**А. А. Семенов, А. А. Овчаров**

# Математическая модель деформирования ортотропных конических оболочек

## Введение

Наиболее широкое применение конические оболочки находят в авиационной технике и машиностроении. Одной из первых работ по исследованию устойчивости конических оболочек была работа Х.М. Муштари [1]. Также здесь необходимо отметить вклад Н. А. Алумяэ, Э. И. Григолюка, А. В. Саченкова [2] и др. В работе Н. В. Валишвили [3] исследуется устойчивость конических оболочек на основе осесимметричной теории. В работе [4] задача устойчивости конических оболочек была сведена к отысканию собственных значений системы дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, и было показано, что решение необходимо искать приближенно.

Одним из применяемых ранее подходов к решению данной проблемы было сведение конической оболочки к цилиндрической. Радиус цилиндрической оболочки принимался как среднее между большим и малым радиусами конической оболочки. Данная методика хорошо себя показала при расчете оболочек с малым углом конусности [5], но при его увеличении специфичность строения конической оболочки начинает сильнее сказываться на ее устойчивости, и такой подход становится неприемлемым.

По сравнению с расчетом цилиндрических оболочек, исследовать такие конструкции труднее. Это проявляется, прежде всего, в усложнении геометрических соотношений, связывающих перемещения и деформации. К недавним работам в области исследования конических панелей и оболочек следует отнести статью F. Shadmehri, S.V. Hoa и M. Hojjati [6], в которой рассматриваются замкнутые конические оболочки из композиционных материалов, но математическая модель строится на теории первого порядка, а также не учитывается геометрическая нелинейность.

В работах [7, 8] были получены уравнения движения для подкрепленных ребрами жесткости конических оболочек при линейно-упругом деформировании с учетом поперечных сдвигов.

В исследовании [9] показана математическая модель деформирования оболочки, но не учитываются поперечные сдвиги и ортотропия материала.

В работе [10] приводится математическая модель деформирования оболочки на основе функционала полной энергии деформации, которая учитывает геометрическую и физическую нелинейности, поперечные сдвиги, возможность развития деформации ползучести, введение ребер жесткости с помощью метода конструктивной анизотропии с учетом сдвиговой и крутильной жесткости, но без учета ортотропии материала.

Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек общего вида на основе функционала полной энергии деформации была представлена в работе [11].

**Цель исследования**

Целью данной работы является построение математической модели деформирования конических оболочечных конструкций на основе функционала полной энергии деформации с учетом ортотропии материала, геометрической нелинейности и поперечных сдвигов.

**Материал и методы исследования**

Схематичное изображение панели конической оболочки показано на Рисунке 1.

Математическая модель деформирования оболочки строится на основе функционала полной энергии деформации (или уравнений равновесия), а также включает в себя геометрические соотношения, физические соотношения и граничные условия.

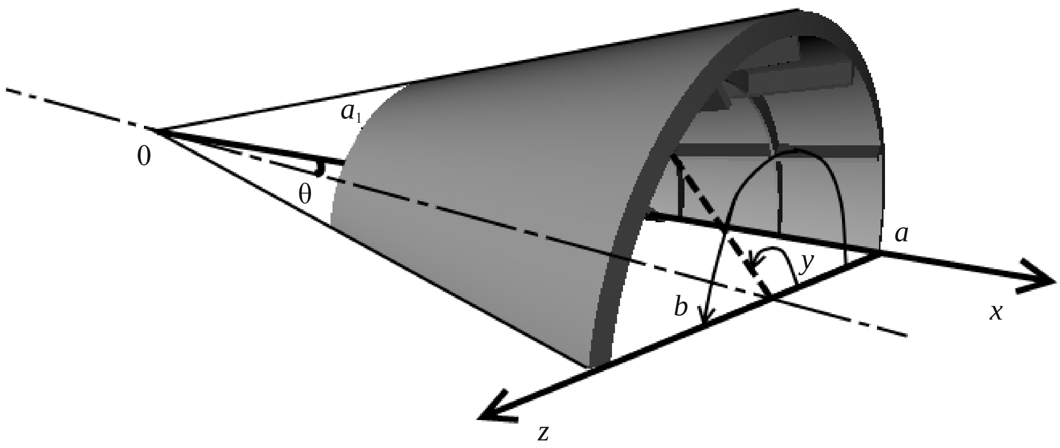


Рис. 1. – Схематичное изображение и принятая локальная система координат панели конической оболочки

Модель Кирхгофа-Лява, когда неизвестными являются только три функции перемещений $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$ и в уравнениях равновесия функции $U$ и $V$ имеют вторые производные, а функция $W$ – четвертые, дает существенную погрешность. Необходимо учитывать еще и поперечные сдвиги, т.е. рассматривать модель Тимошенко-Рейснера. Тогда неизвестными будут пять функций – три функции перемещений точек координатной поверхности $U, V, W$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях $XOZ, YOZ$: $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$. При этом получаемая модель будет геометрически нелинейной, т.е. зависимость деформаций от перемещений – нелинейная, что позволяет исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость. В дальнейшем будем рассматривать только модель Тимошенко-Рейснера.

В рассматриваемой модели геометрические соотношения для срединной поверхности оболочки принимают вид [11]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2}\theta_1^{\,2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2}\theta_2^{\,2}, \qquad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}U\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB}V\frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1\theta_2,$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right),$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат $x$, $y$ срединной поверхности; $\gamma_{xy}$ – деформации сдвига в плоскости $XOY$; $A, B, k_x, k_y$ – параметры Ляме, характеризующие геометрию оболочки и главные кривизны оболочки вдоль осей $x$ и $y$. Для конической оболочки они принимают вид $A = 1$ $B = x \cdot \sin\theta$ и $k_x = 0$ $k_y = \dfrac{ctg\theta}{x}$. Из-за наличия в формулах зависимости от координаты $x$, сложность системы соотношений (1) существенно возрастает.

Функции изменения кривизн $\chi_1$, $\chi_2$ и кручения $\chi_{12}$ принимают вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\Psi_x,$$
$$2\chi_{12} = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\Psi_y\right).$$

Для связи деформаций и напряжений используются физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука. Выразив напряжения через деформации, получим физические соотношения для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\right];$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\right]; \qquad (2)$$

$$\tau_{xy} = G_{12}\left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}\right];$$

$$\tau_{xz} = G_{13} k f(z)\left(\Psi_x - \theta_1\right);$$
$$\tau_{yz} = G_{23} k f(z)\left(\Psi_y - \theta_2\right),$$

здесь $E_1, E_2$ – модули упругости в направлениях $x$, $y$; $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ – модули сдвига в плоскостях $XOY, XOZ, YOZ$ соответственно; $\mu_{12}, \mu_{21}$ – коэффициенты Пуассона; $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ по толщине оболочки, $k$ – числовой коэффициент, соответствующий выбранной функции $f(z)$. Для гладких оболочек принимается

$$f(z) = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right), \; k = \frac{5}{6}.$$

Функция $f(z)$ при $z = -\frac{h}{2}$ и $z = \frac{h}{2}$ (верхняя и нижняя поверхности оболочки) обращается в нуль, а также удовлетворяет условиям [12]:

$$\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z)dz = 1; \; \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(z)dz = \frac{1}{k}.$$

На основе физических соотношений можно сформировать выражения для усилий и моментов. Интегрируя напряжения (2) по $z$ в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получим усилия и моменты, приведенные к срединной поверхности оболочки и приходящиеся на единицу длины сечения. Для гладких оболочек они будут иметь вид

$$N_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}\left[h\left(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y\right)\right],$$

$$N_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}\left[h\left(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x\right)\right],$$

$$N_{xy} = N_{yx} = G_{12}\left[h\gamma_{xy}\right],$$

$$M_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}\left[\left(\frac{h^3}{12}\right)\left(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2\right)\right], \qquad (3)$$

$$M_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left[\left(\frac{h^3}{12}\right)(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\right],$$

$$M_{xy} = M_{yx} = G_{12}\left[2\left(\frac{h^3}{12}\right)\chi_{12}\right],$$

$$Q_x = G_{13}kh(\psi_x - \theta_1),$$

$$Q_y = G_{23}kh(\psi_y - \theta_2),$$

где $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$ – нормальные усилия вдоль осей $x, y$ и сдвиговые усилия в плоскости $XOY$ соответственно; $M_x, M_y, M_{xy}, M_{\text{ух}}$ – изгибающие моменты в направлении осей $x, y$ и крутящие моменты; $Q_x, Q_y$ – поперечные силы в плоскостях $XOZ$ и $YOZ$.

Функционал Лагранжа полной энергии деформации оболочки является суммой работ внутренних и внешних сил, и принимает следующий вид [11]:

$$Э = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}(N_{xy} + N_{yx})\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + \right.$$
$$\left. + (M_{xy} + M_{yx})\chi_{12} + Q_x(\Psi_x - \theta_1) + Q_y(\Psi_y - \theta_2) - 2qW \right\} ABdxdy. \quad (4)$$

Подставив выражения для усилий и моментов (3) в функционал (4), получим

$$Э = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \frac{E_1 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\varepsilon_x^2 + \mu_{21}\varepsilon_x\varepsilon_y\right) + \frac{E_2 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\varepsilon_y^2 + \mu_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y\right) + G_{12}h\gamma_{xy}^2 + \right.$$
$$+ \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\frac{h^3}{12}\right)\left(\chi_1^2 + \mu_{21}\chi_2\chi_1\right) + \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\frac{h^3}{12}\right)\left(\chi_2^2 + \mu_{12}\chi_2\chi_1\right) +$$
$$\left. + G_{12}\left(\frac{h^3}{3}\right)\chi_{12}^2 + G_{13}kh(\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23}kh(\Psi_y - \theta_2)^2 - 2qW \right\} ABdxdy$$

Приведя подобные члены, получим

$$Э=\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left\{\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}h\varepsilon_x^2+\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}h\varepsilon_y^2+\right.$$

$$+\left[\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\mu_{21}h+\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\mu_{21}h\right]\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{1}{2}G_{12}2h\gamma_{xy}^2+G_{13}kh(\psi_x-\theta_1)^2+$$

$$+G_{23}kh(\psi_y-\theta_2)^2+\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\frac{h^3}{12}\right)\chi_1^2+\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\frac{h^3}{12}\right)\chi_2^2+$$

$$\left.+\left(\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\mu_{21}+\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\mu_{12}\right)\left(\frac{h^3}{12}\right)\chi_1\chi_2+2G_{12}\left(\frac{h^3}{6}\right)\chi_{12}^2-2qW\right\}ABdxdy$$

Учитывая, что $E_1\mu_{21}=E_2\mu_{12}$, введем обозначения:

$$\overline{G_2}=\frac{E_2}{E_1},\overline{G_{12}}=\frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1},\overline{G_{13}}=\frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1},\overline{G_{23}}=\frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1},$$

и приведем функционал к виду

$$Э=\frac{E_1}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})}\int_{a_1}^{a}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left\{h\varepsilon_x^2+\overline{G_2}h\varepsilon_y^2+2h\mu_{21}\varepsilon_x\varepsilon_y+\overline{G_{12}}h\gamma_{xy}^2+\right.$$

$$+\overline{G_{13}}kh(\psi_x-\theta_1)^2+\overline{G_{23}}kh(\psi_y-\theta_2)^2+\frac{h^3}{12}\chi_1^2+\frac{h^3}{12}\overline{G_2}\chi_2^2+ \tag{5}$$

$$\left.+\frac{h^3}{6}\mu_{21}\chi_1\chi_2+\frac{h^3}{3}\overline{G_{12}}\chi_{12}^2-2\frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}W\right\}ABdxdy.$$

Способ закрепления контура конструкции учитывается через граничные условия (Таблица 1), которые влияют в дальнейшем на выбор аппроксимирующих функций [13], а область, занимаемая оболочкой, задается в пределах интегрирования [14]: $a_1\le x\le a, y_1(x)\le y\le y_2(x)$. Использование функций $y_1(x), y_2(x)$ позволяет учитывать нестандартную форму контура оболочки.

Таблица № 1

Краевые условия при различном закреплении контура конструкции

| Закрепление | При $x=a_1$, $x=a$ | При $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ |
|---|---|---|
| Шарнирно-неподвижное закрепление | $U=V=W=M_x=\Psi_y=0$ | $U=V=W=\Psi_x=M_y=0$ |

| | | |
|---|---|---|
| Жесткое закрепление | $U = V = W = \Psi_x = \Psi_y = 0$ | $U = V = W = \Psi_x = \Psi_y = 0$ |
| Жесткое при $x = a_1$, $x = a$ и шарнирно-неподвижное при $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ | $U = V = W = \Psi_x = \Psi_y = 0$ | $U = V = W = \Psi_x = M_y = 0$ |
| Жесткое при $x = a_1$, $x = a$ и свободный край при $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ | $U = V = W = \Psi_x = \Psi_y = 0$ | $N_{xy} = N_y = Q_y = M_{xy} = M_y = 0$ |

## Заключение

Таким образом, полученные соотношения (1), (2), (5) вместе с краевыми условиями представляют собой математическую модель деформирования конической оболочечной конструкции с комплексным учетом таких факторов, как ортотропия материала, геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги.

Для дальнейшего исследования прочности и устойчивости рассматриваемых конструкций к представленной модели могут применяться методы, подходы и алгоритмы, представленные в работах [14 – 17].

## Литература:


1. Муштари, Х. М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек круглого сечения при кручении парами [Текст] / Х. М. Муштари. – В кн. Сборник научных трудов КАИ. – Казань: Издательство Казанского авиационного института, 1935. – С. 39–40.
2. Муштари, Х. М. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек круглого сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления [Текст] / Х. М. Муштари, А. В. Саченков // Прикладная математика и механика, 1954. т. XVIII, № 6. – С. 667–674.
3. Валишвили, Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ [Текст] / Н. В. Валишвили. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.

4. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Преображенский, И. Н. Устойчивость и колебания конических оболочек [Текст] / И. Н. Преображенский, В. З. Грищак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
6. Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells // Composite Structures. – Vol. 94. – 2012. Pp.787–792. DOI:10.1016/j.compstruct.2011.09.016
7. Овчаров, А. А. Математическая модель конической оболочки ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении [Текст] / А. А. Овчаров // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. СПбГАСУ. – СПб., 2004. – С. 127–132.
8. Овчаров, А. А. Компьютерные технологии исследования устойчивости панелей ребристых конических оболочек [Текст] / А. А. Овчаров // Вестник гражданских инженеров. – № 2(11). – 2007. – С. 104–111.
9. Бурцева, С. В. К расчету оболочек вариационно-энергетическим методом [Электронный ресурс] / С. В. Бурцева, Г. П. Стрельников, В. И. Авилкин // Инженерный вестник Дона. – 2012. – Т. 23, № 4, Ч. 2. – С. 1–3. Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1291 (доступ свободный)
10. Баранова, Д. А. Математическая модель деформирования подкрепленных оболочек вращения при учете различных свойств материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона. – 2012. – Т.20, № 2. – С. 45–50. Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2012/745 (доступ свободный)
11. Карпов, В. В. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения [Текст] / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Инженерно-строительный журнал. – № 5. – 2013. С. 100–106.

12. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
13. Карпов, В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек [Текст] / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.
14. Семенов, А. А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек [Текст] / А. А. Семенов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 1. – 2014. – С. 49–63.
15. Карпов, В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч.2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии [Текст] / В. В. Карпов. – М: Физматлит, 2011. – 248 с.
16. Атисков, А. Ю. Компьютерные технологии расчета оболочек [Текст] / А. Ю. Атисков, Д. А. Баранова, В. В. Карпов, Л. П. Москаленко, А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – 184 с.
17. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach // International Journal of Mechanical Sciences. – Vol.69. – 2013. Pp. 72–84. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026