

Нелинейная связанная задача нестационарной теплопроводности в двухмерном пространстве и ее численно-аналитическое решение

В.Н. Сидоров, А.М. Примкулов, Е.А. Макарова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: На примере ограждающей конструкции здания, рассмотрена задача связанной нелинейной нестационарной теплопроводности, в которой учтено влияние меняющейся влажности на теплотехнические характеристики неоднородной теплопроводящей среды. Влажность рассматривалась как переменная величина, зависящая от влаго- и паропроницаемости среды, а также от объема конденсации и испарения влаги. При решении задачи использован численно-аналитический метод, в котором модель рассматриваемого теплопроводящего объекта, дискретизировалась методом конечных элементов по пространственным координатам, а по временной переменной решение находилось аналитически. Линеаризация уравнений осуществлялась методом Пикара. На примере типового проекта узла примыкания трехслойной стены к плите перекрытия решен практический пример на основе построенной математической модели и по предложенной методике решения. Результаты сопоставлены и результатами решения аналогичной линейной задачи.

Ключевые слова: нелинейная нестационарная задача, численно-аналитический метод, теплопроводность, испарение, конденсация.

1. Введение

Целью выполнения настоящей работы является определение степени влияния влажностного режима неоднородной ограждающей конструкции на ее теплопроводящие свойства в случаях, когда граничные условия, как по температуре, так и по влажности, переменны во времени. Для этого, при установленной зависимости коэффициента теплопроводности от влажности необходимо определить итоговые, меняющиеся во времени температурные поля внутри конструкции. Для построения соответствующей математической модели, сделаны следующие допущения:

(i) *Силовые воздействия на ограждающие конструкции не рассматриваются, в связи с чем, геометрия, плотность и сплошность материалов считаются постоянными;*

(ii) *Материал скелета капиллярно-пористой среды (материал конструкции) является химически инертным и не меняет свой состав под действиями переменного температурно-влажностного режима;*

(iii) *Жидкости, кроме воды, в составе конструкций содержатся в пренебрежимо малой концентрации и не влияют на температурно-влажностный режим;*

(iv) *Температурно-влажностный режим внутри конструкции может изменяться благодаря процессам конденсации и испарения только в смеси воздуха и пара (далее бинарный газ). Все прочие газы имеют пренебрежимо малую концентрацию;*

(v) *В любой точке капиллярно-пористого тела скелет, влага и бинарный газ находятся в локальном термодинамическом равновесии;*

(vi) *Теплопроводность материала в диапазоне температур, действующей на тело, линейно зависит от объема содержащейся в ней влаги в жидкой фазе, при этом чем выше влажность, тем выше теплопроводящие свойства материала;*

(vii) *Коэффициент паропроницания и коэффициент влагопроницания расчетного пространства, являются величинами постоянными в диапазоне рассматриваемых температур и влажности.*

2. Материалы и методы

Неоднородные ограждающие конструкции зданий можно рассматривать, как сочетание однородных капиллярно-пористых тел различной геометрии с индивидуальными физическими характеристиками, состоящими из:

скелета - основной материал, из которого изготовлена конструкция - инертный минеральный материал и некий вяжущий состав;

влаги – вода, используемая при производстве строительных материалов и/или увлажнение за счет выпадения на их поверхность осадков и адсорбции влаги из воздуха;

газов - поры и капилляры строительных материалов содержат различные газы, в их числе воздух, радон, метан, сероводород, оксид азота, озон, взвешенные частицы (пыль и пр.). Согласно допущению (*iv*) рассматривается только бинарный газ.

На капиллярно-пористое тело оказываются воздействия в виде градиентов различных факторов между его внутренней и наружной поверхностью [1-3]. В настоящем труде, для рассмотрения приняты только следующие физические процессы тепло-массо переноса (потоков):

1. Перенос масс за счет концентрационного градиента, выстраиваемого по закону Фика. В случае бинарного газа побудителем тока выступает разница парциального давления пара на поверхностях тела;

2. Перенос жидкой влаги – диффузионное распределение жидкой воды за счет разницы в влагосодержании;

3. Перенос влаги за счет его фазового преобразования - эффекты испарения и конденсации;

4. Перенос тепла за счет теплопроводности среды и перепада температур, выстраиваемого по закону Фурье.

Для формирования математической модели процессов тепло-массо переноса, воспользуемся теорией Онзагера [2,3], уравнениями законов Фика, Фурье, Дарси, а также взаимозависимостями [4], выведенными для идеального газа. Взаимное влияние потоков по эффектам Дюфора и Сорэ [1] опущено, как имеющие незначительное влияние на формирование температурных полей внутри ограждающих конструкций, встречающихся в строительной практике. Уравнения потоков (переноса) преобразованы с

учетом законов сохранения масс, энергии, и, для рассматриваемых физических процессов, принимают следующий вид:

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\tilde{D} \nabla \phi) + Q_h \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (k_v \nabla p) \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k_f \nabla h) + Q_f, \quad (3)$$

где

\tilde{D}, k_v, k_f - феноменологические кинетические коэффициенты физических процессов [2,3] и соответственно представляют собой: \tilde{D} - коэффициент теплопроводности, k_v - коэффициент паропроницаемости, k_f - коэффициент влагопереноса; ϕ, p, h - соответственно температуру, парциальное давление пара, влагосодержание; $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ - изменение температуры во времени; $\frac{\partial p}{\partial t}$ - изменение парциального давления пара во времени; $\frac{\partial h}{\partial t}$ - изменение влагосодержания во времени; λ - коэффициент, равный произведению теплоемкости и плотности материала; Q_h - поступление или отбор тепла внутри тела за счет конденсации или испарения (изменения энтальпии материала в связи с изменением влагосодержания); Q_f - поступление или отбор влаги за счет конденсации или испарения.

Величины Q_h, Q_f являются побуждающими воздействиями для процессов теплопереноса и влагопереноса, действующими внутри тела, которые могут быть вычислены на основании законов идеального газа и термодинамики [4].

$$Q_f = \frac{1}{\gamma_w} \Theta A \left(\frac{0.0022 k_B}{p_{atm} m} p - \frac{0.0022 k_B}{p_{atm} m} p_{ws} \right), \quad (4)$$

где

$\Theta = (25 + 19 v)$ - коэффициент испарения в $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{ час}} \right]$ здесь v - скорость движения воздуха в $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$ (в исследуемой задаче скорость равна нулю); γ_w -

удельный вес воды; A - площадь контакта с водой в $[м^2]$; p - упругость пара (парциальное давление пара) в $[Па]$; p_{atm} - абсолютное давление в $[Па]$ (атмосферное давление); m - молекулярная масса сухого воздуха; k_B - постоянная Больцманна; p_{ws} - упругость насыщенного пара в конструкции в $[Па]$ для заданной температуры.

$$p_{ws} = 610.94 e^{\left(\frac{17.625 \phi}{\phi + 243.04}\right)} \quad (5)$$

Формула (5) предложена Магнусом [1], в ней ϕ - температура в $[°C]$.

Теплота испарения/конденсации зависит от температуры и может быть приблизительно вычислена по следующей эмпирической формуле [1] в ккал:

$$Q_h \approx 595 Q_f \gamma_w \quad (6)$$

Согласно (4), (6) процессы тепломассопереноса связаны через процесс конденсации и испарения. Влияние случайных факторов на теплоизоляционные свойства ограждающих конструкций широко изучаются и в том или ином виде представлены в строительных нормах (СП 50.13330.2012 “Тепловая защита зданий”). Оценка влияния этих вероятностных изменений на тепловые потоки рассмотрены Конироджиком [5]. Кроме этого, существуют зависимости коэффициента теплопроводности различных материалов от температуры и влагосодержания [1,6].

Предложенная в [6] зависимость коэффициента теплопроводности от влажности линейная и показывает, что с увеличением влажности материала его коэффициент теплопроводности растет, что соответствует предположению (vi). В этом случае коэффициент \tilde{D} в (1) становится переменной величиной, которую можно представить зависимостью от h в следующем виде:

$$\tilde{D} = D(h) = D_k \frac{h}{\gamma_m} + D_f, \quad (7)$$

где $D(h)$ или D - функция коэффициента теплопроводности от влагосодержания; D_k, D_f - коэффициенты пропорциональности; h - значение

влажностного содержания, полученное при решении уравнения влагопереноса (3); γ_m - удельный вес сухого теплопроводящего материала.

Для решения системы уравнений (1), (2), (3) необходимы граничные и начальные условия. Обозначим пространственную область определения как Ω , тогда поверхность тела, контактирующую с внутренней средой, обозначим - $\partial\Omega_{in}$, а с наружной - $\partial\Omega_{out}$. Расчетная область $(\Omega \times T)$, где $T \in [0, t_d]$ – рассматриваемый отрезок времени. В качестве граничных условий для (1) приняты условия третьего рода, для (2) – первого рода, для (3) – нулевой функцией. Начальные условия для (3) уравнения приняты также в виде нулевой функции. По начальному распределению температуры и парциального давления пара приняты значения, которые получены при решении стационарной линейной задачи теплопроводности и паропроницания в начальный момент времени $t = 0$.

Метод решения

Решение дифференциальных уравнений по пространственным координатам находится численно методом конечных элементов (МКЭ) с использованием методики Галеркина [7,8]. После такого преобразования, уравнения принимают вид системы дифференциальных уравнений первого порядка с переменными для задачи теплопроводности, и постоянными коэффициентами для остальных задач, где единственной переменной выступает t .

$$\frac{d\{\bar{\Phi}\}}{dt} = [A(t)]\{\bar{\Phi}\} + \{F(t)\} \quad (8)$$

$$\frac{d\{\bar{p}\}}{dt} = [A_p]\{\bar{p}\} + \{F_p(t)\} \quad (9)$$

$$\frac{d\{\bar{h}\}}{dt} = [A_h]\{\bar{h}\} + \{F_h(t)\}, \quad (10)$$

где $[A(t)]$ – матрица, элементы которой непостоянны во времени, что определяет нелинейность самой задачи; $F(t)$ - вектор функций от временной переменной t , характеризующий мощность возможных источников тепла;

$[A_h]$ - матрица скалярных величин диффузионной проводимости влаги; $F_h(t)$ - вектор функциональных зависимостей побуждающих воздействий на влагоперенос; $[A_p]$ - матрица скалярных величин диффузионной проводимости пара; $F_p(t)$ - вектор функциональных зависимостей побуждающих воздействий на паропроницание.

Аналитические решения (8), (9), (10) имеют следующий вид [9]:

$$\{\bar{\phi}\}(t) = e^{\int_0^t [A(\tau)] d\tau} \{\phi_0\} + e^{\int_0^t [A(\tau)] d\tau} \int_0^t e^{-\int_0^\xi [A(\tau)] d\tau} \{F(\xi)\} d\xi \quad (11)$$

$$\{\bar{p}\}(t) = e^{[A_p]t} \{p_0\} + \int_0^t e^{[A_p](t-\xi)} F_p(\xi) d\xi \quad (12)$$

$$\{\bar{h}\}(t) = e^{[A_h]t} \{h_0\} + \int_0^t e^{[A_h](t-\xi)} \{F_h(\xi)\} d\xi, \quad (13)$$

где $\{\phi_0\}, \{p_0\}, \{h_0\}$ - начальные условия соответствующих функций; $\{\bar{\phi}\}(\cdot), \{\bar{p}\}(\cdot), \{\bar{h}\}(\cdot)$ - искомые функциональные зависимости соответственно температуры, упругости пара, влаги.

Уравнение (1) является нелинейным, поскольку параметр теплопроводности D материала является функцией от влагосодержания h , принятой по (7), которая, в свою очередь является функцией, как пространственных координат, так и времени, и определяется решением (3), то есть:

$$\tilde{D} = (D \circ h \circ \phi)(\Omega_d, t_d), \quad (14)$$

где Ω_d - произвольная точка в области $\Omega_d \in \Omega$; t_d - произвольный момент времени.

Для упрощения выражения (14) и соответственно (1) можно использовать различные методы линеаризации. В настоящем исследовании использован метод Пикара [10], в основе которого лежит необходимость правильного выбора значения первого приближения. В предлагаемом решении изменение значений температуры в пространстве и времени в первом приближении приняты по результатам решения линейной несвязанной задачи нестационарной теплопроводности.

$$\{\phi\}(t) = e^{[A]t}\{\phi_0\} + \int_0^t e^{[A](t-\xi)}\{F(\xi)\} d\xi, \quad (15)$$

где $\{\phi\}(\cdot)$ – функциональная зависимость температуры от времени, полученное решением линейной нестационарной задачи теплопроводности.

Следует также отметить, что в связи с нелинейностью (1) и зависимостью (14) при вычислении производной $\nabla \cdot (D\nabla\phi)$, входящей в состав уравнения (12), необходимо учитывать то, что D это функция, как отмечалось выше. А именно, необходимо учесть следующую зависимость:

$$\nabla \cdot (D\nabla\phi) = \underbrace{\nabla \cdot D \nabla \cdot \phi}_{\text{первое слагаемое}} + \underbrace{D \Delta \phi}_{\text{второе слагаемое}} \quad (16)$$

где первое слагаемое правой части (16) требует представления в матричном виде при конечноэлементном преобразовании в зависимости от принятой нелинейности.

Алгоритм решения задачи

Для решения систем уравнений (8) - (10) используем следующий алгоритм:

- Вычислим значения коэффициента теплопроводности в зависимости от естественной влажности, с участием которых решаем уравнения линейной нестационарной задачи теплопроводности (15), и определяем зависимость $\{\phi\} = \{\phi\}(t)$.
- По текущей картине изменения температуры, а также по зависимости $\{p\}(\cdot)$ (12), определяем объем конденсации и испарения и энергию фазового преобразования, с использованием (4) и (6);
- Определяем изменение влажностного режима по (13): $\{\bar{h}\} = \{\bar{h}\}(t)$;
- По текущим значениям $\{\bar{h}\}(\cdot)$ определяем функциональную зависимость коэффициента температуропроводности от времени по (7);
- Используя текущие значения коэффициента теплопроводности определяем зависимость (11), по которым уточняются функции испарения и конденсации и, соответственно распределение влаги.

Далее расчет повторяется. Решение считается найденным при условии разницы между двумя последовательно определенными функциями температуры от времени не более заданного значения.

3. Результаты

По предложенному алгоритму рассчитан типовой узел примыкания трехслойной наружной стены к плите перекрытия, предложенный в "Технические решения многослойных продольных и торцевых наружных стен, облицованных кирпичом толщиной 120мм (с утолщенной наружной стенкой или с пустотностью 13%), для строительства жилых и общественных зданий высотой до 75м". (ОАО "ЦНИИЭП жилых и общественных зданий (ЦНИИЭП жилища)", "ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко").

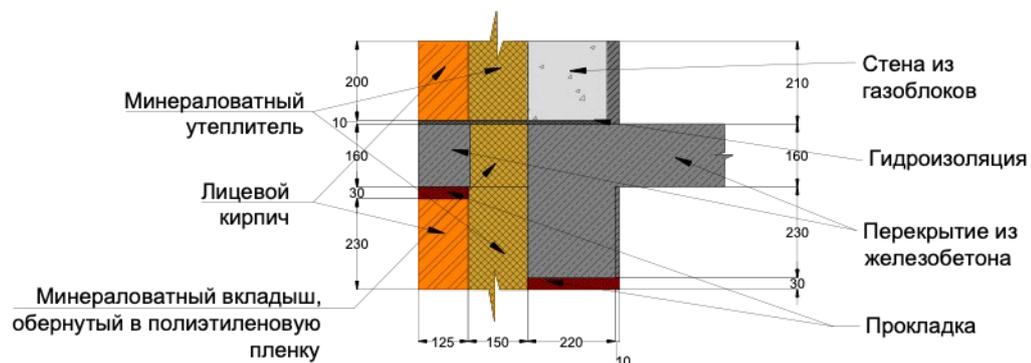


Рис. 1. Расчетный узел примыкания трехслойной стены к плите перекрытия.

Источник: "Конструкции энергоэффективных наружных стен с облицовкой кирпичом. Детали и узлы. Стена тип 1, деталь 1 (к сечению 2-2)."

"Технические решения многослойных продольных и торцевых наружных стен, облицованных кирпичом толщиной 120мм (с утолщенной наружной стенкой или с пустотностью 13%), для строительства жилых и общественных зданий высотой до 75м".

В соответствии с алгоритмом МКЭ построена расчетная модель узла, приведенного на Рис. 1. При моделировании, такие материалы как крепежные дюбеля, отливы, кладочные сетки, анкера с гибкими связями не учитывались.

Гибкий материал "Вилатерм" в расчетной модели заменен на минераловатный утеплитель. Минераловатный вкладыш, обернутый в пленку, представлен материалом с теплотехническими характеристиками, соответствующими минеральной вате, и характеристиками по паропроницанию соответствующему полиэтиленовой пленке 160мк. Расчетные характеристики материалов приведены в таблице 1. Все материалы изотропны.

Таблица №1

Расчетные характеристики материалов в узле примыкания многослойной стены с перекрытием

Материал	Коэфф. теплопроводности	Коэфф. паропроницания	Коэфф. влагопереноса
	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$	$\frac{\text{мг}}{\text{Па м}^2 \text{ час}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{час}}$
Лицевой кирпич	$0.58 + 0.00025 h$	0.14	0.017
Стена из газоблока	$0.14 + 0.001 h$	0.20	0.03
Перекрытие из железобетона	$1.92 + 0.00024 h$	0.03	0.012
Минераловатный утеплитель	$0.044 + 0.001 h$	0.32	1.5
Вкладыш из минераловаты	$0.419 + 0.00085 h$	0.006	0.004

h - влагосодержание в расчетной точке модели. Коэффициенты теплоотдачи для наружных и внутренних поверхностей приняты соответственно $23 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$, $8.7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$ (СП 50.13330.2012 "Тепловая защита зданий").

Для расчета данного узла приняты следующие граничные условия:

$$T_{in}(t) = 20 + 4 \sin\left(\frac{t\pi}{24}\right)$$

$$T_{out}(t) = -25 + 3 \sin\left(\frac{t\pi}{12}\right)$$

$$RH_{in}(t) = 0.5 + 0.2 \sin\left(\frac{t\pi}{24}\right)$$

$$RH_{out}(t) = 0.78 + 0.2 \cos\left(\frac{t\pi}{30}\right),$$

где T_{in}, T_{out} - суточное изменение температуры внутреннего и наружного воздуха в °C; RH_{in}, RH_{out} - суточное изменение относительной влажности внутреннего и наружного воздуха в долях единицы; t - временная переменная, час, $t = [0, 24]$.

Результаты расчетов и их анализ

На Рис.2 приведено сравнение результатов решения нестационарной нелинейной связанной задачи с решением нестационарной линейной несвязанной задачи.

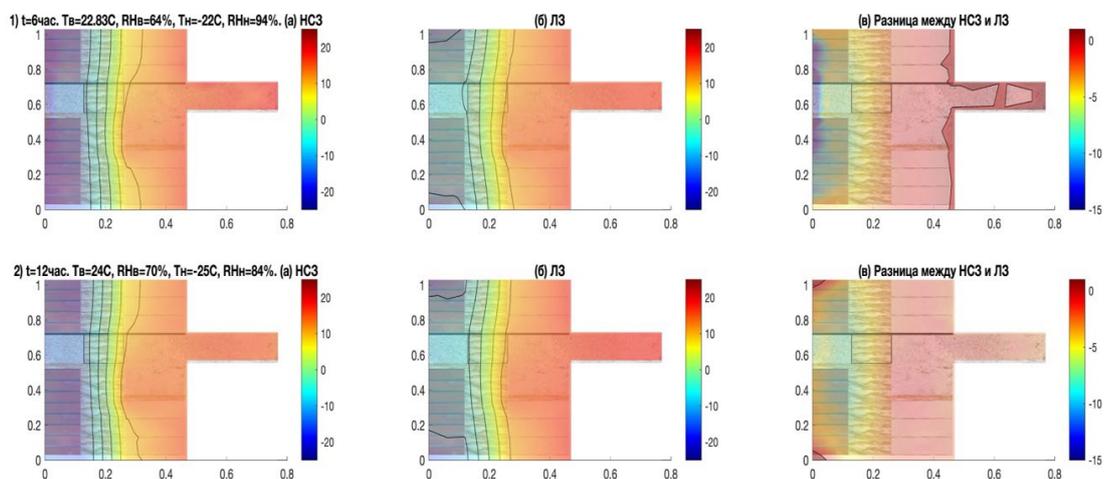


Рис. 2. Карты температурных полей в различные моменты времени.

Результаты решения нестационарных задач для расчета узла примыкания перекрытия с трехслойной стеной по Рис.5.1, где а) НСЗ - нелинейная связанная задача; б) ЛЗ - линейная несвязанная задача; в) Разница между значениями температуры внутри стены рассчитанных разными подходами. $T_{в}$ - внутренняя температура, $T_{н}$ - наружная температура, $RH_{в}$ - внутренняя относительная влажность воздуха; $RH_{н}$ - наружная относительная влажность воздуха.

4. Выводы

По результатам выполненных расчетов можно сделать следующие выводы:

1) Процесс тепломассопереноса улучшает теплотехнические характеристики слоев конструкции, расположенных ближе к внутренней, более теплой поверхности, что ведет к увеличению их температуры;

2) Во внешних слоях ограждающих конструкций влажность увеличивается, что приводит к увеличению их теплопроводности. По результатам расчетов наблюдалось падение температуры на внешней поверхности ограждающей конструкции в районе перекрытия, где у материалов низкая паро- и влагопроницаемость. В зонах с большой паро- и влагопроницаемостью в связи с увеличением влажности, произошло увеличение температуры.

3) В расчетах не учитывалось такое явление, как ледообразование, которое, кроме изменения теплотехнических характеристик материалов, может вести к образованию трещин.

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва. Высшая школа. 1967. с. 54, 164-192.
2. Onsager Lars "Reciprocal Relations in Irreversible Processes I". Ithaca. Physical Review, Vol 37, 1931 pp.405-426.
3. Onsager Lars "Reciprocal Relations in Irreversible Processes II". Ithaca. Physical Review, Vol 38, 1931. pp.2265-2279.
4. Callen Hebert B. "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics", Second Edition, Philadelphia, University of Pensilvania, John Wiley and Sons, 1985 pp. 215-248.

5. Koniorczyk M., Gaymin W. "Influence of the Thermal Conductivity and Ambient Temperature Uncertainty on the Heat Losses through the External Wall". Buildings 2021. URL: doi.org/10.3390/buildings11030084.
6. Куприянов В.Н., Юзмухаметов А.М., Сафин И.Ш. "Влияние влаги на теплопроводность стеновых материалов. Состояние вопроса", УДК 536.2.022, 697.137.2. Казань. Известия КГАСУ, "Строительные конструкции, здания и сооружения", 2017, №1 (39). с.102-110.
7. Segerlind Larry, "Applied Finite Element Analysis". Second Edition, New York, John Wiley and Sons, 1984. pp.190-200.
8. Bhatti M. Asghar, "Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures", New York. John Wiley and Sons, 2006. pp. 3299-3671.
9. Sidorov V. N., Primkulov A.M. "Coupled Heat and Mass Transfer Problem with Dependent Heat Conductivity Properties and Its Semi Analytical Solution", DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-3-69-82 IJCCSE, 2023. 19(3) pp.69-82.
10. Langtangen Hans Petter, Kent-Andre Mardal, "Introduction to Numerical Methods for Variational Problems", Springer, 2019, URL: doi.org/10.1007/978-3-030-23788-2.

References

1. Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti [Heat transfer theory]. Moskva. Vysshaya Shkola.1967, pp. 54, 164-192.
2. Onsager Lars "Reciprocal Relations in Irreversible Processes I". Ithaca. Physical Review. Vol 37. 1931. pp. 405-426.
3. Onsager Lars "Reciprocal Relations in Irreversible Processes II". Ithaca. Physical Review, Vol 38. 1931. pp. 2265-2279.
4. Callen Hebert B. "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics", Second Edition, Philadelphia. University of Pensilvania, John Wiley and Sons, 1985 pp 215-248.



5. Koniorczyk M., Gaymin W. "Influence of the Thermal Conductivity and Ambient Temperature Uncertainty on the Heat Losses through the External Wall". Buildings 2021. URL: doi.org/10.3390/buildings11030084.
6. Kupriyanov V.N., Yuzmikhmetov A.M., Safin I.Sh. Izvestiya KGASU, Stroitelniye konstruktsii, zadniya i sooruzheniya, 2017, №1 (39), pp. 102-110.
7. Segerlind Larry, "Applied Finite Element Analysis". Second Edition, New York. John Wiley and Sons, 1984. pp.190-200.
8. Bhatti M. Asghar, Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures, New York. John Wiley and Sons, 2006 pp. 3299-3671.
9. Sidorov V. N., Primkulov A.M. "Coupled Heat and Mass Transfer Problem with Dependent Heat Conductivity Properties and Its Semi Analytical Solution", DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-3-69-82 IJCCSE, 19(3), 2023. pp.69-82.
10. Langtangen Hans Petter, Kent-Andre Mardal, "Introduction to Numerical Methods for Variational Problems", Springer, 2019. URL: doi.org/10.1007/978-3-030-23788-2

Дата поступления: 5.03.2025

Дата публикации: 25.04.2025