Физические основы определения комплексного волнового числа для электромагнитных волн, распространяющихся через слой углепластика

Ю. А. Новикова

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: Приведен вывод соотношений, которые могут служить для описания процесса распространения или дифракции электромагнитных волн в полупроводящих слоях композитных материалов, которые в том числе рекомендуется применять при создании бортовых антенн и устройств СВЧ с меньшим весом. Получены как точные, так и упрощенные математические выражения для быстрой количественной оценки комплексного волнового числа. На примере углепластиков с высокой проводимостью показано, что их использование позволяет создавать волноводные тракты и отражатели антенн до миллиметрового диапазона длин волн.
Ключевые слова: углепластик, электродинамика, композит, распространение, поглощение, антенна.

Механическая прочность композитных материалов позволяет применять их в авиационной промышленности. Преимущество композитов заключается в их потенциале для снижения веса летательных аппаратов (ЛА) без потери высокой прочности и жесткости. Кроме этого, существует возможность их специального изготовления или подгонки с анизотропными свойствами [1]. При этом они являются перспективными и для использования в СВЧ радиотехнических системах, как при традиционном применении для отражателей, СВЧ трактов антенн, так и в реализации экранов подложек конформных антенн и антенных решеток [2,3]. Создание антенн и их размещение на летательных аппаратах (ЛА) из композиционных материалов в электродинамическом смысле представляет собой новую задачу, поскольку широкое распространение получила теория дифракции электромагнитных волн на телах, выполненных из хорошо проводящего материала. В случае использования для ЛА новых композиционных материалов (органопластиков, углепластиков) необходимо решать более общую задачу дифракции на телах из полупроводящих материалов различной формы в широком диапазоне от метровых до сантиметровых волн включительно. Выбор углепластика, как материала, который пригоден и перспективен для авиационного и радиотехнического применения, базируется на его физических особенностях, среди которых необходимо подчеркнуть симбиоз малой плотности и высокой прочности. Также следует учесть и инертность по химическому взаимодействию с возможными окисляющими элементами в широком диапазоне рабочих температур.

Исследования радиотехнических параметров углепластиков, обладающих уникальными механическими и весовыми свойствами при использовании на различных типах летательных аппаратов, необходимы для их грамотного применения в технике антенн СВЧ бортовых радиотехнических систем. Особый интерес представляют фольгированные углепластики [4]. Сами углепластики представляют собой среды с потерями. При решении задач электродинамики, связанных с расчетами процессов распространения электромагнитных волн в средах можно охарактеризовать их векторном (ε_a; μ_a; σ) из значений диэлектрической и магнитной проницаемостей и проводимости соответственно. Величины ε_a, μ_a и σ связывают электрические и магнитные поля, ток и индукцию.

В диэлектриках $\mu_a = \mu_0$, а $\varepsilon_a \neq \varepsilon_0$. Потери в этих материалах могут быть учтены заданием комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_a = \varepsilon' - j\varepsilon'',$$

ε' – вещественная, а ε'' – мнимая часть; j – мнимая единица.

Диэлектрические потери и потери на проводимость проявляют себя аналогичным образом, т.к. связь между ε'' и σ имеет вид $\omega\varepsilon''=\sigma$. Диэлектрические потери можно охарактеризовать также, задавая тангенс угла потерь $\mathrm{tg}\delta=\varepsilon''/\varepsilon'$. На основании теории взаимодействия электромагнитных волн с полупроводящими средами и реализации методов измерения электрических и радиотехнических параметров композиционных материалов рассмотрим случай распространения плоской волны в фольгированном углепластике − среде с потерями, для которой соблюдается выполнение приближенных условий Щукина-Леонтовича и толщиной фольги, удовлетворяющей условию выполнения поверхностного эффекта. Для электромагнитной волны с плоским фазовым фронтом в безграничной однородной среде при ненулевой проводимости среды существует известная взаимосвязь между векторами напряженности $\dot{\mathbf{E}}$ (электрического поля) и $\dot{\mathbf{H}}$ (магнитного поля) [5]

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \tilde{k}^2\dot{\mathbf{E}} = 0;\ \mathrm{div}\dot{\mathbf{E}} = 0;\ (1)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_a}\mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}}, \qquad (2)$$

$\tilde{k}^2$ − квадрат от значения волнового числа, записанного в комплексной форме, которое содержит как действительную, так и мнимую компоненты. Соотношения, приведенные выше для пары векторов напряженности электромагнитной волны − $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, фактически представляют собой случай описания электромагнитного поля через систему уравнений Максвелла в отсутствие внешних источников. Методика поиска значения вектора $\dot{\mathbf{E}}$ из (1) для рассматриваемой нами среды, базируется на представлении значения $\tilde{k}$ в следующей форме [6]:

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_a} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\left(1 - j\mathrm{tg}\delta\right)}.\ (3)$$

После определения вектора напряженности электрического поля, значение вектора напряженности магнитного поля определяется через подстановку уравнения (1) в уравнение (2). Для случая описания распространения однородной волны с плоским фазовым фронтом в классической декартовой системе координат используют соотношение (1), являющееся уравнением Гельмгольца в векторной форме. Для него характерно следующее поведение частных производных для векторов напряжённости [5]:

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{E}}}{\partial x}=\frac{\partial\dot{\mathbf{E}}}{\partial y}=0;\ \frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial x}=\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial y}=0.$$

Они, в свою очередь, позволяют записать следующие уравнения для компонент поля:

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_x}{\mathrm{d}z^2}+\tilde{k}^2\dot{E}_x=0,\ \frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_y}{\mathrm{d}z^2}+\tilde{k}^2\dot{E}_y=0,\ \frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_z}{\mathrm{d}z^2}+\tilde{k}^2\dot{E}_z=0. \qquad (4)$$

В случае с плоским фазовым фронтом и перпендикулярной ориентацией вектора поля по отношению к оси распространения, соответствующей направлению переноса энергии, взяв второе равенство из (1) и учтя соотношения, записанные в (3) и (4), можно прийти к следующим равенствам: $\mathrm{d}\dot{E}_z/dz=0$; $\dot{E}_z=0$. Уравнения в (4) для компонент напряженности электрического поля вдоль осей $0x$ и $0y$ приводят к решениям в следующей форме:

$$\dot{E}_x=\dot{A}_0\mathrm{e}^{-j\tilde{k}z}+\dot{B}_0\mathrm{e}^{j\tilde{k}z},\ \dot{E}_y=\dot{C}_0\mathrm{e}^{-j\tilde{k}z}+\dot{D}_0\mathrm{e}^{j\tilde{k}z}. \qquad (5)$$

где фигурируют значения комплексных амплитуд $\dot{A}_0$, $\dot{B}_0$, $\dot{C}_0$, $\dot{D}_0$, которые в свою очередь определяются через значения амплитуды и фазы для каждой компоненты в традиционном виде для комплексного представления: $\dot{A}_0=A_m\mathrm{e}^{j\varphi_A}$. Если для уравнения (2) расписать по соответствующим координатным осям вектор напряженности для магнитной напряженности, то, согласно [7]:

$$\dot{H}_x=\frac{1}{j\omega\mu_a}\frac{\mathrm{d}\dot{E}_y}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z_C}\left(-\dot{C}_0\mathrm{e}^{-j\tilde{k}z}+\dot{D}_0\mathrm{e}^{j\tilde{k}z}\right),$$
$$\dot{H}_y=-\frac{1}{j\omega\mu_a}\frac{\mathrm{d}\dot{E}_x}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z_C}\left(\dot{A}_0\mathrm{e}^{-j\tilde{k}z}-\dot{B}_0\mathrm{e}^{j\tilde{k}z}\right), \qquad (6)$$
$$\dot{H}_z=-\frac{1}{j\omega\mu_a}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{E}_y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\dot{E}_x}{\mathrm{d}y}\right)=0.$$

Величина $z_C = \sqrt{\mu_a / \tilde{\varepsilon}_a}$ – волновое сопротивление для материальной среды с учетом потерь. Поскольку в рассматриваемом случае энергия волны с плоским фазовым фронтом переносится вдоль оси 0z, то учитывая (5), (6) получаем, что:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-\gamma z},\ \dot{H}_y = \frac{\dot{A}_0}{z_C} e^{-\gamma z},\ \dot{E}_y = \dot{C}_0 e^{-\gamma z},\ \dot{H}_x = -\frac{\dot{C}_0 e^{-\gamma z}}{z_C},\ \dot{E}_z = 0,\ \dot{H}_z = 0. \quad (7)$$

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a};\ \gamma = j\tilde{k} = j\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a (1 - j\mathrm{tg}\delta)}, \quad (8)$$

где γ – коэффициент распространения, tgδ – тангенс для угла диэлектрических потерь. Представим первый в форме комплексной величины из сложения его реальной и мнимой составляющих:

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (9)$$

Тогда волновое сопротивление для распространяющейся электромагнитной волны также выражается в комплексной форме [8]:

$$z_C = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - j\mathrm{tg}\delta)}} = |z_C| e^{j\varphi}, \quad (9)$$

$$|z_C| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\delta}}} = \sqrt{\frac{\mu_a \cos\delta}{\varepsilon_a}},\ \varphi = \frac{\delta}{z}. \quad (10)$$

Возьмем два начальных уравнения (7) и используем подстановку в них выражений (9) и (10). Тогда для соответствующих ортогональных компонент напряженностей электрического и магнитного поля имеем:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_m e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\varphi_A}, \qquad \dot{H}_y = \frac{A_m}{|z_C|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\varphi_A - j\frac{\delta}{z}}. \quad (11)$$

Это означает, что временные зависимости для указанных компонент записываются в форме:

$$\mathbf{E}_x(t)=\mathbf{e}_x A_m \mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_A),$$
$$\mathbf{H}_y(t)=\mathbf{e}_y \frac{A_m}{|z_C|}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos\left(\omega t-\beta z+\varphi_A-\frac{\delta}{z}\right). \quad (12)$$

По своей сути, полученные временные зависимости характерны для электромагнитной волны с плоским фазовым фронтом, который движется в среде с фазовой скоростью $\upsilon=\omega/\beta$. Рассматриваемая среда является средой с потерями, следовательно, распространение волны сопровождается затуханием, в основе которого лежит преобразование энергии, переносимой волной в энергию теплового процесса. Экспоненциальное падение амплитуд по мере распространения описывается коэффициентом затухания – реальной частью значения γ.

Мнимая часть β описывает закон изменения фазы для компонент электромагнитного поля в направлении распространения. Если бы среда была без потерь, то β имело бы тот же смысл, что и волновое число k.

Теперь необходимо найти и сами выражения для оценки составляющих комплексного числа α и β. Используя (8), (9) можно перейти к форме уравнения следующего вида: $\alpha+j\beta=j\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a(1-j\mathrm{tg}\delta)}$. Если взять квадраты модулей по обе стороны представленного соотношения, а также использовать (10), а кроме этого использовать и равенство вещественных частей соотношения, то получим, что:

$$\alpha^2+\beta^2=\omega^2\varepsilon_a\mu_a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta},\ \alpha^2-\beta^2=-\omega^2\varepsilon_a\mu_a;\ (13)$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}-1\right)},\ \beta=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}+1\right)}.\ (14)$$

В случае, когда значение $\mathrm{tg}\sigma$ равно нулю, то подстановка в первое соотношение (14) приводит к обнулению величины α.

Изменение вектора Пойтинга для распространяющейся вдоль оси 0z электромагнитной волны с плоским фазовым фронтом описывается формулой:

$$\mathbf{\Pi} = \left[\mathbf{E}_x \mathbf{H}_y\right] = \frac{A_m^2}{|z_C|} \mathrm{e}^{-z\alpha_z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A\right) \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A - \frac{\delta}{z}\right) \mathbf{e}_z. \quad (15)$$

В соответствии с [8], можно ввести следующее соотношение для расчета модуля вектора Пойтинга:

$$\Pi_{\text{ср}} = \left|\frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_x \dot{\mathbf{H}}_y^*\right]\right| = \frac{A_m^2}{z|z_C|} \mathrm{e}^{-z\alpha_z} \cos\frac{\delta}{z_z}.$$

Для оценки значения фазовой скорости, используя (14), получим формулу:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta} + 1\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta} + 1\right)}}, \quad (16)$$

$c = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света. При этом анализ (14), показывает, что с ростом частоты фазовая скорость увеличивается. Из (12) получим и значение, которое характеризует длину волны:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{T}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\left(\sqrt{\mathrm{tg}^2\delta + 1} + 1\right)}}. \quad (17)$$

В случае, когда среда распространения характеризуется условием ($\mathrm{tg}\delta << 1$), то есть представляет собой диэлектрический материал, можно упростить вычисления. Для этого можно воспользоваться тем, что для малых значений x действительно упрощенное соотношение вида $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, получаем следующие соотношения для основных параметров, характеризующих случай распространения электромагнитной волны:

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2}\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\,\mathrm{tg}\delta = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \qquad \beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\left(1+\frac{\mathrm{tg}^2\delta}{8}\right) = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a},$$

$$\upsilon = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1+\dfrac{\mathrm{tg}^2\delta}{8}\right)} \approx \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad |z_C| \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{tg}^2\delta}{z}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \quad \frac{\delta}{z} \approx 0. \qquad (18)$$

Если среда характеризуется повышенной проводимостью, для которой следует считать, что $\mathrm{tg}\delta >> 1$, то можно получить соответствующие упрощенные формулы:

$$\alpha \approx \beta \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\mathrm{tg}\delta} = \sqrt{\frac{\mu_a\delta\omega}{2}}, \quad \upsilon = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\mathrm{tg}\delta}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\sigma}},$$

$$|z_C| \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a\mathrm{tg}\delta}} = \sqrt{\frac{\mu_a\omega}{\sigma}}, \quad \psi = \frac{\delta}{z} = \frac{\pi}{2}. \qquad (19)$$

Известно, что расстояние Δ, которое проходит волна с уменьшением амплитуды вектора напряженности электрического поля в *e* раз, по определению считается глубиной проникновения [9]. В соответствии с [10], связь между Δ и длина волны λ в проводнике задается формулами:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu_a\sigma}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{4\pi/f\mu_a\sigma}.$$

Полученные соотношения позволяют производить поиск параметров углепластика на основе результатов измерений проводимости с применением постоянного тока. Для среды, в которой идет распространение электромагнитной волны, согласно [9], можно найти граничную частоту. Последняя определяет собой условие равенства между амплитудами токов смещения и проводимости ($\mathrm{tg}\delta = 1$):

$$f_{\text{гр}} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon'}. \qquad (21)$$

При высоких значениях $f >> f_{\text{гр}}$ среда проявляет диэлектрические свойства. Для нее распределение токов определяются в основном через токи смещения. При низких значениях $f << f_{гр}$ среда по сути представляет собой проводник, а распределение токов задается посредством токов проводимости.

Для измерений проводимости на постоянном токе может был вырезан из листа углепластика длинной *l*. Проводимость образца следует измерять при протекании тока вдоль волокон и поперек их по известной формуле [11]:

$$\sigma = l/RS$$

где *S*' – площадь поперечного сечения. Таким образом, можно выявить анизотропию электрических параметров углепластика. После этого необходимо оценить значения граничных частот по формуле (21). Например, для углепластиков с повышенной проводимостью, отличающихся $\sigma \geq 10^4 \left[\text{Ом} \cdot \text{м}\right]^{-1}$ в предположении, что $\varepsilon' \leq 10\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}$, получим, что *f*гр>20000 ГГц, это говорит о том, что вплоть до частот миллиметрового диапазона, такие углепластики ведут себя как проводник и могут быть использованы для СВЧ-трактов антенных систем.

Литература

1. Pecho P., Hrúz M., Novák A., Trško L. Internal Damage Detection of Composite Structures Using Passive RFID Tag Antenna Deformation Method: Basic Research// Sensors, 2021, № 21 URL: doi.org/10.3390/s21248236.

2. R. C. Hansen. Conformal Antenna Array Design Handbook. Washington: Naval Air Systems Command, 1981. 448 p.

3. F.L. Matthews and R.D. Rawlings. Composite Materials: Engineering and Science. London: Woodhead Publishing, 1999. 470 p.

4. Гардымов Г. П., Мешков Е. В., Пчелинцев А. В., Лашманов Г. П., Афанасьев Ю.А. Композиционные материалы в ракетно-космическом аппаратостроении. СПб.: СпецЛит, 1999. 271 с.

5. Федоров Н. Н. Основы электродинамики. М.: Высшая школа, 1980. 399 с.

6. Красюк В. Н., Оводенко А. А., Бестугин А. Р., Рыжиков М. Б. Нагревостойкие антенны космических и гиперзвуковых летательных аппаратов. Том.1 Теория. СПб: Политехника, 2013, 783 с.

7. Красюк В. Н. Методика расчета волноводных антенн с многослойными диэлектрическими покрытиями // Оборонная техника. 2001. № 6/7. С. 23–31.

8. Гринев А. Ю., Гиголо А. И. Математические основы и методы решения задач электродинамики. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.

9. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высшая школа, 1990, 335 с.

10. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.

11. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.

12. Каблов Е.Н., Гуняев Г.М., Ильченко С.И. и др. Конструкционные углепластики с повышенной проводимостью // Авиационные материалы и технологии. 2004. №2. С. 25-36.

References

1. Pecho P., Hrúz M., Novák A., Trško L. Sensors. 2021. No 21. URL: doi.org/10.3390/s21248236.

2. R. C. Hansen. Conformal Antenna Array Design Handbook. Washington: Naval Air Systems Command, 1981. 448 p.

3. F.L. Matthews and R.D. Rawlings. Composite Materials: Engineering and Science. London: Woodhead Publishing, 1999. 470 p.

4. Gardymov G. P., Meshkov E. V., Pchelintsev A. V., Lashmanov G. P., Afanas’yev Yu.A. Kompozitsionnyye materialy v raketno-kosmicheskom

apparatostroyenii [Composite materials in rocket and space apparatus construction]. SPb.: SpetsLit, 1999. 271 p.

5. Fedorov N. N. Osnovy elektrodinamiki [Fundamentals of electrodynamics]. M.: Vysshaya shkola, 1980. 399 p.

6. Krasyuk V. N., Ovodenko A. A., Bestugin A. R., Ryzhikov M. B. Nagrevostoykiye antenny kosmicheskikh i giperzvukovykh letatel’nykh apparatov. Tom.1 Teoriya [Heat-resistant antennas of space and hypersonic aircraft. Volume 1 Theory]. SPb: Politekhnika, 2013, 783 p.

7. Krasyuk V. N. Oboronnaya tekhnika. 2001. No 6/7. pp. 23–31.

8. Grinev A. Yu., Gigolo A. I. Matematicheskiye osnovy i metody resheniya zadach elektrodinamiki [Mathematical foundations and methods for solving electrodynamics problems]. M.: Radiotekhnika, 2015. 216 p.

9. Grigor’yev A. D. Elektrodinamika i tekhnika SVCh [Electrodynamics and microwave technology]. M.: Vysshaya shkola, 1990, 335 p.

10. Markov G. T., Chaplin A. F. Vozbuzhdeniye elektromagnitnykh voln [Excitation of electromagnetic waves]. M.: Radio i svyaz’, 1983. 296 p.

11. Vaynshteyn L. A. Elektromagnitnyye volny [Electromagnetic waves]. M.: Radio i svyaz’, 1988. 440 p.

12. Kablov E.N., Gunyayev G.M., Il’chenko S.I. i dr. Aviatsionnyye materialy i tekhnologii. 2004. No 2. pp. 25-36.