \tag{8}$$

$$y_i^k \geq 0 \quad (i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K}) \tag{9}$$

$$y_i^k + w^k \left(\frac{l^k}{w^k}\right)^{\delta_i^k} \leq W \quad (i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K}) \tag{10}$$

– целочисленности булевых значений (11) – (13):

$$\alpha_{ij}^{kp} \in [0; 1], \quad \alpha_{ij}^{kp} \in Z\ (i, j = \overline{1; I^k},\ k, p = \overline{1; K}) \tag{11}$$

$$\beta_{ij}^{kp} \in [0; 1], \quad \beta_{ij}^{kp} \in Z\ (i, j = \overline{1; I^k},\ k, p = \overline{1; K}) \tag{12}$$

$$\delta_i^k \in [0; 1], \quad \delta_i^k \in Z\ (i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K}) \tag{13}$$

где Z - множество целых чисел.

Модель сформулирована в виде целочисленной линейной задачи. В результате нахождения неизвестных $(x_i^k; y_i^k; \delta_i^k)$ $(i = \overline{1; I^k},\ k = \overline{1; K})$ получаем оптимальную карту раскроя.

Для решения задачи целесообразно использовать различные комбинаторные методы [10]. Для программной реализации кроме таблицы с параметрами и количеством заготовок целесообразно создать несколько вспомогательных массивов, в одном из которых заготовки (прямоугольники) будут упорядочены по убыванию длины l^k, в другом - по убыванию ширины w^k. Размещать прямоугольники на полосе материала лучше, начиная с самых крупных, тех, которым соответствуют первые элементы промежуточных массивов, постепенно переходя к более мелким. Как только все количество прямоугольников данного вида оказалось размещенным на карте раскроя материала, его удаляют из вспомогательных массивов. При размещении прямоугольников по ширине *W* следует руководствоваться тем, чтобы как можно меньше оставалось свободного места. Процесс продолжается до тех пор, пока в массивах есть элементы.

Применение разработанной модели дает значимый эффект небольшим производствам, изготовляющим несложные по структуре изделия, позволяет существенно сэкономить используемый материал, снизить себестоимость продукции, усовершенствовать процесс раскроя.

Литература

1. Верхотуров М.А., Мухачева Э.А., Шабрина Л.И. Многообразие задач раскроя и упаковки. Деп.в ВИНИТИ. - Москва: ВИНИТИ, № 3023-В94-1994.- 8 с.
2. Марков В.Н., Руденко Е.А., Критерии эффективности методов решения задач раскроя-упаковки плоских материалов // Научные труды КубГТУ – Краснодар: КубГТУ, 2014 г., № 6 – С. 316 - 322
3. Fayzrakhmanov R.A., Murzakaev R. T., Mezentsev A. S., Shilov V. S. Applying the greedy algorithm for reducing the dimensionality of the dynamic programming method in solving the one-dimensional cutting stock problem // Middle-East Journal of Scientific Research. – 2014. – № 19 (3). – Pp. 412-416.
4. Хабибулин А.Ф., Мурзакаев Р.Т., Швецов М.Д., Файзрахманов Р.А., Мехоношин А. С. Алгоритмы обнаружения коллизий плоских двумерных объектов произвольной формы // Инженерный вестник Дона. 2015. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3250
5. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная визуализации сложных геометрических форм. // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498

6. Мурзакаев Р.Т., Буркова А.В., Шилов В.С. Основные методы решения задачи фигурной нерегулярной укладки плоских деталей // Инженерный вестник Дона. 2013. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2043

7. Avdzhieva Ana, Balabanov Todor, Kamburova Detelina, Evtimov Georgi, Kostadinov Hristo, Tsachev Tsvetomir, Zhelezova Stela, Zlateva Nadia. Optimal Cutting Problem // ESGI 113 - Sofia, Bulgaria – Pp. 49-61.

8. Верхотуров М.А., Петренко С.В. Об одном подходе к нахождению локального экстремума задачи размещения невыпуклых ориентированных многоугольников в полубесконечной полосе// Межвузовский сборник научных трудов - Уфа: УГАТУ - 2005. - С. 7-18.

9. Козырь О.Ф., Кривоносов В.А. Математическая модель оптимального раскроя // В сборнике: Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство. Материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Старый Оскол: СТИ НИТУ «МИСиС» - 2019. - С. 354-357.

10. Рейнгольд Э., Нивергольд Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы: Теория и практика. - М.: Мир, - 1980. -213 с.

References

1. Verkhoturov M.A., Mukhacheva E.A., Shabrina L.I. Mnogoobrazie zadach raskroia i upakovki. [Variety of cutting and packaging tasks]. Dep. v VINITI, Moskva: VINITI, № 3023-V94. 1994. 8 p.

2. Markov V.N., Rudenko E.A. Nauchnye trudy KubGTU. Krasnodar: KubGTU, 2014. № 6 . Pp. 316 - 322

3. Fayzrakhmanov R.A., Murzakaev R. T., Mezentsev A. S., Shilov V. S. RMiddle-East Journal of Scientific Research. 2014. № 19 (3). Pp. 412-416.

4. Khabibulin A.F., Murzakaev R. T., Shvetsov M.D., Fajzrahmanov R.A., Mehonoshin A.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2015. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3250

5. Rachkovskaya G.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498

6. Murzakaev R. T., Burkova A. V., Shilov V. S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2043

7. Avdzhieva Ana, Balabanov Todor, Kamburova Detelina, Evtimov Georgi, Kostadinov Hristo, Tsachev Tsvetomir, Zhelezova Stela, Zlateva Nadia. ESGI 113. Sofia, Bulgaria. Pp. 49-61.

8. Verkhoturov M.A., Petrenko S.V. Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov. Ufa: UGATU. 2005. Pp. 7-18.

9. Kozyr’ O.F., Krivonosov V.A. V sbornike: Sovremennye problemy gorno-metallurgicheskogo kompleksa. Nauka i proizvodstvo. Materialy XVI Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. Staryj Oskol: STI NITU “MISiS”. 2019. Pp. 354-357.

10. Reyngol’d YE., Nivergol’d YU., Deo N. Kombinatornye algoritmy: Teoriya i praktika. [Combinatorial algorithms: Theory and practice.] M.: Mir, 1980. 213 p.