

Достаточное условие устойчивости динамической системы стабилизации положения равновесия и программных движений

А. А. Ефремов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

Аннотация: В статье на основе оценки евклидовой нормы отклонения координат переходного и стационарного состояний динамической системы выведено условие сжатия обобщенного проекционного оператора динамической системы с ограничениями. Из принципа сжимающих отображений, с учетом выведенного условия сжатия проекционного оператора, получены оценки достаточного условия устойчивости динамической системы стабилизации положения равновесия и программных движений. Полученные оценки обобщают ранее полученные результаты. Обеспечение устойчивости оператора ограниченной динамической системы продемонстрировано экспериментально.

Ключевые слова: достаточное условие устойчивости, проекционный оператор, стабилизация положения равновесия, стабилизация программных движений, SimInTech.

Введение

Одной из важнейших задач синтеза динамических систем является обеспечение устойчивости. К настоящему времени разработаны теоретические методы решения данной задачи [1-3]. Практическое применение указанных методов продемонстрировано в множестве научных работ. Например, в [4] исследована устойчивость линейной модели процесса фрезерования. В работе [5] исследуется устойчивость линейных систем с положительно определенной матрицей. Интересные результаты приводятся в работах [6,7]. Для стационарных систем с аддитивной правой частью в виде суммы линейной и нелинейной частей можно использовать метод Ляпунова-Пуанкаре, основанный на анализе асимптотики [8,9]. Применение метода векторных функций Ляпунова показано в работах [10,11].

В данной работе предлагается вывод достаточного условия устойчивости динамической системы заданной «обобщенным проекционным оператором решения задач стабилизации положения равновесия и программных движений с ограничениями на векторы координат состояний и

управлений» [12,13]. Вывод достаточного условия устойчивости выполнен на основе принципа сжимающих отображений.

Обобщенный проекционный оператор динамической системы

Рассмотрим объект управления, заданный линейным стационарным разностным оператором управляемым по Р. Калману:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^j$, $\mathbf{c}_y \in \mathbf{R}^{j \times n}$.

«Обобщенный проекционный оператор динамической системы для задач стабилизации положения равновесия и стабилизации программных движений с ограничениями на векторы координат состояний и управлений, линейного объекта (1)» [12,13] имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma\mathbf{F}\mathbf{u}_k(\varsigma_{1k}, \varsigma_{2k}, \sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \theta), \\ \mathbf{u}_k(\varsigma_{1k}, \varsigma_{2k}, \sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \theta) &= \mathbf{T}_u \left\langle \theta(\mathbf{P}^+\mathbf{b}_k + \varsigma_{1k}\mathbf{P}^0\mathbf{C}_{0k} + \sigma_{1k}\mathbf{P}^0\mathbf{C}_k) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\theta)(\mathbf{P}^+\mathbf{b}_k + \varsigma_{2k}\mathbf{P}^0\mathbf{C}_{0k} + \sigma_{2k}\mathbf{P}^0\mathbf{C}_k) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varsigma_{1k} = \sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/\beta_k} \in \mathbf{R}$, $\varsigma_{2k} = -\sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/\beta_k} \in \mathbf{R}$, $\sigma_{2k} = 1 + \sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/\beta_k} \in \mathbf{R}$,

$\sigma_{1k} = 1 - \sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/\beta_k} \in \mathbf{R}$, $\beta_k = \mathbf{C}_{0k}^T\mathbf{P}^0\mathbf{C}_{0k} + \mathbf{C}_k^T\mathbf{P}^0\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}^T\mathbf{P}^0\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T\mathbf{P}^0\mathbf{C}_{0k} \in \mathbf{R}$,

$\alpha(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}_k^T(\mathbf{P}^+)^T\mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T(\mathbf{P}^+)^T\mathbf{P}^+\mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T\mathbf{P}^+\mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T\mathbf{P}^0\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T\mathbf{C}_k + r^2 \in \mathbf{R}$,

$\mathbf{b}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$, $\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & \mathbf{E}_{m \times m} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_{0k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0k}^x & \mathbf{C}_{0k}^u \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m}$ и $\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^x & \mathbf{C}_k^u \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m}$ –

программные векторы координат-управлений.

Устойчивость обобщенного проекционного оператора стабилизации программных движений и положения равновесия

Подставим значения параметров σ и ς в уравнение (2). После преобразований уравнение переходного состояния примет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + (1 - 2\theta) \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} \mathbf{P}^0 (\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}) / \sqrt{\beta_k} \right]. \quad (3)$$

С учетом определения неподвижной точки оператора \mathbf{x}_* [14] стационарное состояние динамической системы (2) принимает вид:

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{H}\mathbf{x}_* + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_* + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + (1 - 2\theta) \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \mathbf{P}^0 (\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}) / \sqrt{\beta_k} \right], \quad (4)$$

где $\alpha_k(\mathbf{x}_*) = r^2 - \mathbf{b}_*^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_* + \mathbf{b}_*^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_* + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k$.

Найдем разность переходного (3) и стационарного (4) состояний системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + (1 - 2\theta) \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} \mathbf{P}^0 (\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}) / \sqrt{\beta_k} \right] - \\ &- \mathbf{H}\mathbf{x}_* - \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_* + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + (1 - 2\theta) \alpha_k(\mathbf{x}_*)^{1/2} \mathbf{P}^0 (\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}) / \sqrt{\beta_k} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление евклидовых норм правой и левой частей равенства (5) приводит к уравнению вида:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 &= \|\mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \\ &\times \left\langle \mathbf{P}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + (1 - 2\theta) \left(\alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right) \mathbf{P}^0 (\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}) / \sqrt{\beta_k} \right\rangle \|_2. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу аксиом нормы для правой части равенства (6) справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 &\leq \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \\ &\times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + |1 - 2\theta| \left\| \alpha_k^{1/2} - \alpha_*^{1/2} \right\|_2 \times \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Лемма 1. Для неравенства (7) имеет место следующая оценка:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 \leq \alpha_p \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2, \quad (8)$$

где $\alpha_p = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k0}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle -$

коэффициент сжатия, $L_\alpha = 2 \|\mathbf{P}^+\|_2^2 \times \|\mathbf{H}\|_2^2 (r + \|\mathbf{C}_k\|_2) + 2 \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{C}_k\|_2 -$

постоянная Липшица евклидовой нормы разности радикалов,

$$\beta_k = \mathbf{C}_{0k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{0k} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{0k}.$$

Доказательство. В силу оценки нормы разности радикалов [15]:

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 \leq L_\alpha \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2,$$

$$L_\alpha = 2 \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{C}_k\|_2 + 2 \|\mathbf{P}^+\|_2^2 \times \|\mathbf{H}\|_2^2 \times (r + \|\mathbf{C}_k\|_2)$$

справедлива следующая оценка для неравенства (7):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 &\leq \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \\ &\times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 \times \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle \leq \\ &\leq \left(\|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \right. \\ &\left. \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle \right) \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|. \end{aligned}$$

Замена выражения стоящего в правой части неравенства перед нормой разности $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2$ позволяет получить окончательную оценку:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 \leq \alpha_p \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2,$$

где $\alpha_p = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle -$

коэффициент сжатия, $L_\alpha = 2 \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{C}\|_2 + 2 \|\mathbf{P}^+\|_2^2 \times \|\mathbf{H}\|_2^2 (r + \|\mathbf{C}\|_2) -$

постоянная Липшица для нормы разности радикалов.

Лемма 1 доказана.

По определению сжимающего оператора [14] коэффициент сжатия должен удовлетворять условию:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \\ &\times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right\rangle < 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Из неравенства (9) следует достаточное условие устойчивости обобщенного оператора динамической системы стабилизации программных движений (2)

$$|\gamma| < \left(\|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left(\|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \times \|\mathbf{P}^0\|_2 \times \|\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{0k}\|_2 / \sqrt{\beta_k} \right) \right)^{-1} \times (10) \\ \times (1 - \|\mathbf{H}\|_2),$$

где $L_\alpha = 2\|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{C}_k\|_2 + 2\|\mathbf{P}^+\|_2^2 \times \|\mathbf{H}\|_2^2 \times (r + \|\mathbf{C}_k\|_2)$ – постоянная Липшица евклидовой нормы разности радикалов.

Следствие. Оценка параметра обратной связи (9) при обнулении вектора программных движений $\mathbf{C}_{0k} = 0$ преобразуется к оценке параметра обратной связи оператора динамической системы стабилизации программных движений, полученной в [16]:

$$|\gamma| < \left(\|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left(\|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right) \right)^{-1} \times (1 - \|\mathbf{H}\|_2).$$

$L_\alpha = 2\|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{C}_k\|_2 + 2\|\mathbf{P}^+\|_2^2 \times \|\mathbf{H}\|_2^2 \times (r + \|\mathbf{C}_k\|_2)$ – постоянная Липшица евклидовой нормы разности радикалов.

Доказательство следствия выполняется «обнулением» в неравенстве (10) слагаемых, содержащих вектор допустимых программных движений.

Вычислительный эксперимент

В разделе приведены результаты исследования обобщенного проекционного оператора решения задачи стабилизации программных движений и положения равновесия с ограничениями на координаты состояний и управлений (2), выполненные с учетом достаточного условия устойчивости (10) в среде моделирования SimInTech [17].

В качестве объекта управления выбрана модель электроэнергетической системы, схема которой показанной на рисунке 1.

В модели электроэнергетической системы уравнения турбины описывают электромеханические процессы [18]:

$$\frac{2J\omega_s}{p} \frac{d\omega}{dt} = T_{mx} - T_e - D\omega, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (11)$$

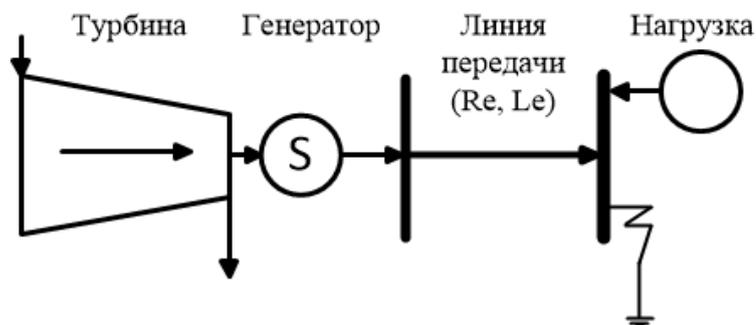


Рис. 1. – Схема электроэнергетической системы

Электромагнитные процессы заданы векторно-матричной билинейной дифференциальной моделью синхронного турбогенератора ТВВ-320-2 [12,19] с параметрами системы уравнений Горева-Парка в форме В.А. Веникова [20].

Внешняя нагрузка и линия передачи заданы равенствами [18]:

$$\begin{aligned}v_d &= 0,06i_d + 0,011 \frac{di_d}{dt} - 0,011\omega i_q + 10 \cos(\varphi); \\v_q &= 0,06i_q + 0,011 \frac{di_q}{dt} + 0,011\omega i_d + 10 \sin(\varphi).\end{aligned}\tag{12}$$

Динамика изменения мощности и частоты энергетической системы показана на рис. 2.

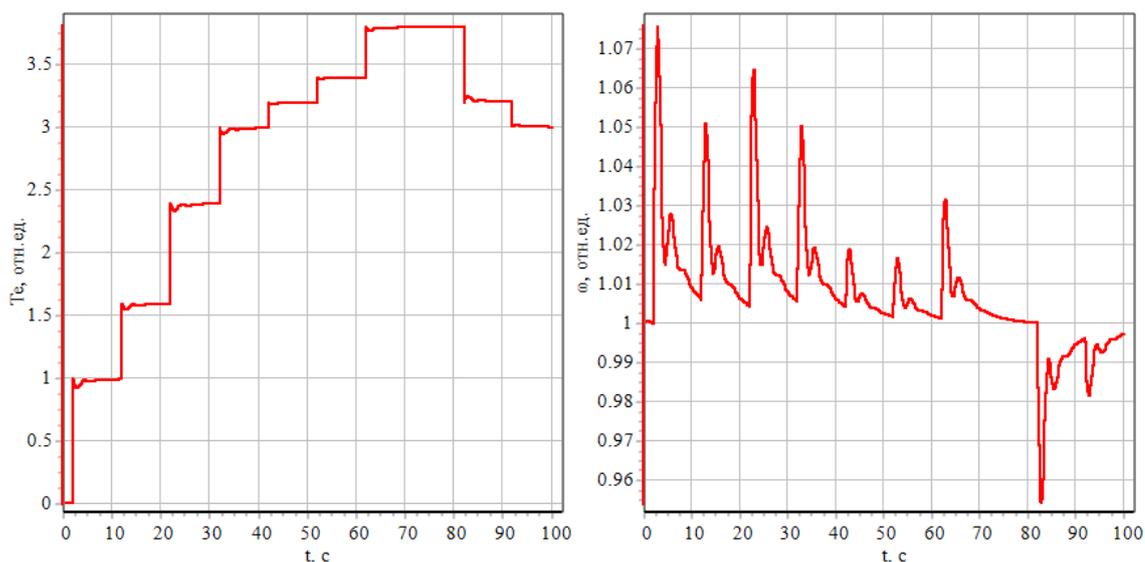


Рис. 2. – Графики изменения мощности T_e и «частоты» ω

Параметр «допустимости» θ подобран экспериментально и принят равным 0,43. Параметр ограничения в условии-неравенстве $r=1$.

Устойчивости динамической системы (2) обеспечивается выполнением неравенства (10). В случае нарушении указанного условия возможен быстрый рост значений координат состояний динамической системы и остановка вычислительного эксперимента. График параметра обратной связи γ , показана на рис. 3.

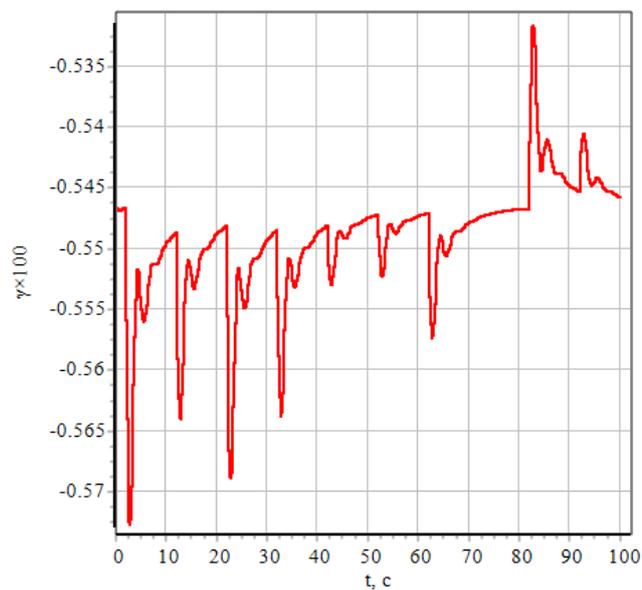


Рис. 3. – Параметр обратной связи γ

Из рисунка видно, что изменение мощности энергетической системы Te (рис. 2) приводит к соответствующему изменению амплитуды параметра обратной связи γ .

Обобщенные блочные векторы программных координат-управлений и допустимых программных координат-управлений заданы равенствами:

$$C_{0k} = \left[C_{0k}^x \mid C_{0k}^u \right] = \left[0,01 \ 0,01 \ 0,01 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0,1 \ 0 \ 0 \right]^T \in \mathbf{R}^{10}$$

$$C_k = \left[C_k^x \mid C_k^u \right] = \left[0,04 \ 0,06 \ 0,03 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0,3 \ 0 \ 0 \right]^T \in \mathbf{R}^{10}.$$

Синтезированные локально допустимые управляющие воздействия

$$\mathbf{u}_{fk} = \mathbf{T}_u \left\langle \theta (\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \zeta_k^1 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{0k} + \sigma_k^1 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k) + (1 - \theta) (\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \zeta_k^2 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{0k} + \sigma_k^2 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k) \right\rangle -$$

напряжение обмотки возбуждения с ограничениями, заданными программными векторами \mathbf{C}_{0k} и \mathbf{C}_k имеют вид, показанный на рис. 4.а.

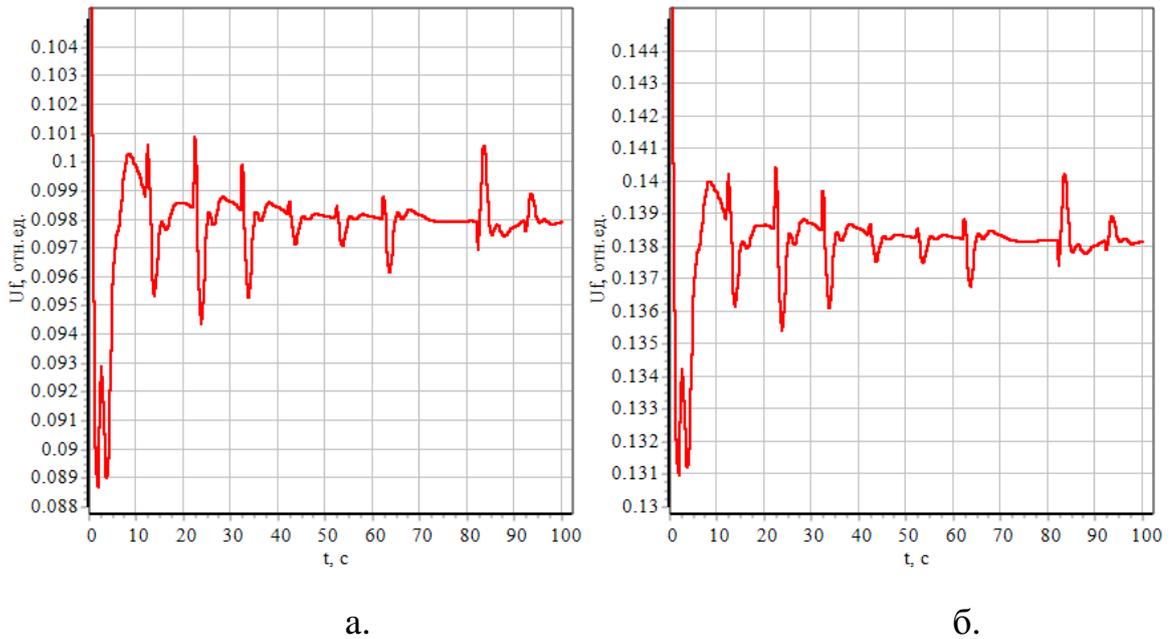


Рис. 4. – Ограниченные напряжения обмотки возбуждения u_f

Для сравнения на рис. 4.б приведен график напряжения обмотки возбуждения u_{fk} , ограниченного обобщённым вектором допустимых программных координат-управлений (программный вектор \mathbf{C}_{0k} и остальные параметры информационной модели динамической системы оставлены без изменений):

$$\mathbf{C}_k = \left[\mathbf{C}_k^x \mid \mathbf{C}_k^u \right] = \left[0,04 \ 0,06 \ 0,03 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0,6 \ 0 \ 0 \right]^T \in \mathbf{R}^{10}.$$

Видно, что в обоих случаях динамика изменения локально допустимых управляющих воздействий (рис. 4.а и 4.б) имеет схожий характер и связана с изменением мощности Te (рис. 2.а), а амплитуда напряжения обмотки возбуждения увеличивается с увеличением заданного ограничения в векторе

допустимых программных координат-управлений со значения 0,3 до значения 0,6.

Динамика «стабилизированных» блочным программным вектором координат-управлений C_{0k} и ограниченных блочным вектором допустимых программных координат-управлений C_k токов электроэнергетической системы, приведена, на рисунке 5.

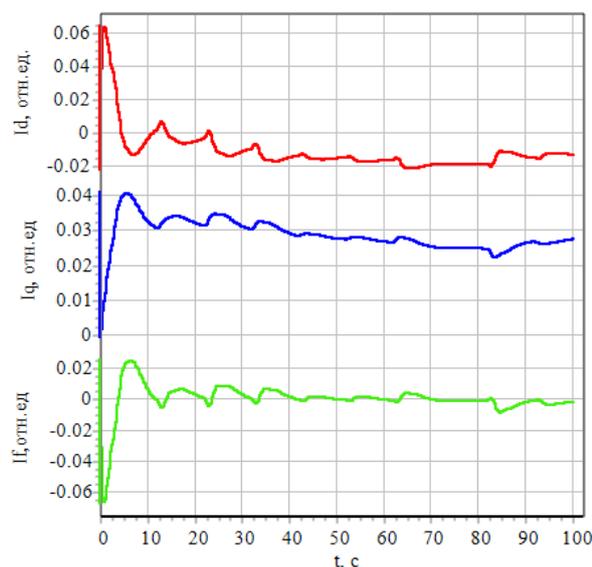


Рис. 5. – Динамика ограниченных координаты состояний электроэнергетической системы

Из рис. 5 видно, ограниченные координаты состояний динамической системы не превышают значений, заданных вектором допустимых программных движений C_k .

Выводы

Условие устойчивости ограниченной динамической системы получено на основе оценки евклидовой нормы отклонения координат переходного и стационарного состояний динамической системы, заданной проекционным оператором с ограничениями. Полученные результаты обобщают оценки,

полученные в работах [15,16]. Обеспечение устойчивости оператора ограниченной динамической системы продемонстрировано экспериментально.

Литература

1. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. 244 с.
2. Liao X., Wang L. Q., Yu P. Stability of dynamical systems. Boston. Elsevier, 2007. 718 p.
3. Leipholtz H. Stability theory: An introduction to the stability of dynamic systems and rigid bodies. Springer-Verlag, 2013. 359 p.
4. Красильников А.Я., Кравченко К.Ю. Устойчивость линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, описывающих процесс фрезерования // Инженерный вестник Дона. 2014. № 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2250.
5. Урывская Т.Ю. Устойчивость линейных систем с положительно определенной матрицей // Инженерный вестник Дона. 2017. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464.
6. Najariyan M., Zhao Y. On the stability of fuzzy linear dynamical systems // Journal of the Franklin Institute. 2020. V. 357, №9. pp. 5502-5522.
7. Li S., Wang Z., Zheng Y., Yang D., You K. Stability of general linear dynamic multi-agent systems under switching topologies with positive real eigenvalues // Engineering. 2020. V.6. №6. pp. 688-694.
8. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.
9. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 288 с.

10. Gallegos J.A., Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M. Vector Lyapunov-like functions for multi-order fractional systems with multiple time-varying delays // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2020. Vol. 83. P. 105089.

11. Drummond R., Valmorbidia G. Generalized Lyapunov Functions for Discrete-Time Lurie Systems With Slope-Restricted Nonlinearities // IEEE Trans. Automat. Contr. 2023. Vol. 68, № 10. pp. 5966–5976.

12. Ефремов А.А. Проекционный оператор решения обобщенных задач стабилизации программных движений // Информатика, телекоммуникации и управление. 2023. Т. 16, № 4. С. 49-59.

13. Ефремов А.А. Обобщенный проекционный оператор решения задач стабилизации программных движений // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2024. Т. 7. С.230-235.

14. van Neerven J. Functional Analysis. Cambridge University Press, 2022. 714 p.

15. Козлов В. Н. Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та., 2019, 161 с.

16. Ефремов А. А., Козлов В. Н. Достаточные условия устойчивости локально-допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления // Информационно-управляющие системы. 2023. № 6. С. 26–34.

17. Карташов Б. А., Шабаетов Е. А., Козлов О. С., Щекатуров А. М. SimInTech: среда динамического моделирования технических систем. М., ДМК Пресс, 2017. 424 с.

18. Козлов В.Н., Тростько И.У., Ефремов А.А. Условия устойчивости энергосистем на основе метода Ляпунова и нелинейных уравнений динамики // Известия российской академии наук. Энергетика. 2017. № 2. С. 62–72.

19. Неклепаев Б.Н. Электрическая часть электростанций и подстанций. 2-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1986. 640 с.

20. Веретенников Л. П. Классификация уравнений Горева-Парка // Электричество, 1959, № 11, с. 13–20.

References

1. Malkin I.G. Metody Ljapunova i Puankare v teorii nelinejnyh kolebanij [Lyapunov and Poincare methods in the theory of nonlinear oscillations]. M.-L.: Gostehteorizdat, 1949. 244 p.

2. Liao X., Wang L. Q., Yu P. Boston. Elsevier, 2007. 718 p.

3. Leipholtz H. Stability theory: An introduction to the stability of dynamic systems and rigid bodies. Springer-Verlag, 2013. 359 p.

4. Krasil'nikov A.Ja., Kravchenko K.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. № 1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2250.

5. Uryvskaja T.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2017. № 4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464.

6. Najariyan M., Zhao Y. Journal of the Franklin Institute. 2020. Vol. 357, №9. P. 5502-5522.

7. Li S., Wang Z., Zheng Y., Yang D., You K. Engineering. 2020. Vol.6. №6. P. 688-694.

8. Moiseev N.N. Asimptoticheskie metody nelinejnoj mehaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. M.: Nauka, 1969. 380 p.

9. Rozo M. Nelinejnye kolebanija i teorija ustojchivosti [Nonlinear oscillations and stability theory]. M.: Nauka, 1971. 288 p.

10. Gallegos J.A., Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2020. Vol. 83. P. 105089.

11. Drummond R., Valmorbidia G. IEEE Trans. Automat. Contr. 2023. Vol. 68, № 10. pp. 5966–5976.



12. Efremov A.A. Informatika, telekommunikacii i upravlenie. 2023. Vol. 16, № 4. pp. 49-59.

13. Efremov A.A. Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tehniceskie nauki. 2024. Vol. 7. pp. 230-235.

14. van Neerven J. Functional Analysis. Cambridge University Press, 2022. 714 p.

15. Kozlov V. N. Proekcionnyj metod sinteza ogranichennyh optimal'nyh upravlenij dinamiceskih sistem jenergetiki [Projection method for synthesis of limited optimal controls of dynamic energy systems]. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta., 2019, 161 p.

16. Efremov A. A., Kozlov V. N. Informacionno-upravljajushhie sistemy. 2023. № 6. pp. 26–34.

17. Kartashov B. A., Shabaev E. A., Kozlov O. S., Shhekaturov A. M. SimInTech: sreda dinamiceskogo modelirovanija tehniceskikh sistem [SimInTech: environment for dynamic modeling of technical systems]. M., DMK Press, 2017. 424 p.

18. Kozlov V.N., Tros'ko I.U., Efremov A.A. Izvestija rossijskoj akademii nauk. Jenergetika. 2017. № 2. pp. 62–72.

19. Neklepaev B.N. Jelektricheskaja chast' jelektrostancij i podstancij [Electrical part of power plants and substations]. 2-e izd. M.: Jenergoatomizdat, 1986. 640 p.

20. Veretennikov L. P. Jelektrichestvo, 1959, № 11, pp. 13–20.

Дата поступления: 19.08.2024

Дата публикации: 15.10.2024