

Моделирование 3-ткани на поверхностях

Ю.М. Бельченко, Н.М. Шумун

Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: Предложен способ задания поверхности определенной дискретным каркасом при помощи плоской 3-ткани. Задано однопараметрическое не параметризованное семейство кривых, т.е. дискретный каркас линий. Возможны два случая задания линий дискретного каркаса поверхности: точечными рядами или уравнениями.

Ключевые слова: Дискретный, каркас, поверхность, плоская, 3-ткань, сплайн, уравнения, 3-ткани, поверхности.

Известно, что поверхность не может быть задана однозначно дискретным каркасом.

Здесь предлагается способ задания поверхности определенной дискретным каркасом при помощи плоской 3-ткани.

Положим, что каркас упорядочен, т.е.:

- во-первых, линии каркаса являются плоскими;
- во-вторых, проекции линий каркаса на плоскость XOY представляют собой пучок прямых с собственным или несобственным центром; в этом случае, между элементами пучка устанавливается линейная зависимость.

Пусть в пространстве задано однопараметрическое не параметризованное семейство кривых, т.е. дискретный каркас линий. Проекции линий каркаса на плоскости XOY изобразятся семейством параллельных прямых с уравнением $y_i = K_x + c_i$. Тогда уравнение дискретного каркаса поверхности можно записать в следующем виде:

$$y_i = K_x + c_i, z_j = f_i(x), \quad (1)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots$

Если использовать элементарное преобразование вращения так, чтобы прямые семейства стали параллельными оси OY , то уравнение (1) можно упростить:

$$x_i = c_i, z_i = f_j(y). \quad (2)$$

Возможны два случая задания линий дискретного каркаса поверхности: точечными рядами или уравнениями. Во втором случае уравнение каркаса поверхности соответствует уравнению (2). В первом случае точечные ряды можно задать любыми интерполяционными полиномами, в частности, параметрическими В-сплайнами, уравнения которых записывается следующим образом:

$$S_{Ri}(y) = f_i \cdot (1-t) + f_{i+1} \cdot t + C_i \cdot \left[\frac{t^3}{1+p_i \cdot (1-t)} - t \right] + D_i \cdot \left[\frac{(1-t)^3}{1+q_i \cdot t} - (1-t) \right]. \quad (3)$$

Сплайн, записанный в виде (3), непрерывен в узлах сетки, которой являются проекции точек каркаса на плоскость XOY . Коэффициенты C_i и D_i определим так, чтобы были непрерывными его первая и вторая производные.

$$S'_{Ri}(y) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{C_i}{h_i} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot t^2 \cdot (1+p_i) - 2 \cdot t^3 \cdot p_i}{[1+p_i \cdot (1-t)]^2} - 1 \right\} + \frac{D_i}{h_i} \cdot \left\{ \frac{-3 \cdot (1-t)^2 (1+q_i) + 2 \cdot (1-t)^3 \cdot q_i}{(1+q_i \cdot t)^2} + 1 \right\}, \quad (4)$$

$$S'_{Ri}(y_i+) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{(2+q_i) \cdot D_i}{h_i} - \frac{C_i}{h_i},$$

$$S'_{Ri}(y_{i+1}-) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{(2+p_i) \cdot C_i}{h_i} + \frac{D_i}{h_i}$$

Обозначая $m_i = S'_R(y_i)$, $i = 0, \dots, N$, получаем уравнения

$$C_i + (2+q_i) \cdot D_i = (f_{i+1} - f_i) - m_i \cdot h_i,$$

$$(2+p_i) \cdot C_i + D_i = (f_{i+1} - f_i) + m_{i+1} \cdot h_i.$$

Из уравнений вычисляем

$$C_i = \frac{-(3+q_i) \cdot (f_{i+1} - f_i) + h_i \cdot m_i + (2+q_i) \cdot h_i \cdot m_{i+1}}{(2+q_i) \cdot (2+p_i) - 1},$$

$$D_i = \frac{(3 + p_i) \cdot (f_{i+1} - f_i) - h_i \cdot m_{i+1} - (2 + p_i) \cdot h_i \cdot m_{i+1}}{(2 + q_i) \cdot (2 + p_i) - 1}. \quad (5)$$

Формулы (5) являются следствием непрерывности $S_R'(y)$. Далее, дифференцируя (4), получаем:

$$S_{Ri}''(y) = C_i \cdot \frac{2 \cdot p_i^2 \cdot t^3 - 6 \cdot p_i \cdot (1 + p_i) \cdot t^2 + 6 \cdot (1 + p_i)^2 \cdot t}{[1 + p_i \cdot (1 - t)]^3 \cdot h_i^2} + D_i \frac{2 \cdot q_i^2 \cdot (1 - t)^3 - 6 \cdot q_i \cdot (1 + q_i) \cdot (1 - t)^2 + 6 \cdot (1 + q_i)^2 \cdot (1 - t)}{(1 + q_i \cdot t)^3 \cdot h_i}. \quad (6)$$

Отсюда следует

$$S_{Ri}''(y) = \frac{2 \cdot D_i}{h_i^2} \cdot (3 + 3 \cdot q_i + q_i^2),$$

$$S_{Ri}''(y) = \frac{2 \cdot C_{i-1}}{h_{i-1}^2} \cdot (3 + 3 \cdot p_{i-1} + p_{i-1}^2),$$

и условие непрерывности $S_{Ri}''(y)$ в точке x_i имеет вид

$$h_i^2 \cdot C_{i-1} \cdot (3 + 3 \cdot p_{i-1} + p_{i-1}^2) = h_{i-1}^2 \cdot D_i \cdot (3 + 3 \cdot q_i + q_i^2).$$

Подставляя сюда D_i и C_{i-1} из (5), получаем

$$\begin{aligned} \lambda_i \cdot P_{i-1} \cdot m_{i-1} + [\lambda_i \cdot P_{i-1} \cdot (2 + q_{i-1}) + \mu_i \cdot Q_i \cdot (2 + p_i)] \cdot m_i + \mu_i \cdot Q_i \cdot m_{i+1} = \\ = \lambda_i \cdot P_{i-1} \cdot (3 + q_{i-1}) \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \cdot Q_i \cdot (3 + p_i) \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \end{aligned} \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где $\lambda_i = h_i \cdot (h_{i-1} + h_i)^{-1}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$,

$$P_{i-1} = \frac{3 + 3 \cdot p_{i-1} + p_{i-1}^2}{(2 + q_{i-1}) \cdot (2 + p_{i-1}) - 1},$$

$$Q_i = \frac{3 + 3 \cdot q_i + q_i^2}{(2 + q_i) \cdot (2 + p_i) - 1}.$$

Для сокращения записи будем обозначать левую и правую части (7) соответственно через $\varphi \cdot (m_{i-1}, m_i, m_{i+1})$ и c_i .

Для задания 3-ткани на дискретной поверхности введем на плоскости XOY еще два семейства параллельных прямых – одно семейство прямых

параллельных OX с уравнением $y_i = c_i$, а второе семейство диагональных прямых с уравнением $x_i + y_i = 1$. Третье семейство будет диагональным (рис.1).

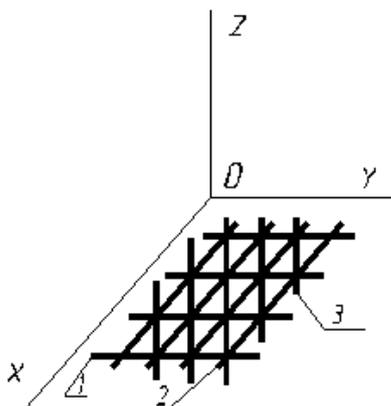


Рис. 1. – 3-ткань на плоскости XOY

Семейства 1 и 2 являются проекциями плоскостей, которые пересекают линии каркаса в точках x_i, y_i, z_i . Эти множества точек позволяют провести интерполяцию рядов в ортогональном и диагональном направлениях.

Тогда уравнения каркаса линий в ортогональном направлении (вдоль семейства 1 на рис. 1.) будут иметь следующий вид (см. уравнения 3 – 6)

$$S_{Ri}(x), S_{Ri}'(x), S_{Ri}''(x), y_i = c_i, \quad (8)$$

а уравнения каркаса линий в диагональном направлении (вдоль семейства на рис. 2) запишем в виде

$$S_{Ri}(x+y), S_{Ri}'(x+y), S_{Ri}''(x+y), x_i + y_i = 1, (i = 1,2,3,...). \quad (9)$$

Таким образом, уравнения 3-ткани поверхности (рис. 2), опустив уравнения первых и вторых производных, можно записать так

$$S_{Ri}(y), x_i = c_i; S_{Ri}(x), y_i = c_i; S_{Ri}(x+y), x_i + y_i = 1 \quad (10)$$

или

$$z_{ji} = f_i(y), x_i = c_i; S_{Ri}(x), y_i = c_i; S_{Ri}(x+y), x_i + y_i = 1. \quad (11)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots$

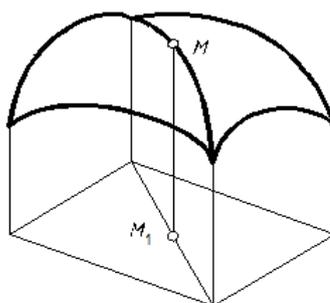


Рис. 2. – Нахождение точки M по ее проекции M_1

Следовательно, не имея уравнения поверхности, мы можем определить любую точку M лежащую на поверхности по ее проекции M_1 . При этом существует возможность управлять формой диагональной сплайн-кривой.

Другим вариантом дискретного каркаса является радиальное расположение его линий. При этом пучки прямых на плоскости XOY , определяющих проекции «несущих» плоскостей линий каркаса, можно расположить в вершинах треугольника или на окружности через 120° . Уравнения пучков запишутся в виде

$$y_{i1} = K_j \cdot x + c_1, y_{i2} = K_j \cdot x + c_2, y_{i3} = K_j \cdot x + c_3 \quad (12)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$

Остальные уравнения 3-ткани поверхности для определения точек $M...$ по их проекциям $M_1...$ аналогичны рассмотренным выше.

Литература

1. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Конструирование плоскостей на базе плоской шестиугольной 3-ткани // Инженерный вестник Дона, 2015, №2 (часть 2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.
2. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Моделирование 3-ткани для минимальных поверхностей // Инженерный вестник Дона, 2015, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2015/3371/.
3. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499.
4. Рачковская Г.С. Построение кинематических линейчатых поверхностей на основе геометрической модели комплексного движения для внутреннего обкатывания в паре однополостных гиперболоидов вращения // Инженерный вестник Дона, 2016, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3635/.
5. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная графика кинематических линейчатых поверхностей на основе внутреннего обкатывания в парах контактирующих цилиндров и конусов // Инженерный вестник Дона, 2016, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3634/.
6. Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей: автореф. дис. д-р физ.-мат. наук: 01.01.04. - Казань, 2007. - 29 с.
7. Гольдберг В.В. О существовании паратактических три-тканей // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2008. - №4 (551). - С. 22-27.
8. Пиджакова Л.М. Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2009. - 20 с.



9. Шестакова М.А. Шестиугольные три-ткани с частично симметричным тензором кривизны: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук наук: 01.01.04. - Тверь, 2003. - 116 с.

10. Жан Гастон Дарбу Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. В 4 томах. Том 1. Общие понятия. Криволинейные координаты. Минимальные поверхности. М.: Институт компьютерных исследований, 2013. 620 с.

11. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

12. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

References

1. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2 (chast' 2) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.

2. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3371/.

3. Rachkovskaya G.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

4. Rachkovskaya G.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3635/.

5. Rachkovskaya G.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3634/.

6. Tolstikhina G.A. Algebra i geometriya tri-tkaney, obrazovannykh sloeniyami raznykh razmernostey: avtoref. dis. d-r fiz.-mat. nauk: 01.01.04



[Algebra and geometry three - the fabrics formed by sloyniye of different razmermernost]. Kazan', 2007, 29 p.

7. Goldberg V.V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika (Rus), 2008. №4 (551). URL: cyberleninka.ru/article/n/o-suschestvovanii-paratakticheskikh-tri-tkaney.

8. Pidzhakova L.M. Tri-tkani s kovariantno postoyannymi tenzorami krivizny i krucheniya: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Tri - fabrics with covariant constant tensors of curvature and torsion]. Tver', 2009, 20 p.

9. Shestakova M.A. Shestiugol'nye tri-tkani s chastichno simmetrichnym tenzorom krivizny: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Shestiugolne three - fabrics with partially symmetric tensor of curvature]. Tver', 2003, 116 p.

10. Darbu Zh.G. Lekcii po obshhej teorii poverhnostej i geometricheskie prilozhenija analiza beskonechno malyh. V 4 tomah. Tom 1. Obshhie ponjatija. Krivolinejnye koordinaty. Minimal'nye poverhnosti. M.: Institut komp'yuternyh issledovaniy, 2013. 620 p.

11. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

12. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.