

## Динамическая модель Леонтьева с нелинейными предикторами для валового внутреннего продукта России

*С.И. Носков, И.В. Овсянников, А.П. Медведев*

*Иркутский государственный университет путей сообщения*

**Аннотация:** В работе представлены обычная и динамическая кусочно-линейная модель Леонтьева с нелинейными предикторами для валового внутреннего продукта России. В качестве независимых переменных использованы: численность трудоспособного населения, обороты розничной торговли, капитальные инвестиции. В правую часть модели наряду с текущим значением объема инвестиций включены и его лаговые значения с запаздыванием на один и два года. Рассчитаны средняя относительная ошибка аппроксимации каждой модели и значения вектора срабатываний независимых переменных.

**Ключевые слова:** модель Леонтьева, нелинейные предикторы, валовой внутренний продукт, метод наименьших модулей, средняя относительная ошибка аппроксимации, вектор срабатываний, задача линейно-булева программирования.

Исследование закономерностей создания валового внутреннего продукта (ВВП) в различных странах вызывают неизменный интерес среди специалистов по математическому моделированию. Так, в работе [1] для расчета и прогнозирования ВВП Северной Македонии применяются линейная и логистическая регрессии. При этом используются данные из Всемирной организации, которая занимается формированием статистической информации по всем странам мира. Объясняется, в чем плюсы и минусы обеих моделей, когда следует использовать первую, а когда вторую, и в чем их различия. В [2] собраны данные о реальном ВВП и уровне безработицы в США с 1948 по 2023 год, изучена их взаимосвязь с помощью линейной и нелинейной регрессии и спрогнозированы их будущие тенденции с помощью модели ARIMA. Сравнивая линейную регрессию и нелинейную регрессию между темпами роста ВВП и изменением уровня безработицы, в данном исследовании установлено, что нелинейная регрессия может более точно выразить взаимосвязь между этими двумя факторами. Прогнозы темпов роста ВВП и уровня безработицы, полученные с помощью модели ARIMA,

---

показывают относительно оптимистичное будущее со здоровым ростом ВВП и низким уровнем безработицы. В статье [3] с помощью пошаговой множественной линейной регрессии исследуется причинно-следственная связь между четырьмя показателями: "количество депозитных счетов на 1000 человек", "количество кредитных счетов на 1000 человек", "количество отделений банков на 100 000 человек взрослого населения", "количество банкоматов на 100 000 человек взрослого населения" и "ВВП на душу населения".

Исследование [4] посвящено модификации трехпроходного регрессионного фильтра, чтобы сделать его применимым к большим наборам данных смешанной частоты с рваными краями в контексте прогнозирования. Полученный хорошо сочетается с альтернативными процедурами оценки факторов смешанной частоты с точки зрения теоретических свойств и фактического прогнозирования и предсказания ВВП для США и ряда других стран. В работе [5] с помощью модели пороговой регрессии изучается динамика ВВП Турции. В [6] проведен анализ панельных данных о влиянии изменения реального государственного долга, реального частного долга и дефлированных цен на жилье на ВВП в отдельных европейских странах. Использовались обычная линейная и авторегрессионная модели. Исследование подтвердило сильное негативное влияние величины государственного долга с нулевым, однолетним и двухлетним лагами на ВВП. Это неудивительно, если учесть ограниченную функциональность Европейского центрального банка как кредитора последней инстанции для стран валютного союза, то есть для большинства анализируемых стран.

В статье [7] сделан акцент на использовании больших массивов данных в моделях квантильной регрессии для прогнозирования условного распределения роста ВВП США. Чтобы учесть возможные нелинейности, задействованы несколько нелинейных спецификаций. Полученные модели

---

имеют огромную размерность, и поэтому применяется набор сужающих процедур. Применяются быстрые вариационные аппроксимации Байеса для расчета апостериорного распределения коэффициентов и латентных состояний. В работе [8] анализируется связь между темпами роста ВВП и структурой налоговых поступлений. База данных содержит данные по 25 странам ЕС, которые являются открытыми экономиками на едином европейском рынке. Период начинается с 1996 г. и длится до 2018 г. Для типов налогов используется классификация Eurostat. Динамические GMM-тесты применяются для уравнений ВВП, расходах, выпуске и расширенных детерминантами категорий налогообложения. Общий вывод заключается в том, что налоговая структура, основанная на потребительском налоге на производство и подоходном налоге, может поддерживать экономический рост, в то время как более высокий вес социальных взносов является разрушительным фактором для роста доходов.

Статья [9] посвящена применению для прогнозирования ВВП агрегированной регрессионной модели и нейросетевой модели, построенной на основе традиционной линейной регрессии. Среди независимых переменных наиболее существенное влияние на ВВП оказывают амортизация и доход, а наименьшее - заработная плата. В [10] с помощью скользящих регрессий разрабатываются прогнозные модели квартальной динамики ВВП в еврозоне и ее крупнейших экономиках. Интересные результаты приведены в статьях [11, 12].

Цель настоящей работы состоит в построении кусочно-линейной производственной функции Леонтьева для описания динамики ВВП России, в которой для каждой независимой переменной выбрано лучшее для нее арифметическое преобразование (степенное, логарифмическое или показательное) путем применения описанного в [13] алгоритма, основанного на сведении этой задачи к задаче линейно-булева программирования (ЛБП),

---

позволяющий оценить параметры модели путем минимизации функции потерь, соответствующей методу наименьших модулей.

В качестве информационной базы исследования воспользуемся статистической информацией за 2003 – 2022 гг., размещенной на сайтах [14 - 16].

Введем следующие обозначения;

$y$  - ВВП в текущих долларах, млрд. дол.,

$x_1$  – численность трудоспособного населения Российской Федерации, млн. чел.,

$x_2$  - обороты розничной торговли, млн. руб.,

$x_3$  - капитальные инвестиции, млрд. дол.

Поскольку, как известно (см., например, [17]), эффект от инвестиций проявляется с некоторым запаздыванием, введем также две лаговые переменные:

$x_3^1$  - капитальные инвестиции прошлого года по отношению к текущему, млрд. дол.,

$x_3^2$  - капитальные инвестиции позапрошлого года по отношению к текущему, млрд. дол.

Вначале с помощью программы [18] построим обычную функцию Леонтьева, для которой объем ВВП определяется значением лимитирующего фактора, при этом любое наращивание значений остальных факторов не приводит к росту ВВП (см, в частности, [19]):

$$y = \min(29.1429x_1, 0.000142x_2, 4.44127x_3, 6.5763x_3^1, 8.8415x_3^2),$$

(1)

$$E = 3.69\%, \lambda = (3, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3).$$

Здесь  $E$  – средняя относительная ошибка аппроксимации,  $\lambda$  – вектор срабатываний, где  $\lambda_k$  - номер переменной номер переменной в правой части модели (1), значение которой, с учетом значения параметра, является

наибольшим в  $k$ -ом наблюдении выборки, то есть номер переменной, которая «сработала» в  $k$ -ом наблюдении.

Динамическая (за счет включения в ее правую часть лаговых переменных для инвестиций) модель (1), в соответствии с низким значением критерия  $E$ , является весьма адекватной исследуемому объекту. Анализ компонент вектора срабатываний указывает на то, что в четырнадцать годах из двадцати объем ВВП определялся объемами текущих инвестиций. При этом на переменной  $x_1$  модель «не сработала» ни разу.

Построим теперь аналог модели (1) с возможностью преобразований ее предикторов:

$$y = \min(356.6042 \log_2(x_1), 0.000129x_2, 4.4345x_3, 110.171\sqrt{x_3^1}, 261.9602 \log_2(x_3^2)), \quad (2)$$

$$E = 3.04\%, \lambda = (3, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3).$$

Очевидно, что модель (2) существенно точнее модели (1). И, хоть по-прежнему текущие инвестиции остались наиболее значимым фактором, каждая независимая переменная на предыстории «сработала» по крайней мере один раз.

При этом, из всех возможных преобразований (а всего их 14) переменных, в результате работы упомянутого алгоритма были выбраны  $\log_2(x)$  и  $\sqrt{x}$ , а переменные  $x_2$  и  $x_3$  не были подвергнуты преобразованиям.

Модель (2) может успешно использоваться для выполнения краткосрочных вариантных прогнозных расчетов будущих значений ВВП.

### Литература

1. Ramadani L., Turkeshi N., Rexhepi S., The prediction of growth of the gdp of north macedonia for 2024 using logistic and linear regression model. Asian Journal of Economics, Business and Accounting, 2024. vol. 24, № 3, pp. 221-228. URL: [doi.org/10.9734/ajeba/2024/v24i31255](https://doi.org/10.9734/ajeba/2024/v24i31255)
-



2. Zhong S., The research and forecasts on real gdp growth, the unemployment rate in the United States, Highlights in Business. Economics and Management, 2024. vol. 24, pp. 159-165. URL: [doi.org/10.54097/xgaq4779](https://doi.org/10.54097/xgaq4779)
  3. Sonkar S., Sarkar A., Exploring the direct relationship between gdp per-capita, financial inclusion. Annals of Management and Organization Research, 2020. vol. 1, no. 3, pp. 187-202. URL: [doi.org/10.35912/amor.v1i3.415](https://doi.org/10.35912/amor.v1i3.415)
  4. Hepenstrick C., Marcellino M., Forecasting gross domestic product growth with large unbalanced data sets: the mixed frequency three-pass regression filter. Journal of the Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society, 2018. vol. 182, № 1, pp. 69-99. URL: [doi.org/10.1111/rssa.12363](https://doi.org/10.1111/rssa.12363)
  5. İyidoğan P., Turan T., Government size, economic growth in Turkey: a threshold regression analysis. Prague Economic Papers, 2017. vol. 26, № 2, pp. 142-154. URL: [doi.org/10.18267/j.pep.600](https://doi.org/10.18267/j.pep.600)
  6. Snieška V., Burksaitiene D., Panel data analysis of public, private debt, house price influence on gdp in the European Union countries. Engineering Economics, 2018. vol. 29, № 2. URL: [doi.org/10.5755/j01.ee.29.2.20000](https://doi.org/10.5755/j01.ee.29.2.20000)
  7. Prüser J., Huber F., Nonlinearities in macroeconomic tail risk through the lens of big data quantile regressions. Journal of Applied Econometrics, 2023. vol. 39, № 2, pp. 269-291. URL: [doi.org/10.1002/jae.3018](https://doi.org/10.1002/jae.3018)
  8. Kutasi G., Marton Á., The optimal tax structure from gdp-growth perspective. Revista Finanzas Y Política Económica, 2024. vol. 16, № 1, pp. 121-143. URL: [doi.org/10.14718/revfinanzpolitecon.v16.n1.2024.6](https://doi.org/10.14718/revfinanzpolitecon.v16.n1.2024.6)
  9. Mu Sun E., The prediction of gdp by aggregate accounting information. A neural network model. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication, 2023. vol. 11, № 9, pp. 1426-1438. URL: [doi.org/10.17762/ijritcc.v11i9.9121](https://doi.org/10.17762/ijritcc.v11i9.9121)
-



10. Gajewski P., Nowcasting quarterly gdp dynamics in the euro area – the role of sentiment indicators. *Comparative Economic Research. Central and Eastern Europe*, 2014, vol. 17, № 2, pp. 5-23. URL: [doi.org/10.2478/cer-2014-0011](https://doi.org/10.2478/cer-2014-0011)
11. Цвиль М.М., Шумилина В.Е., Нестерова А.В. Эконометрический анализ валового внутреннего продукта на душу населения в Российской Федерации // *Инженерный вестник Дона*, 2018, № 1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4749/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4749/).
12. Гафарова, Л.А. Социальные детерминанты экономического роста: неравенство в распределении доходов // *Инженерный вестник Дона*, 2014, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2724/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2724/).
13. Носков С.И., Попов Е.С. Подход к построению функции Леонтьева с нелинейными предикторами // *Известия ТулГУ. Технические науки*. 2024. № 2. С. 105-108.
14. ВВП России // ТАдвайзер (TAdviser). URL: [tadviser.ru/index.php/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F:%D0%92%D0%92%D0%9F\\_%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B8](http://tadviser.ru/index.php/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F:%D0%92%D0%92%D0%9F_%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B8)
15. Аналитика // GlobalCIO. URL: [globalcio.ru/compass/analytics/](http://globalcio.ru/compass/analytics/).
16. ВВП России: таблица по годам с 1991 г. Гогов.ру. URL: [gogov.ru/articles/vvp-rf](http://gogov.ru/articles/vvp-rf)
17. Скляр А.Я. Модель динамики развития производства с запаздыванием отдачи от инвестиций // *Вестник МГТУ МИРЭА*. № 4-2 (9). С. 214-220. 2015.
18. Носков С.И., Хоняков А.А., Глухов Н.И. Свидетельство о регистрации № 2019665873. Программный комплекс построения кусочно-линейных регрессий // 2019. URL: [fips.ru/iiss/document.xhtml?faces-redirect=true&id=ae1d316ed85c0d1ab50f3717aff6ed65](http://fips.ru/iiss/document.xhtml?faces-redirect=true&id=ae1d316ed85c0d1ab50f3717aff6ed65)

19. Носков С.И., Лоншаков Р.В. Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем, 2008. № 6. С. 63-64.

### References

1. Ramadani L., Turkeshi N., Rexhepi S. Asian Journal of Economics, Business and Accounting, 2024. vol. 24, № 3, pp. 221-228. URL: [doi.org/10.9734/ajeba/2024/v24i31255](https://doi.org/10.9734/ajeba/2024/v24i31255)
2. Zhong S. Economics and Management, 2024. vol. 24, pp. 159-165. URL: [doi.org/10.54097/xgaq4779](https://doi.org/10.54097/xgaq4779)
3. Sonkar S., Sarkar A. Annals of Management and Organization Research, 2020. vol. 1, № 3, pp. 187-202. URL: [doi.org/10.35912/amor.v1i3.415](https://doi.org/10.35912/amor.v1i3.415)
4. Hepenstrick C., Marcellino M. Journal of the Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society, 2018. vol. 182, № 1, pp. 69-99. URL: [doi.org/10.1111/rssa.12363](https://doi.org/10.1111/rssa.12363)
5. İyidoğan P., Turan T. Prague Economic Papers, 2017. vol. 26, № 2, pp. 142-154. URL: [doi.org/10.18267/j.pep.600](https://doi.org/10.18267/j.pep.600)
6. Snieška V., Burksaitiene D. Engineering Economics, 2018. vol. 29, № 2. URL: [doi.org/10.5755/j01.ee.29.2.20000](https://doi.org/10.5755/j01.ee.29.2.20000)
7. Prüser J., Huber F. Journal of Applied Econometrics, 2023. vol. 39, № 2, pp. 269-291. URL: [doi.org/10.1002/jae.3018](https://doi.org/10.1002/jae.3018)
8. Kutasi G., Marton Á. Revista Finanzas Y Política Económica, 2024. vol. 16, № 1, pp. 121-143. URL: [doi.org/10.14718/revfinanzpolitecon.v16.n1.2024.6](https://doi.org/10.14718/revfinanzpolitecon.v16.n1.2024.6)
9. Mu Sun E. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication, 2023. vol. 11, № 9, pp. 1426-1438. URL: [doi.org/10.17762/ijritcc.v11i9.9121](https://doi.org/10.17762/ijritcc.v11i9.9121)
10. Gajewski P. Comparative Economic Research. Central and Eastern Europe, 2014, vol. 17, № 2, pp. 5-23. URL: [doi.org/10.2478/cer-2014-0011](https://doi.org/10.2478/cer-2014-0011)



11. М. М. Cvil, V.E. Shumilova, A. V. Nesterova, Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, № 1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4749/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4749/).
12. L.A. Gafarova, Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2724/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2724/).
13. S.I. Noskov, E.S. Popov, Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki, 2024. №. 2. pp. 105-108.
14. TAdviser. URL: [tadviser.ru/index.php/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F:%D0%92%D0%92%D0%9F\\_%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B8](http://tadviser.ru/index.php/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F:%D0%92%D0%92%D0%9F_%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B8)
15. Analitika [Analytics], GlobalCIO. URL: [globalcio.ru/compass/analytics/](http://globalcio.ru/compass/analytics/).
16. VVP Rossii: tablica po godam s 1991 g. [GDP of Russia. Schedule since 1991], Gogov.ru. URL: [gogov.ru/articles/vvp-rf](http://gogov.ru/articles/vvp-rf)
17. Sclar A.Y., Vestnik MGTU MIREA, 2015. № 4-2 (9). pp. 214-220.
18. Noskov S.I., Honyakov A.A., Gluhov N.I. Svidetel'stvo o registracii № 2019665873. Programmnyj kompleks postroeniya kusochno-linejnyh regressij [Program for piecewise linear regression modeling]. 2019. URL: [fips.ru/iiss/document.xhtml?facesredirect=true&id=ae1d316ed85c0d1ab50f3717aff6ed65](http://fips.ru/iiss/document.xhtml?facesredirect=true&id=ae1d316ed85c0d1ab50f3717aff6ed65)
19. Noskov S.I., Lonshakov R.V., Informacionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnyh system, 2008. № 6. pp. 63-64.

**Дата поступления: 19.05.2024**

**Дата публикации: 28.06.2024**