**Инженерный вестник Дона**, №5 (2024)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2024/9239

# Изменение упругих характеристик основания по глубине

*В.И. Клименко, Л.М. Арзамаскова, Е.Е. Евдокимов, О.В. Коновалов*

*Волгоградский государственный технический университет*

**Аннотация:** Рассмотрены изменения упругих характеристик грунта для неоднородной по глубине модели основания. Получены зависимости модуля упругости грунта и коэффициента бокового давления от относительной глубины.
**Ключевые слова:** модуль упругости, коэффициент бокового давления, давление, компрессионная кривая.

При расчете дорожных покрытий, взаимодействующих с грунтом, большую роль играет выбор модели основания. В настоящее время предложены разнообразные модели основания, отражающие те или иные свойства реальных грунтов. Наличие распределительной способности грунтовых оснований и принцип их линейной деформируемости дают возможность применения теории упругости для построения моделей. Воздействие собственного веса грунта приводит к изменению характеристик с глубиной, что учтено в модели Г.К. Клейна [1]. При этом у упругого полупространства с глубиной изменялся модуль упругости, и такой учет неоднородности грунтового основания в расчетах привел к уменьшению перемещений поверхности по сравнению с однородным полупространством. Вторая упругая характеристика среды - коэффициент бокового давления - принималась постоянной по глубине. Эта модель получила дальнейшее развитие и применение в работах различных авторов.

Упругие свойства грунтов существенно отличаются при растяжении и сжатии [2, 3]. Упругие свойства анизотропных и структурно-неоднородных материалов зависят от влажности двухфазных состояний (скелет грунта + поровая вода) [2, 4, 5], от геометрических факторов [6], от концентраций напряжений [7]. Теоретически и экспериментально доказано [8], что в грунте под действием собственного веса происходит изменение по глубине обобщенного модуля упругости и коэффициента бокового давления, которое имеет сложный характер. Поэтому, для построения модели такого неоднородного основания, необходимо получить решение для определения перемещений поверхности от нагрузки при любых законах изменения упругих характеристик по глубине. Это изменение непрерывно и начинается с поверхности от начальных значений, где напряжения от действия собственного веса основания равны нулю, до небольшой, наперед заданной величины, при этом всегда справедлив закон линейности деформаций, т.е. в этом интервале давлений упругие характеристики материала постоянны. На основании этого можно сделать вывод о том, что градиент изменения этих характеристик под действием собственного веса на поверхности равен нулю. Это обстоятельство дало возможность получить строгое решение для определения перемещений поверхности неоднородного по глубине полупространства, у которого изменение обобщенного модуля упругости и коэффициента бокового давления описываются любыми непрерывными и четными по глубине $Z$ функциями.

В работе [9] приводится общее решение через две функции напряжений для трехмерной неоднородной среды, упругие характер которой изменяются только вдоль оси $Z$. При этом перемещения вдоль оси $Z$ равны:

$$u_z = \frac{1}{G}\cdot\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\cdot\left(\nu\cdot\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\right] \qquad (1)$$

где $L$ - функция напряжений, определяемая, исходя из решения следующего уравнения:

$$\nabla^2\nabla^2 L + \frac{G}{1-\nu}\cdot\left\{\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\nu\cdot\nabla^2 L\right) - \nu\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2 L\right] - 2\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\cdot\nabla^2 L\right]\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{G}\right)\right\} +$$
$$\frac{G}{1-\nu}\cdot\left\{+\left[\nu\cdot\nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{G}\right)\right\} = 0 \qquad (2)$$

$G$ – модуль сдвига и υ - коэффициент Пуассона являются непрерывными по $Z$ функциями.

Применение двойного преобразования Фурье к уравнению (2) относительно переменных *x* и *y* позволяют свести задачу отыскания функции *L* к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для сосредоточенной силы *F*, действующей в направлении оси *Z* на поверхность полупространства при *Z*=0, вертикальные перемещения поверхности могут быть представлены интегралом Ханкеля:

$$u_z(r) = \frac{F \cdot c_0}{4\pi} \cdot \int_0^\infty \left( t + \frac{\alpha_2}{t} \right) \cdot \frac{S_1 + S_2}{t \cdot \sqrt{k_1 + t^2} + \alpha_1} \cdot I_0(t_r) \cdot dt \qquad (3)$$

где $c = \dfrac{1}{(1+\xi) \cdot G}$, *G* – модуль сдвига и ξ – коэффициент бокового давления описываются любыми непрерывными и четными по *Z* функциями; $c_0$, $\xi_0$ и $G_0$ - значение соответствующей функции при *Z* = 0:

$$S_{1,2} = \sqrt{\alpha_3 + t^2 \pm \sqrt{\left(k_2 \cdot t^2 + \alpha_3^2\right)}},\ k_1 = \alpha_1 + \alpha_2,\ k_2 = 2 \cdot \alpha_3 - k_1 \qquad (4)$$

В таблице приведены значения коэффициентов $\alpha_i$ для этого общего случая, которые следует вычислять при *Z*=0. Для однородного полупространства формула (3) переходит в известное решение Буссинеска.

Таблица

Коэффициенты $\alpha_i$

| коэффициент | общий случай | предлагаемая модель |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $2G'' / G$ | $4m^2/3 - 2\delta \cdot (1+\xi_0)/\xi_0^2$ |
| $\alpha_2$ | $(c \cdot \xi)'' / c$ | $-2m^2/3 + \delta \cdot (1 - \xi_0^2 + 2\xi_0^3)/\xi_0^2$ |
| $\alpha_3$ | $(c''/c - \alpha_1)/2$ | $m - \delta \cdot \left(1 + \xi_0 + \xi_0^2\right)/\xi_0^2$ |

Для построения модели неоднородного по глубине основания на основе полученного общего решения (3) необходимо выявить законы изменения упругих характеристик. В работе [8] отмечено, что в грунтовых основаниях, которые находятся под действием собственного веса, на определенных глубинах следует ожидать появления состояния скрытой пластичности, при котором обобщенный модуль упругости $E$ равен нулю, а коэффициент бокового давления $\xi$ близок к единице. Следовательно, законы изменения упругих характеристик основания должны удовлетворять этим условиям.

Для материала основания при условии отсутствия возможности бокового расширения из соотношений между напряжениями и деформациями имеем:

$$\sigma_x = \sigma_y = \xi \cdot \sigma_z \tag{5}$$

$$e_z = \frac{\sigma_z \cdot f(\xi)}{E} \tag{6}$$

где $f(\xi) = \dfrac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 + \xi}$ (7)

Относительная деформация материала основания $\varepsilon_z$ определяется по результатам лабораторных испытаний [11]. Для грунта эта зависимость по [10] имеет следующий вид:

$$e_z = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{1 + \varepsilon_0} \tag{8}$$

где $\varepsilon_0$ - начальный коэффициент пористости; $\varepsilon$ - коэффициент пористости, определяемый по кривой компрессионного сжатия.

Как уже было отмечено, функции, описывающие изменение упругих характеристик основания, должны быть четными по *Z*. Для этого компрессионную кривую представим в виде:

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi} \cdot (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0) \cdot arctg(\sigma \cdot m_0) + \varepsilon_0 \tag{9}$$

где $m_0 = \dfrac{\pi \cdot \alpha_0}{2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}$ (10)

$\alpha_0$ - начальный коэффициент уплотнения [10]; $\varepsilon_\infty$ - предельный коэффициент пористости; $\sigma$ – действующее давление.

Представление компрессионной кривой в виде (9) дает хорошее совпадение с существующими функциональными зависимостями для описания процесса сжатия грунта при невозможности бокового расширения.

Подставляя (8) и (9) в (6), имеем:

$$E = k(z) \cdot f(z) \tag{11}$$

где $k(z) = \dfrac{E_0}{f(\xi_0)} \cdot \dfrac{mZ}{arctg(mZ)}$ ; $m = m_0 \cdot \gamma_0$ (12)

$E_0$ - начальный обобщенный модуль упругости; $\gamma_0$ - объемный вес грунта, значение которого принимается постоянным по глубине.

*В* формулу (11), определяющую значение обобщенного модуля упругости на глубине *Z*, входит функция (7), зависящая от коэффициента бокового давления, который изменяется от начального значения $\xi_o$ на поверхности до 1 на глубине скрытой пластичности. Так как эта глубина довольно большая, то будем считать, что ξ достигает 1 на бесконечности. На основе этих требований и предположений принимаем:

$$\xi = \sqrt{1 - \left(1 - \xi^2\right) \cdot e^{-\delta \cdot z^2}} \tag{13}$$

где δ - коэффициент, характеризующий скорость изменения по глубине.

В полученных формулах (11), (12) и (13) изменение упругих характеристик по глубине зависит от двух параметров *m* и δ. Параметр *m* определяется по кривой компрессионного сжатия по (10). Параметр δ определяется по (13) также из компрессионных испытаний путем измерения коэффициента бокового давления $\xi_h$ при нагрузке, эквивалентной глубине *h*. Другим методом определения параметров *m* и δ может служить измерение скорости распространения продольных $c_\alpha$ и поперечных волн на различных глубинах. При этом:

$$k(z) = c_\alpha^2 \cdot \rho; \quad \xi(z) = \sqrt{1 - 2 \cdot \left(\frac{c_s}{c_d}\right)^2} \tag{14}$$

где - ρ плотность материала основания.

Формулы (14) совместно с (12) и (13) дают возможность по скорости распространения волн на определенных глубинах определить параметры неоднородного основания.

По установленным зависимостям на рис.1 показано изменение упругих характеристик модуля упругости $E$ и коэффициента бокового давления ξ для относительной глубины при различных соотношениях $m$ и δ (--- $m/\sqrt{\delta}=50$; - $m/\sqrt{\delta}=100$; -.-.- $\delta=0$).

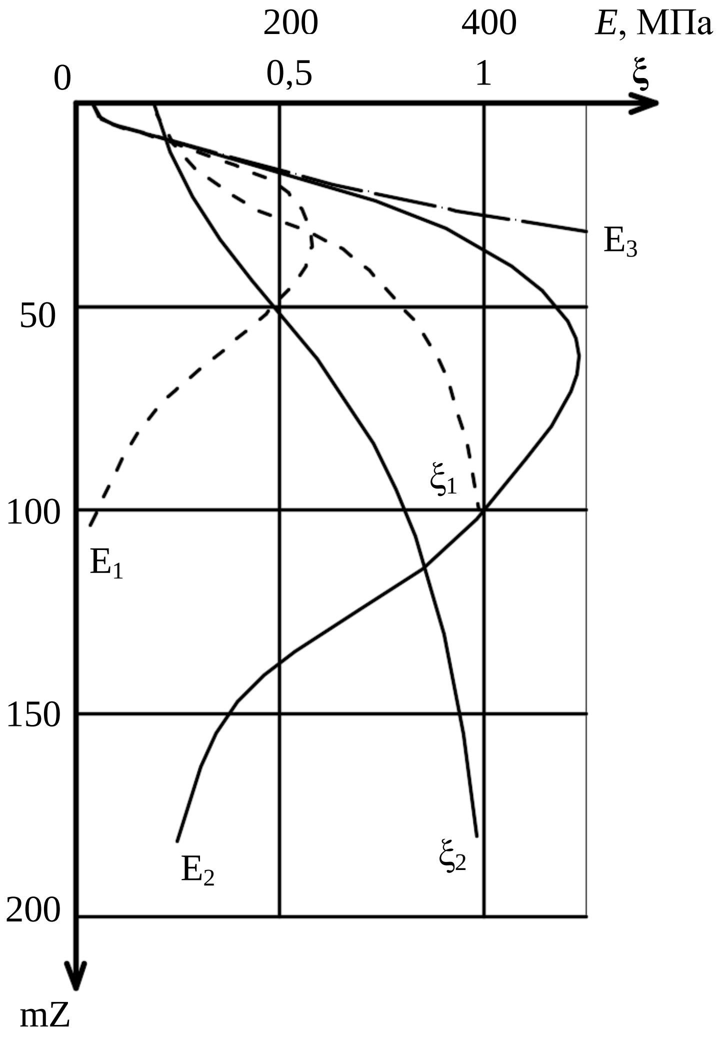


Рис. 1. – Изменение модуля упругости $E$ и коэффициента бокового давления ξ в зависимости от соотношения $m/\sqrt{\delta}$:

$E_1$ и $\xi_1$ при $m/\sqrt{\delta}=50$; $E_2$ и $\xi_2$ при $m/\sqrt{\delta}=100$; $E_3$ при $\delta=0$

При этом величина обобщенного модуля упругости *E* возрастает до определенной глубины и затем уменьшается. При давлении, соответствующем этому максимальному значению *E*, очевидно, происходит изменение структуры материала. Если не учитывать изменения коэффициента бокового давления (δ=0), то *E* (рис.1) неограниченно возрастает, что не может соответствовать действительности. В приведенных примерах были приняты следующие начальные значения на поверхности: $E_0$ = 20 МПа; $\xi_0$ = 0,19. Вычисление коэффициентов, входящих в (3) для предлагаемой модели, производится по формулам, приведенным в таблице.

## Литература

1. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1977. 256 с.

2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов: Учеб. Пособие для строительных вузов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.

3. Гаджиев М.А., Бабанов В.В., Драаз В.М., Гусейнов Я.И. Решение задачи Буссинеска и его применение для расчета балок на упругом основании для одного случая неоднородности по глубине // Жилищное строительство. 2013. № 5. С. 55-57.

4. Мальцева Т.В., Набоков А.В., Огороднова Ю.В. Деформации армированного водонасыщенного основания дорожной конструкции // Инженерный вестник Дона. 2019. № 9. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6215

5. Patel A., Kunal S., Devendra S. Application of Piezoceramic Elements for Determining Elastic Properties of Soils. Geotechnical and Geological Engineering 30(2). 2012. DOI: 10.1007/s10706-011-9476-z

6. Kuksa, L.V., Arzamaskova L.M., Evdokimov E.E., Sergeev A.V. Development of methods for designing structural elements made of structurally

heterogeneous materials by developing physicomechanical models. Strength of materials. 2006. 4(V.38): pp. 404-408.

7. Евдокимов Е. Е., Арзамаскова Л. М., Клименко В. И., Коновалов О. В. Исследование концентрации напряжений в элементах конструкций из поликристаллических материалов // Инженерный вестник Дона. 2018. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5349

8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел Т.2. М.: МИР, 1969. 882 с.

9. Плевако В.П. К теории упругости неоднородных сред. Прикладная математика и механика, т.35, вып.5, 1971, С. 853-860

10. Цытович Н.А. Механика грунтов. М.: Высшая школа, 1973. 280 с.

11. Болдырев Г.Г., Арефьев Д.В., Гордеев А.В. Определение деформационных характеристик грунтов различными лабораторными методами // Инженерные изыскания. 2010. № 8. С. 16-23.

## References

1. Klejn G.K. Stroitel'naya mekhanika sypuchih tel. Izd. 2-e, pererab. i dop. [Construction mechanics of bulk solids]. M.: Strojizdat, 1977. 256 p.

2. Vyalov S.S. Reologicheskie osnovy mekhaniki gruntov: Ucheb. Posobie dlya stroitel'nyh vuzov [ Rheological foundations of soil mechanics]. M.: Vysshaya shkola, 1978. 447 p.

3. Gadzhiev M.A., Babanov V.V., Draaz V.M., Gusejnov YA.I. ZHilishchnoe stroitel'stvo. 2013. № 5. pp. 55-57.

4. Mal'ceva T.V., Nabokov A.V., Ogorodnova YU.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. № 9. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6215

5. Patel A., Kunal S., Devendra S. Geotechnical and Geological Engineering 30(2). 2012. DOI: 10.1007/s10706-011-9476-z

6. Kuksa, L.V., Arzamaskova L.M., Evdokimov E.E., Sergeev A.V. Strength of materials. 2006. 4(V.38): pp. 404-408.

7. Evdokimov E. E., Arzamaskova L. M., Klimenko V. I., Konovalov O. V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5349

8. Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel [Plasticity and destruction of solids]. T.2. M.: MIR, 1969. 882 p.

9. Plevako V.P. Prikladnaya matematika i mekhanika, t.35, vyp.5, 1971, pp. 853-860

10. Cytovich N.A. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. M.: Vysshaya shkola, 1973. 280 p.

11. Boldyrev G.G., Aref'ev D.V., Gordeev A.V. Inzhenernye izyskaniya. 2010. № 8. pp. 16-23.

**Дата поступления: 7.04.2024**

**Дата публикации: 15.05.2024**