Инженерный вестник Дона, №2 (2018)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/67N2y18 /4873

Исследование нелинейных волн на поверхности намагничивающейся жидкости бесконечной глубины

Э.Н. Егерева, Ю.С. Зотова, А.Е. Пьянзина

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

Аннотация: В статье решена задача о распространении нелинейных поверхностных волн в намагничивающейся жидкости бесконечной глубины. Зависимость частоты колебания волны от величины напряженности магнитного поля приведена на графиках. Найдены траектории движения частиц жидкости. Исследовано влияние магнитного поля на высоту волны. Результаты исследования могут быть использованы для расчета различных технических устройств и технологических процессов.

Ключевые слова: поверхностные волны, намагничивающаяся жидкость, магнитное поле, волновое число, частота колебания волны, напряженность магнитного поля.

Наиболее широко используемыми в практических приложениях намагничивающимися средами являются так называемые магнитные жидкости, изготавливаемые в настоящее время искусственным путем. Магнитные жидкости представляют собой смесь мельчайших частиц твёрдого ферромагнетика и обычной немагнитной жидкости, например, воды, керосина др. Намагничивающиеся жидкости, благодаря своим специфическим свойствам, находят в настоящее время самое разнообразное практическое применение [1-5], это стимулирует большое число исследований по изучению свойств полученных магнитных жидкостей [6-8]. В работах [9, 10] проведено экспериментальное исследование равновесных форм и устойчивости замкнутых объемов магнитной жидкости со свободной поверхностью в однородных и неоднородных магнитных полях. Было проведено исследование влияния магнитного поля на процесс обработки сточных вод гальванических производств и осадка [11].

Магнитные жидкости используют для разделения веществ, имеющих различную плотность в устройстве, называемом магнитным сепаратором. В машиностроении, например, магнитные жидкости используют в качестве смазки [12]. Для перекачки всевозможных жидкостей в космических аппаратах в состоянии невесомости также используются магнитные жидкости. Изучение поверхностных волн в контейнерах с жидкостью представляет интерес и в этом случае.

Рассмотрим задачу о распространении нелинейных волн по свободной поверхности бесконечно глубокого слоя намагничивающейся жидкости в приложенном магнитном поле, параллельно горизонтальной оси.

Движение неэлектропроводной намагничивающейся жидкости описывается уравнениями [13]

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt}+\left(\vec{v}^*\nabla^*\right)\vec{v}^*=-\nabla^*\frac{p^*}{\rho^*}+\vec{g}\quad, \tag{1}$$

$rot^*\vec{H}^*=0$; $div^*\mu_1\vec{H}^*=0$; $div^*\vec{v}^*=0$.

Здесь ρ^* -плотность, $\vec{v}^*$ -скорость, p^* -давление, $\vec{g}$ -ускорение свободного падения, $\vec{H}^*$ - напряженность магнитного поля, μ_1 -магнитная проницаемость жидкости.

Введем потенциал магнитного поля $\varphi_i^*\left(\vec{H}_i^*=\nabla^*\varphi_i^*\right)$. Уравнения Максвелла запишутся в виде:

$$rot^*\vec{H}_i^*=0;\;\; div^*\left(\mu_i\nabla^*\varphi_i^*\right)=0;\;\; i=1,2. \tag{2}$$

Введем безразмерные величины:

$$\vec{v}=\frac{\vec{v}^*}{\varepsilon c^*},\xi=\frac{\xi^*k}{\varepsilon};\vec{H}_i=\frac{\vec{H}_i^*}{\varepsilon\left|\vec{H}_{01}^*\right|};\varphi_i=\frac{k\varphi_i^*}{\varepsilon\left|\vec{H}_{0i}^*\right|} \tag{3}$$

$$p=\frac{p^*\rho g z^*-p_0^*}{\varepsilon\rho c^{*2}};\;\; p_0^*=\left\{\mu\cdot\frac{\vec{H}_0^{*2}}{8\pi}\right\};\;\gamma_{xi}=\frac{H_{0ix}^*}{\left|\vec{H}_{oi}^*\right|},$$

$$\left|\vec{H}_{01}\right|=\left|\vec{H}_{02}\right|=H_0;\; x=k(x^*-c^*t^*);\; z=kz^*,$$

где $\vec{H}_i^*$- возмущение поля; i=1,2; c^*- фазовая скорость; $k=2\pi/\lambda$ -волновое число; λ- длина волны; ε-безразмерный малый параметр, который равен

$\varepsilon = k\xi^*_{\max}$ -максимум функции ξ^* , $z^* = \xi^*(x^*, t^*)$ -уравнение свободной поверхности.

В силу (3) имеем

$$\frac{d}{dt^*} = -kc\frac{d}{dx};\ \frac{d}{dx^*} = k\frac{d}{dx};\ \frac{d}{dz^*} = k\frac{d}{dz};$$

С учетом (3) безразмерные уравнения примут вид:

$$-\frac{d\vec{v}}{dx} + \varepsilon(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p;\ div(\vec{v}) = 0 \tag{4}$$

Уравнения Максвелла для магнитного поля:

$$\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_i}{dz^2} = 0;\quad \vec{H}_i = \frac{d\varphi_i}{dx}\vec{e}_x + \frac{d\varphi_i}{dz}\vec{e}_z;\ \text{i=1,2} \tag{5}$$

Где $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ -единичные векторы осей x и z соответственно.

Граничные условия в безразмерном виде записываются следующим образом:

На свободной поверхности $z = \varepsilon\xi(x)$ (6)

$$\varphi_1 = \varphi_2\ ;\ \mu_2 H_{2z} - \mu_2(\gamma_x + \varepsilon H_{2x})\frac{d\xi}{dx} = \mu_1 H_{1z} - \mu_1(\gamma_x + \varepsilon H_{1x})\frac{d\xi}{dx};$$

$$\mu_2\frac{{v_{m2}}^2 k}{gv}\left[2\varepsilon\gamma_x H_{2z}\frac{d\xi}{dx} + 0{,}5\varepsilon(H_{2x}^2 - H_{2z}^2) - \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \gamma_x H_{2x}\right] - \mu_1\frac{v_{m1}^2 k}{gv}\cdot$$

$$\cdot\left[2\varepsilon\gamma_x H_{1z}\frac{d\xi}{dx} + 0{,}5(H_{1x}^2 - H_{1z}^2) - \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \gamma_x H_{1x}\right] - p + \frac{\xi}{v} = \frac{v_c^2 k}{gv}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2}\left[1 - 1{,}5\varepsilon^2\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\right]$$

$$-\frac{d\xi}{dx} = v_z - \varepsilon v_x\frac{d\xi}{dx}\qquad v = \frac{\text{kc}^2}{\text{g}}\quad v_c^2 = \frac{\alpha k}{\rho}\quad v_{mi}^2 = \frac{{H_{0i}}^{*2}}{4\pi\rho}\ \text{i=1, 2.}$$

Добавим условия на бесконечности:

$$\lim_{z\to\infty}\vec{v} = 0\ ;\ \lim_{z\to\infty}\vec{H}_1 = 0\ \ \lim_{z\to\infty}\vec{H}_2 = 0 \tag{7}$$

Будем предполагать также, что волна периодическая и ось направлена вдоль среднего уровня свободной поверхности:

$$\xi(x+2\pi)=\xi(x)\,;\ \xi(-x)=\xi(x)\,;\ \int_0^{2\pi}\xi(x)dx=0 \tag{8}$$

Решение уравнений (4), (5) с граничными условиями (6) , (7) и ограничениями (8) ищем в виде рядов по малому положительному параметру

$$\vec{v}=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\vec{v}_s\,;\quad \xi=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\xi_s\,;\ \vec{H}_1=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\vec{H}_{is}\,;\ \varphi_i=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\varphi_{is}$$

$$p=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s p_s\,;\ \frac{1}{v}=\frac{1}{v_n}\cdot\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\eta_s\right);\ \text{i=1,2,} \tag{9}$$

$$v_n=\frac{k}{gn}\cdot\left[\frac{{v_{mi}}^2 n(\mu_1-\mu_2)^2}{\eta_1+\eta_2}+\frac{g}{k}+{v_c}^2n^2\right],$$

где n-фиксированное целое положительное число, волновое число k считаем заданным; μ_1,μ_2 – магнитная проницаемость жидкости.

Рассмотрим линейную задачу, отвечающую параметру $\varepsilon=0$. Полагая в уравнениях (4) и (6) $\varepsilon=0$, находим уравнения

$$\frac{dv_x}{dx}=\frac{dp}{dx}\,;\ \frac{dv_x}{dx}=\frac{dp}{dz}\,, \tag{10}$$

$$\frac{dv_x}{dx}+\frac{dv_z}{dz}=0\,;\ \frac{dH_{ix}}{dx}+\frac{dH_{iz}}{dz}=0\,;\quad i=1{,}2$$

Граничные условия при $z=0$:

$$\varphi_1=\varphi_2\,;\ \mu_2\left(H_{2z}-\gamma_x\frac{d\xi}{dx}\right)=\mu_1\left(H_{1z}-\gamma_x\frac{d\xi}{dx}\right),$$

$$\frac{{v_{m2}}^2k}{gv}\mu_2\gamma_xH_{2x}-\frac{{v_{m1}}^2k}{gv}\mu_1\gamma_xH_{1x}-p+\frac{\xi}{v}=\frac{{v_c}^2k}{gv}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2}\,;$$

$$v_z=-\frac{d\xi}{dx} \tag{11}$$

Выпишем решение линейной задачи:

$$\xi=\cos(nx)\,;\ v_z=n\cdot\exp(nz)\cdot\sin(nx)$$

$$H_{1x}=-n\gamma_xC\cdot\exp(nz)\cdot\cos(nx)\,;\ H_{1z}=-n\gamma_xC\cdot\exp(nz)\cdot\sin(nx) \tag{12}$$

$$H_{2x}=-n\gamma_xC\cdot\exp(-nz)\cdot\cos(nx)\,;\ H_{2z}=n\gamma_xC\cdot\exp(-nz)\cdot\sin(nx)$$

$C = \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$; $n = 1,2,3...$

Выражения (12) получены из решения линейной задачи (8) при $l_1 \to \infty$, $l_2 \to \infty$.

Выражение для фазовой скорости в размерном виде запишется следующим образом:

$$c = c_0\left(1 - 0{,}5\varepsilon^2\eta_2\right) = \sqrt{gv_n / k}\left(1 - 0{,}5\varepsilon^2\eta_2\right) = (1 - 0{,}5\varepsilon^2\eta_2)\sqrt{\frac{v_{m1}^2 k(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho}} \qquad (13)$$

$$\eta_2 = 0{,}5A^{(1)} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\left[\frac{k}{4\pi\rho}(\mu_1 - \mu_2)^2 + \left(g + \frac{\alpha k^2}{\rho}\right)(\mu_1 + \mu_2)\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{aligned}&\left(12gA^{(1)} + 12\frac{\alpha k^2}{\rho}\cdot A^{(1)} + 5g + \frac{2\alpha k^2}{\rho}\right)(\mu_1 + \mu_2) + \frac{k}{4\pi\rho}(\mu_1 - \mu_2)\cdot\\ &\left[2A^{(1)}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_2 L_2 + \mu_1 K_3 + \frac{1}{2}(7\mu_2 - 3\mu_1)\right]\end{aligned}\right\}$$

Здесь и далее полагаем $n = 1$.

Учет членов с множителем ε^2 в (13) позволяет определить зависимость фазовой скорости от высоты волны, имеющей порядок 0(ε). Зависимость фазовой скорости от высоты волны впервые установил Стокс для нелинейных гравитационных волн [14, 15].

При $H_{01}^{\ *} = H_{02}^{\ *} = 0$ и $\alpha = 0$ формула (13) переходит в выражение

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)}$$

При отсутствии магнитного поля в линейном приближении ($\varepsilon = 0$) из (13) следует: $c = \sqrt{\dfrac{g}{k} + \dfrac{\alpha k}{\rho}}$

Выражение (13) может быть записано также в виде дисперсионного уравнения, выражающего зависимость частоты колебания волны ($\omega = ck$) от волнового числа k:

$$\omega^2 = \left[\frac{V_{m1}^2 k(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2} + gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}\right]\left(1 - \frac{\varepsilon^2 \eta_2}{2}\right)^2 \qquad (14)$$

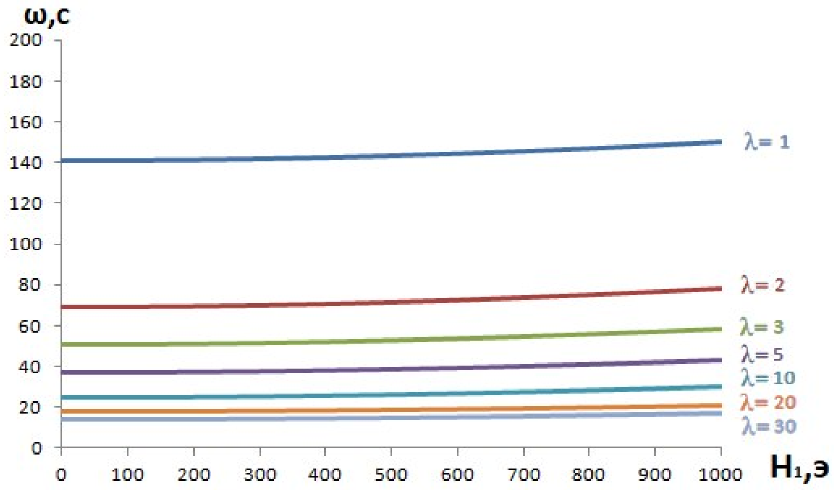

Рис.1а. Зависимость частоты колебания волны ($\varepsilon = 0$) от величины магнитного поля при $\mu_1 = 1{,}1$;

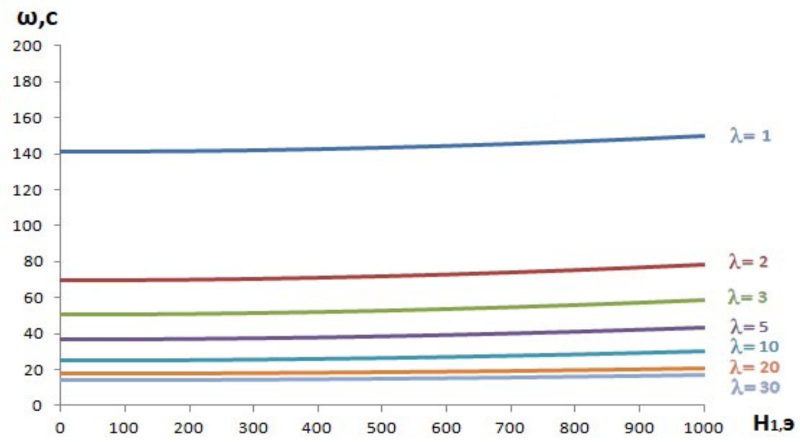

рис.1б. Зависимость частоты колебания волны ($\varepsilon = 0{,}01$) от величины магнитного поля при $\mu_1 = 1{,}1$;

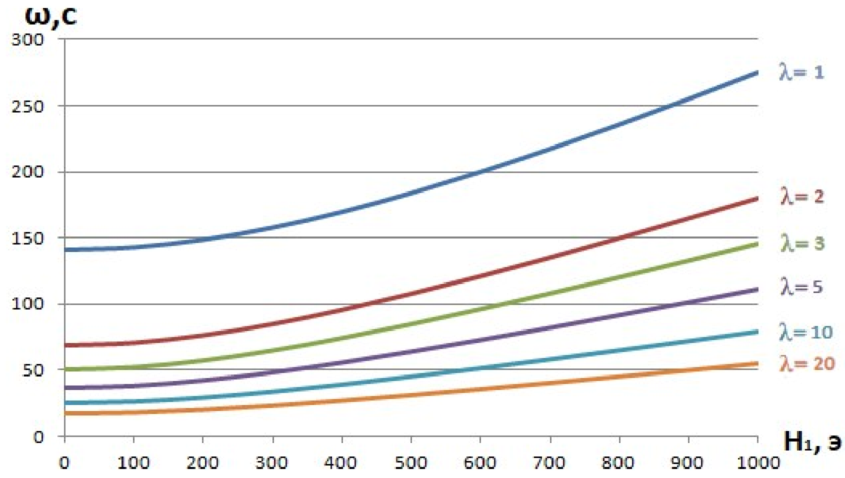

Рис.2а. Зависимость частоты колебания волны ($\varepsilon = 0$) от величины магнитного поля при $\mu_1 = 1{,}5$;

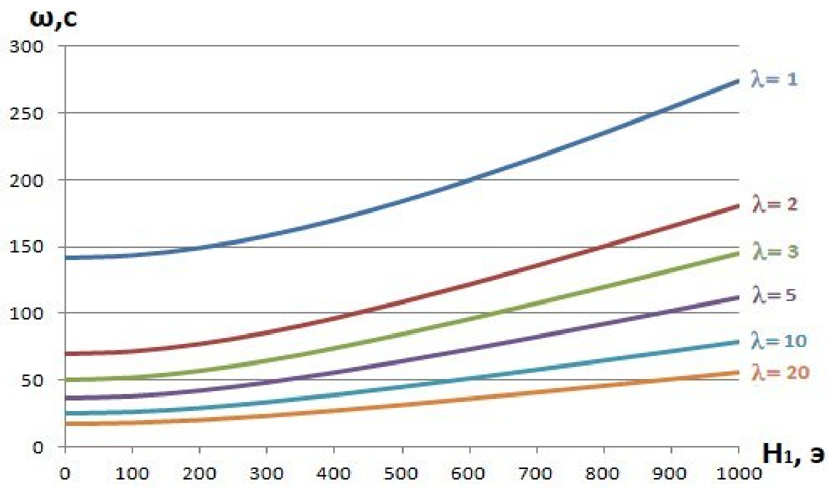

Рис. 2б. Зависимость частоты колебания волны ($\varepsilon = 0{,}01$) от величины магнитного поля при $\mu_1 = 1{,}5$

На рис.1 и рис.2 приведены графики зависимости частоты колебания волны от величины магнитного поля для μ_1=1.1 и μ_2=1.5 соответственно, для различных длин волн (от 1 до 30 см), рассчитанные по формуле (14), при $|H^*_{01}| = |H^*_{02}| = |H^*|$, $\varepsilon = 0$ (рис.2.2а, 2.3а) и $\varepsilon = 0{,}01$ (рис. 2.2б, 2.3.б) для следующих значений параметров: α=50 дин/см; ρ=0,9 г/см^3; g=980 см/с^2; μ_2=1. Из графиков видно, что при заданной длине волны частота с увеличением напряженности магнитного поля растет как в линейном, так и в нелинейном приближении. В нелинейной волне ($\varepsilon = 0{,}01$) значение частоты несколько превышает ее значиние в линейном случае при одинаковых значениях длины волны и напряженности магнитного поля. При значениях λ>30 см частота практически перестает зависеть от напряженности магнитного поля и в линейном и в нелинейном случаях. С уменьшением длины волны крутизна графика увеличивается. Частота колебания волны увеличивается с увеличением магнитной проницаемости жидкости.

Литература

1. Баштовой В.Г., Тайц Е.М. Об одном классе точных решений термомеханики магнитных жидкостей// XI Рижское совещание по магнитной гидродинамике:Тез.докл. Т.3. – Рига. 1984. С. 55-58.
2. Блум Э.Я., Михайлов Ю.А., Озолс Р.Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. – Рига: Зинатне. 1980. – 354 с.
3. Гогосов В.В., Налетова В.А. и др. Теория “мелкой воды” для магнитной жидкости // Одиннадцатое Рижское совещание по магнитной гидродинамике: Тез.докл. Т.3. – Саласпилс. 1984. С. 79-82.
4. Десятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике/ Тезисы докладов. – Саласпилс. 1981. – Т.2. – 137 с., Т.3. – 144 с.
5. Прохоренко П.П. Применение магнитных жидкостей в технической акустике // Магнитные жидкости: научные и прикладные исследования. – Минск: ИТМО им.А.В.Лыкова. 1983. – С. 56-61.
6. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.: ИВТАН, 1985. -188 с.
7. Магнитные жидкости: научные и прикладные исследования/ Сб. Научных трудов. – Минск. 1983. – 152 с.
8. Фертан В.Е. Магнитные жидкости: Справ. пособ. – Мн.: Высш. шк. 1988. - 184 с.

9. Рекс А.Г. Равновесные формы и устойчивость ограниченных объемов магнитной жидкости со свободной поверхностью. – Пермь. 1987. 16 с.

10. Devitt E.B., Melcher J.R. Surfase electrohydrodynamics with high-friquency fields// Phys. fluids. 1965. Vol.8, N 6. pp.1193-1195.

11. Алешин А.В., Онищенко А.А. Влияние магнитного поля на процесс обработки сточных вод гальванических производств и осадка //Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1046.

12. Маколова Л.В. Проблема снижения негативного воздействия транспортной сферы на окружающую среду на основе функционирования механизма избавления от отработанных масел //Инженерный вестник Дона, 2013, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1763.

13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука. 1986. – 736 с.

14. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука. 1977. – 816 с.

15. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves// Math. And Phys. Papers. 1880.Vol.1. – pp. 197-229.

References

1. Bashtovoj V.G., Tajc E.M. XI Rizhskoe soveshhanie po magnitnoj gidrodinamike:Tez.dokl. T.Z. Riga. 1984. pp. 55-58.

2. Blum Je.Ja., Mihajlov Ju.A., Ozols R.Ja. Teplo- i massoobmen v magnitnom pole [Heat and mass transfer in a magnetic field]. Riga: Zinatne. 1980. – 354 p.

3. Gogosov V.V., Naletova V.A. i dr. Odinnadcatoe Rizhskoe soveshhanie po magnitnoj gidrodinamike: Tez.dokl. T.Z. Salaspils. 1984. pp. 79-82.

4. Desjatoe Rizhskoe soveshhanie po magnitnoj gidrodinamike [The Tenth Riga meeting on magnetic hydrodynamics] Tezisy dokladov. Salaspils. 1981. T.2. 137 p., T.3. 144 p.

5. Prohorenko P.P. Magnitnye zhidkosti: nauchnye i prikladnye issledovanija. Minsk: ITMO im.A.V.Lykova. 1983. pp. 56-61.

6. Bashtovoj V.G., Berkovskij B.M., Vislovich A.N. Vvedenie v termomehaniku magnitnyh zhidkostej [Introduction to thermomechanics of magnetic fluids]. M.: IVTAN, 1985.-188 p.

7. Magnitnye zhidkosti: nauchnye i prikladnye issledovanija [Magnetic fluids: scientific and applied research] Sb. Nauchnyh trudov. Minsk. 1983. 152 p.

8. Fertan V.E. Magnitnye zhidkosti [Magnetic fluids]: Sprav. posob. Mn.: Vyssh. shk. 1988. 184 p.

9. Reks A.G. Ravnovesnye formy i ustojchivost' ogranichennyh objemov magnitnoj zhidkosti so svobodnoj poverhnost'ju [Equilibrium forms and stability of bounded volumes of a magnetic fluid with a free surface]. Perm'. 1987. 16 p.

10. Devitt E.B., Melcher J.R. Surfase electrohydrodynamics with high-friquency fields// Phys. fluids. 1965. Vol.8, N 6. pp.1193-1195.

11. Aleshin A.V., Onishhenko A.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1046.

12. Makolova L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1763.

13. Landau L.D., Lifshic E.M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. M.: Nauka. 1986. 736 p.

14. Sretenskij L.N. Teorija volnovyh dvizhenij zhidkosti [Theory of wave motions of a fluid]. M.: Nauka. 1977. 816 p.

15. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves Math. And Phys. Papers. 1880. Vol.1. pp. 197-229.