Расчет локальных напряжений в стальной балке, преднапряженной вытяжкой стенки

А.А. Иодчик, А.А. Чебровский, Бурцев В.М.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

Аннотация: В статье рассматривается случай, когда сосредоточенная сила приложена в середине пролета в точку к стенке преднапряженной балки. Предварительные касательные напряжения не оказывают влияние на напряженное состояние в середине пролета балки. Однако предварительные нормальные напряжения будут действовать по всей высоте стенки и влиять на распределение зоны локальных напряжений и на напряженное состояние стенки. Определение напряжений в балке основано на балочной теории Тимошенко С.П. В статье приведены система эквивалентных усилий на гранях стенки и выражение нормальных напряжений в поперечном сечении преднапряженной балки. В сравнении с обычной балкой, преднапряжение уменьшает нормальные напряжения от сосредоточенной силы.
Ключевые слова: тонкостенная конструкция, стальная балка, двутавровое сечение, предварительное напряжение, локальные напряжения, локальный эффект, принцип Сен-Венана, теория Тимошенко, решение Кармана, интеграл Фурье, функция напряжений.

Определением действительной модели разрушения элементов стальных тонкостенных балок занимаются многие ученые-инженеры. Одной из таких задач является построение модели разрушения стенки балки от приложения к ней сосредоточенной в точку силы. В частности, для решения поставленной задачи, можно представить тонкую стенку балки как шарнирно опертую пластинку с приложенной к ней сосредоточенной силой. Классическая теория балок подробно представлена Доннеллом Л.Г. [1]. Особенности расчета тонкостенных конструкций методом предельного равновесия представлены в работах [2-5]. Вопрос воздействия сосредоточенного давления на элементы тонкостенного стержня рассматривался в трудах [6-8]. Принципиальная схема приложения силы на стенку представлена на рис. 1. В настоящее время вопросы эффективности предварительного напряжения стальных тонкостенных балок интересуют, в том числе, и зарубежных исследователей [9-11].

Усилия растяжения распределяются радиально и эквивалентны давлению по квадранту ab цилиндрической поверхности abc, у точки A.

Система усилий на гранях стенки показана на рис. 2. Такие силы эквивалентны горизонтальной силе P/π и вертикальной силе P, приложенные в точке A.

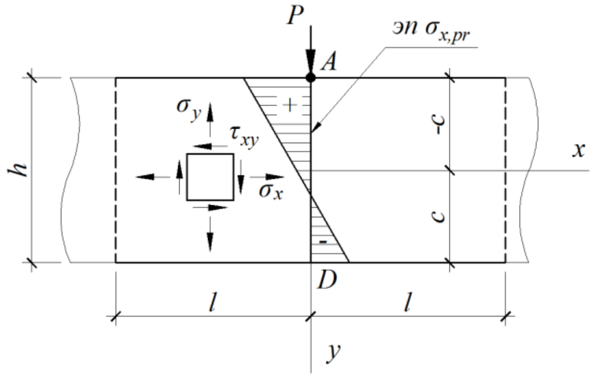

Рис. 1. – Схема действия сосредоточенной нагрузки на стенку в середине пролета преднапряженной балки

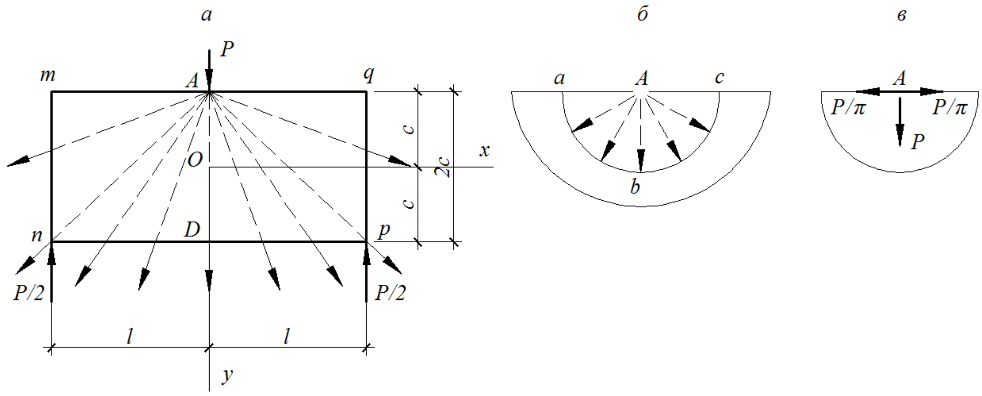

Рис. 2. - Схема усилий на гранях стенки балки, опертой в точках n и p: а - радиальное растягивающее; б - давление, распределенное по цилиндрической поверхности; в - горизонтальные и вертикальные силы

К изгибным напряжениям требуется добавить равномерно распределенные напряжения $P/2\pi c$, создаваемые силой P/π. К нижней кромке стенки прикладывается нагрузка $P/\pi c$. Таким образом, получим три составляющие напряженного состояния стенки для балок без преднапряжения, и общее выражение нормальных напряжений в поперечном сечении AD будет:

$$\sigma_{x,ob} = \frac{3P}{2c^3}\left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi}\right)y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c}\left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c}\right) \tag{1}$$

Согласно требованиям СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции», прочность элементов, изгибаемых в одной из главных плоскостей, будет:

$$\frac{M_{\max}}{W_{zv}} \le R_y \tag{2}$$

$$\frac{P_{\max} S_x}{I_x t_w} \le R_s \tag{3}$$

Максимальная сила $P_{\max}$, приложенная в середине пролета балки, из условия прочности элемента по изгибающему моменту $M_{\max}$ будет:

$$P_{\max} = \frac{2M_{\max}}{l} = \frac{2R_y W_{zv}}{l} \tag{4}$$

Предварительные нормальные напряжения σ_x^{pr}, действующие в стенке преднапряженной балки, влияют на ее напряженное состояние в сечении AD. На стадии изготовления напряжение $\sigma_{x,pr}$ по сторонам верхней кромки стенки относительно оси x, будет:

$$\sigma_{x,pr} = -\frac{R_y K}{2(2K+1)}\left(1 - 6 \cdot \frac{y}{h}\right) \tag{5}$$

Площадь поперечного сечения балки A при толщине стенки $t_w = 1$:

$$A = \frac{A_w}{\gamma_w} = \frac{t_w h}{\gamma_w} = \frac{h}{\gamma_w} \tag{6}$$

Общее выражение нормальных напряжений σ_x в поперечном сечении AD, для преднапряженной балки:

$$\sigma_x = \sigma_{x,ob} + \sigma_{x,pr} = \frac{2R_y}{l} \cdot \frac{h^2}{6\gamma_w} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{(K+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{3}{2c^3}\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{\pi}\right)y + \frac{1}{2\pi c}\left(1 + \frac{y^3}{c^3} - \frac{3y}{5c}\right)\right] - \frac{R_y K}{2(2K+1)}\left(1 - 6 \cdot \frac{y}{h}\right) \tag{7}$$

Расстояние от начала координат до верхней и нижней кромок стенки $c = h/2$, нормальные напряжения будут наибольшими на расстоянии $x = 0$, согласно принципу Сен-Венана $l = h$, поэтому вид максимальных нормальных напряжений будет:

$$\sigma_x = \frac{2R_y}{h} \cdot \frac{h^2}{6\gamma_w} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{(K+1)} \times$$

$$\times \left[-\frac{3 \cdot 8}{4h^2 \pi} y + \frac{2}{2\pi h} \left(1 + \frac{8y^3}{h^3} - \frac{6y}{5h} \right) \right] - \frac{R_y K}{2(2K+1)} \left(1 - 6 \cdot \frac{y}{h} \right) =$$

$$= \frac{2R_y}{3} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{\gamma_w (K+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{4}{\pi h^3} y^3 - \left(\frac{3}{h\pi} + \frac{3}{5\pi h} \right) y + \frac{1}{2\pi} \right] -$$

$$- \frac{R_y K}{2(2K+1)} + \frac{3R_y K}{h(2K+1)} y \qquad (8)$$

Вид нормальных напряжений σ_x в поперечном сечении AD преднапряженной балки будет:

$$\sigma_x = \frac{2R_y}{3} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{\gamma_w (K+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{4}{\pi h^3} y^3 - \left(\frac{3}{h\pi} + \frac{3}{5\pi h} \right) y + \frac{1}{2\pi} \right] -$$

$$- \frac{R_y K}{2(2K+1)} + \frac{3R_y K}{h(2K+1)} y =$$

$$= \frac{2R_y}{3} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{\gamma_w (K+1)} \left[\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3K\gamma_w (K+1)}{4(2K+1)(6K - \gamma_w (K+1)^2)} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{9K\gamma_w (K+1)}{2(2K+1)(6K - \gamma_w (K+1)^2)} - \frac{18}{5\pi} \right) \frac{y}{h} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^3}{h^3} \right] \qquad (9)$$

Оптимальные геометрические параметры преднапряженной балки двутаврового сечения $K = 1{,}1754$ и $\gamma_w = 0{,}496$, поэтому нормальные напряжения в поперечном сечении AD будут:

$$\sigma_x = \frac{2R_y}{3}\cdot\frac{6K-\gamma_w(K+1)^2}{\gamma_w(K+1)}\left[\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{3K\gamma_w(K+1)}{4(2K+1)\left(6K-\gamma_w(K+1)^2\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{9K\gamma_w(K+1)}{2(2K+1)\left(6K-\gamma_w(K+1)^2\right)}-\frac{18}{5\pi}\right)\frac{y}{h}+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{y^3}{h^3}\right]=$$

$$=2{,}90R_y\left[0{,}099-0{,}783\left(\frac{y}{h}\right)+1{,}273\left(\frac{y}{h}\right)^3\right] \qquad (10)$$

Более подробно распределение напряжений вблизи точки приложения сосредоточенной силы исследовал Зеевальд Ф. Функция напряжений $F(x,y)$, была получена Зеевальдом Ф. и имеет вид:

$$F(x,y)=-\frac{P}{2\pi}\left\{\int_0^\infty\left[\frac{1-\cos\alpha l}{\alpha^2\left(1+\frac{sh2\alpha c}{2\alpha c}\right)}\left(-\frac{y}{c}sh\alpha y\cdot sh\alpha c+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+ch\alpha y\cdot ch\alpha c+\frac{ch\alpha y\cdot sh\alpha c}{\alpha c}\right)\cos\alpha x\right]d\alpha+\int_0^\infty\left[\frac{1}{1-\frac{sh2\alpha c}{2\alpha c}}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{y}{c}ch\alpha y\cdot ch\alpha c-sh\alpha y\cdot sh\alpha c-\frac{sh\alpha y\cdot ch\alpha c}{\alpha c}\right)-$$

$$\left.\left.-\frac{3y}{2c^3}\left(c^2-\frac{y^2}{3}\right)\right]\times\frac{(1-\cos\alpha l)\cdot\cos\alpha x}{\alpha^2}d\alpha\right\}-\frac{3Pl}{8c^3}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(c^2-\frac{y^2}{3}\right)y \qquad (11)$$

Распределение нормальных σ_x, σ_y и касательных напряжений τ_{xy} по стенке балки определяется дифференцированием функции напряжений $F(x,y)$. Зеевальд Ф. разделил напряжение на две составляющие: первая - рассчитывается по классической балочной формуле, а вторая - описывает локальный эффект вблизи точки приложения сосредоточенной силы. Вторая составляющая напряжения может быть представлена в такой форме:

$$\sigma_x=\alpha_{AD}\frac{P}{c}; \qquad (12)$$

$$\sigma_y=\beta_{AD}\frac{P}{c}; \qquad (13)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{AD} \frac{P}{c} \tag{14}$$

Получаем, что напряжения σ_x в поперечном сечении стенки преднапряженной балки AD от P при $x = 0$ будут:

$$\sigma_x(0, y) = \alpha_{AD,pr} \frac{P}{c} = \frac{2R_y}{3} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{\gamma_w (K+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^3}{h^3} + \left(\frac{9K\gamma_w (K+1)}{2(2K+1)\left(6K - \gamma_w (K+1)^2\right)} - \frac{18}{5\pi} \right) \frac{y}{h} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3K\gamma_w (K+1)}{4(2K+1)\left(6K - \gamma_w (K+1)^2\right)} \right) \right] \tag{15}$$

$$\frac{P}{c} = \frac{2R_y}{3} \cdot \frac{6K - \gamma_w (K+1)^2}{\gamma_w (K+1)} \tag{16}$$

$$\alpha_{AD,pr} = \left[\frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^3}{h^3} + \left(\frac{9K\gamma_w (K+1)}{2(2K+1)\left(6K - \gamma_w (K+1)^2\right)} - \frac{18}{5\pi} \right) \frac{y}{h} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3K\gamma_w (K+1)}{4(2K+1)\left(6K - \gamma_w (K+1)^2\right)} \right) \right] \tag{17}$$

С рассмотрением преднапряженной балки в сечении AD оптимального поперечного сечения, множители местных напряжений σ_x будут:

$$\alpha_{AD,pr}(0, y) = \left[0{,}099 - 0{,}783 \left(\frac{y}{h} \right) + 1{,}273 \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right] \tag{18}$$

$$\frac{P}{c} = 2{,}90 R_y . \tag{19}$$

Значения параметра $\alpha_{AD,pr}$ для напряжений σ_x в преднапряженной балке и $\alpha_{AD,ob}$ для напряжений $\sigma_{x,ob}$ в обычной балке показаны на рис. 3. Анализ рис. 3 показывает, что напряжения σ_x в крайней верхней точке сечения стенки преднапряженной балки от действия сосредоточенной силы P по сравнению с обычной балкой будут меньше.

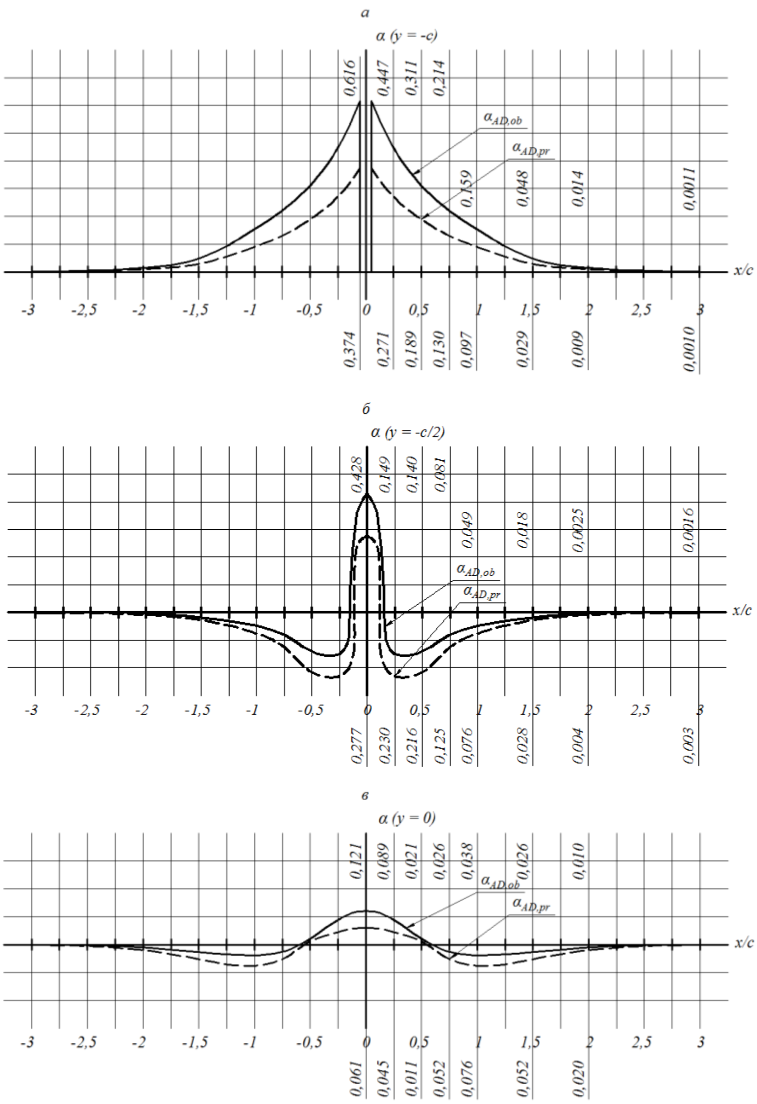

Рис. 3 - График параметра α_{AD} напряжений σ_x для преднапряженной балки (пунктир.) и балки без преднапряжения (сплош.)

Таким образом, предварительное напряжение снижает нормальные напряжения от внешней нагрузки по сравнению с балкой без предварительного напряжения.

Литература

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины, оболочки. Москва, 1982. - 568 с.

2. Коробко В.И. Расчет пластинок методом предельного равновесия. Орел, 2012. - 354 с.

3. Чебровский А.А. Совершенствование методики расчета стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки: дис. … канд. техн. наук: 05.23.01 / А.А. Чебровский, - Улан-Удэ. 2015. - 232 с.

4. Евтушенко А.М., Нуриев В.Э., Зотов П.В., Морева И.С. Технология легких стальных тонкостенных конструкций и её особенности. // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2018/5398/.

5. Решетников А.А. Корнет В.Ю. Леонова Д.А. Сравнительный анализ методик расчета тонкостенных стальных балок С-образного профиля по отечественным и зарубежным нормам. // Инженерный вестник Дона, 2018, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4788/.

6. Лампси Б.Б., Гусев В.А. Распределение сосредоточенного касательного давления, приложенного по краям полки металлического тонкостенного стержня. // Труды им. В.П. Чкалова. Исследования элементов металлических конструкций и вопросов строительной механики. Горький, 1970. № 57. С. 20-28.

7. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Москва: Ленинград, 1946. - 533 с.

8. Лурье А.И. Теория упругости. Москва, 1970. - 940 с.

9. Hadjipantelis N., Gardner L., Wadee M. A. Design of prestressed cold-formed steel beams. // Thin-Walled Structures, 2019, №140, pp. 565-578. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823118313065/.

10. Blum A., Chodorowska D. Experimental analysis of prestressed thin-walled structures stability. // Thin-Walled Structures, 2007, №45, pp. 834-839. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823107001747/.

11. Wen-Fu Zhang. Symmetric and antisymmetric lateral–torsional buckling of prestressed steel I-beams. // Thin-Walled Structures, 2018, №122, pp. 463-479. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823117304329/.

References

1. Donnell L.G. Balki, plastiny, obolochki [Beams, plates, shells]. Moskva, 1982. 568 p.

2. Korobko V.I. Raschet plastinok metodom predel'nogo ravnovesiya [Calculation of plates by the method of limiting equilibrium] Orel, 2012. 354 p.

3. Chebrovskiy A.A. Sovershenstvovanie metodiki rascheta stal'nykh balok, predvaritel'no napryazhennykh vytyazhkoy stenki [Improvement of the methodology for calculating steel beams prestressed by wall stretching] dis. … kand. tekhn. nauk. Ulan-Ude. 2015. 232 p.

4. Evtushenko A.M., Nuriev V.E’, Zotov P.V., Moreva I.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2018/5398/.

5. Reshetnikov A.A. Kornet V.YU. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4788/.

6. Lampsi B.B., Gusev V.A. Trudy im. V.P. Chkalova. Issledovaniya elementov metallicheskikh konstruktsiy i voprosov stroitel'noy mekhaniki. Gor'kiy, 1970, № 57. pp. 20-28.

7. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh system [Stability of elastic systems]. Moskva: Leningrad, 1946. 533 p.

8. Lur’e A.I. Teoriya uprugosti [Elasticity theory]. Moskva, 1970. 940 p.

9. Hadjipantelis N., Gardner L., Wadee M. A. Thin-Walled Structures, 2019, №140, pp. 565-578. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823118313065/.

10. Blum A., Chodorowska D. Thin-Walled Structures, 2007, №45, pp. 834-839. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823107001747/.

11. Wen-Fu Zhang. Thin-Walled Structures, 2018, №122, pp. 463-479. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823117304329/.