Разработка метода оптимизации траектории облета среды с препятствиями на основе кривых Безье с годографом Пифагора

К.Ю. Ганьшин, Д.Л. Винокурский, О.С. Мезенцева, Ф.В. Самойлов

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

Аннотация: В статье описывается способ оптимизации процесса оптимизации траектории, путем замены рёбер траектории, на пространственные кривые Безье с годографом Пифагора.

Ключевые слова: алгоритмы генерации траекторий, методы построения формации групп БПЛА, математические модели БПЛА, многоагентные системы, кривые Безье, годограф Пифагора.

Актуальность задачи оптимизации траектории облета среды с препятствиями

На сегодняшний день стремительное развитие получают летательные робототехнические системы по типу малогабаритных мультироторных летательных аппаратов, которые способны не только перемещаться в воздушном пространстве, но и удерживать свою позицию в нём. Данные роботы используются во многих сферах: транспортировка объектов, обеспечение охранного периметра, службы спасения, проведение видеосъёмок, сканирование местности с целью получения трёхмерной её модели, картографирование земных поверхностей, применение в развлекательных шоу.

Анализ существующих подходов решения задачи траекторного управления группой автономных БПЛА показал, что использование современных автономных БПЛА в практике работы, например, службы спасения, требует высокой утилизации вычислительных ресурсов для картирования местности, построения траектории движения в различных областях (лес, горный рельеф), координирования группы и удержания формации группы автономных БПЛА. Для решения всех этих задач приходится увеличивать количество дорогого оборудования на каждом дроне, что приводит к их удорожанию, увеличению массы, потери управляемости и раскоординации группы. Отсюда автономный БПЛА теряет возможность двигаться по заданной траектории, значительно увеличивается относительное отклонение от заданной траектории. Поэтому задача разработки математических методов построения гладких проходимых траекторий БПЛА с высокой масштабируемостью на группу является актуальной.

Определение пространственной кривой Безье пятого порядка с годографом Пифагора

Дадим определение термина *годограф*. Годограф – геометрический набор параметрической кривой, описываемый первой её параметрической кривой. Для пространственной кривой $r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ годограф будет представлен как $r'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$. Если представить кривую n-ой степени параметризированными полиномами, то она примет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \quad z(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \qquad (1)$$

Годограф подобной параметризованной кривой будет представлен в виде кривой n-1-й степени, при этом для каждого t длина годографа [1] может быть выражена следующим образом:

$$\sigma(t) = |r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \qquad (2)$$

Если ввести длину кривой s, измеряемой вдоль $r(t)$, начиная от некой точки, то можно определить годограф как параметрическую скорость кривой:

$$\sigma(t) = \frac{ds}{dt}, \qquad (3)$$

откуда уже можно выразить непосредственно длину кривой:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (4)$$

Сама же кривая будет обладать свойствами годографа Пифагора в том случае, если её компоненты и магнитуда $\sigma(t)$ будут являться элементами пифагоровой тройки. Представление подобной кривой в области вещественных чисел легко представить на плоскости [2]:

$$\sigma^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) \quad (5)$$

$$x'(t) = u^2(t) - v^2(t) \quad (6)$$

$$y'(t) = 2u(t)v(t) \quad (7)$$

Для построения пространственной кривой со свойствами годографа Пифагора, наиболее удобным решением будет переход в кватернионное пространство [3]. Так, годограф Пифагора в форме кватернионного полинома примет следующий вид:

$$r'(\xi) = \mathcal{A}(\xi)i\mathcal{A}^*(\xi) = [u^2(\xi) + v^2(\xi) - p^2(\xi) - q^2(\xi)]i + 2[u(\xi)q(\xi) + v(\xi)p(\xi)]j + 2[v(\xi)q(\xi) - u(\xi)p(\xi)]k \quad (8)$$

где

$$\mathcal{A}(\xi) = u(\xi) + v(\xi)i + p(\xi)j + q(\xi)k \quad (9)$$

$\mathcal{A}^*(\xi) = u(\xi) - v(\xi)i - p(\xi)j - q(\xi)k$ – сопряжённый к $\mathcal{A}(\xi)$ кватернион.

Из данных выражений выведем комплексные многочлены годографа Пифагора:

$$\alpha(\xi) = u(\xi) + iv(\xi), \quad \beta(\xi) = q(\xi) + ip(\xi) \quad (10)$$

и запишем параметрическую скорость:

$$\sigma(\xi) = |\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 \quad (11)$$

при этом $\sigma(\xi) = |\mathcal{A}(\xi)|^2 = |r'(\xi)|$.

Согласно [4], пространственные кривые пятой степени (квинтики) выражаются через комплексные квадратичные многочлены в форме Бернштейна следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \alpha_0(1-\xi)^2 + \alpha_1 2(1-\xi)\xi + \alpha_2\xi^2, \\ \beta(\xi) &= \beta_0(1-\xi)^2 + \beta_1 2(1-\xi)\xi + \beta_2\xi^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Как утверждается в [5], благодаря методам на основе интерполяции Эрмита возможно построение кривой Безье со свойствами годографа Пифагора по нескольким параметрам [6], а именно: задание начальной и конечной точек кривой p_i, p_f, задание значения касательных при данных точках t_i, t_f и задание общей длины кривой S. Так, определим кватернионный многочлен $\mathcal{A}(\xi)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}_0(1-\xi)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-\xi)\xi + \mathcal{A}_2\xi^2 \qquad (13)$$

$$\mathcal{A}(\xi) = \alpha(\xi) + k\beta(\xi) \qquad (14)$$

Задание мнимого элемента i кватерниона представлено в следующей форме:

$$\exp(\gamma\, i) = \cos\gamma + \sin\gamma\, i, \qquad (15)$$

где γ – любое вещественное число. Интерполяция касательных при начальной и конечной точках t_i, t_f позволяет выразить коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_2$, выражаемые как

$$\mathcal{A}_0 = \alpha_0 + k\beta_0 \qquad (16)$$

$$\mathcal{A}_2 = \alpha_2 + k\beta_2 \qquad (17)$$

следующим образом:

$$\mathcal{A}_0 = w[c_i \exp(\phi_i\, i) + s_i\, k]\exp(\psi_0\, i) \qquad (18)$$

$$\mathcal{A}_2 = w\left[c_f \exp\left(\phi_f\, i\right) + s_f\, k\right]\exp(\psi_2\, i) \qquad (19)$$

где ψ_0, ψ_2 – свободные коэффициенты, w – коэффициент, обеспечивающий задание кривой с указанной её длиной, $c_i = \cos\frac{1}{2}\theta_i$, $c_f = \cos\frac{1}{2}\theta_f$; $s_i = \sin\frac{1}{2}\theta_i$, $s_f = \sin\frac{1}{2}\theta_f$; θ_i, θ_f – полярные углы касательных t_i, t_f соответственно, ϕ_i, ϕ_f – азимутальные углы касательных t_i, t_f.

Далее, определим вектор d, через который будет произведено определение значения $\mathcal{A}_1$:

$$d = 120\Delta p - 15w^2\left(t_i + t_f\right) + 5(\mathcal{A}_0 i \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 i \mathcal{A}_0^*) \qquad (20)$$

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{3}{4}(\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_2) + \frac{\sqrt{d}}{4}\frac{|d|i+d}{||d|i+d|}\exp(\psi_1 i) \qquad (21)$$

где ψ_1 – свободный параметр. Далее, пространственная кривая Безье может быть выражена в форме Бернштейна следующим образом:

$$r(\xi) = \sum_{i=0}^{5} p_i \binom{5}{i} (1-\xi)^{5-i}\xi^i \qquad (22)$$

где p_i – контрольные точки [7]. Если принять контрольную точку $p_0 = p_i$, а $p_5 = p_f$, то все контрольные точки легко определимы через следующие выражения:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0 i \mathcal{A}_0^* \\
p_2 &= p_1 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_0 i \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_0^*) \\
p_3 &= p_2 + \frac{1}{30}(\mathcal{A}_0 i \mathcal{A}_2^* + 4\mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2 i \mathcal{A}_0^*) \\
p_4 &= p_3 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 i \mathcal{A}_1^*) \\
p_5 &= p_4 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_2 i \mathcal{A}_2^*
\end{aligned} \qquad (23)$$

Теперь возможно описание процесса оптимизации траектории. Предлагаемый способ оптимизации заключается в замене рёбер траектории, образованной алгоритмом RRT*, на пространственные кривые Безье с годографом Пифагора так, что каждая пара вершин, ранее образовывавшая ребро, станет конечными контрольными точками кривой [8 – 10]. Благодаря тому, что кривая задаётся с помощью касательных при точках, становится возможным производить сглаживание углов двух отдельно взятых рёбер таким образом, что БПЛА получает возможность обходить их с заранее заданной скоростью без существенного замедления и повышенных энергозатрат.

Процесс оптимизации сгенерированной траектории производится за счёт итеративной выборки трёх точек, начиная со стартовой точки. По каждым трём точкам осуществляется генерация кривой Безье с годографом Пифагора: точки проецируются на определяемую ими плоскость, осуществляется поиск дуги, на которой лежат заданные точки, после чего вычисляется длина дуги, используемая в качестве параметра при задании кривой.

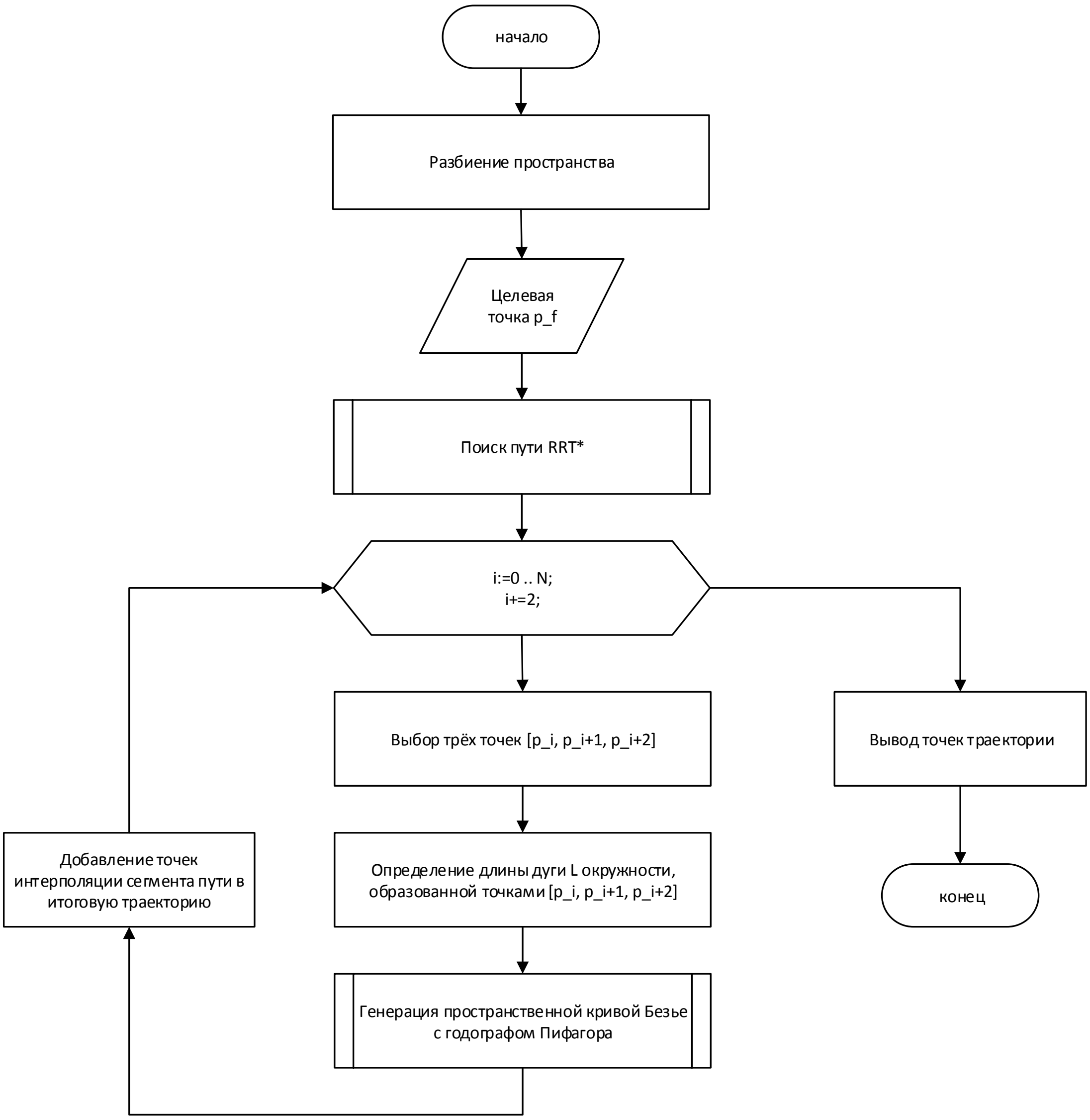

Рис. 1. – Блок-схема разработанного алгоритма построения оптимальных траекторий

Каждая отдельная кривая представлена набором промежуточных точек, попадающих в новое множество. По итогу, образованное множество точек может быть использовано для плавного перемещения агента к целевой точке [11].

Результаты вычислительных экспериментов

Оценка погрешности отклонения от траектории производилась по каждому отдельному агенту в группе БПЛА. На рис. 2 красная линия представляет сгенерированную траекторию, которую должен проходить БПЛА. Синяя линия представляет фактическую траекторию, пройденную отдельным БПЛА.

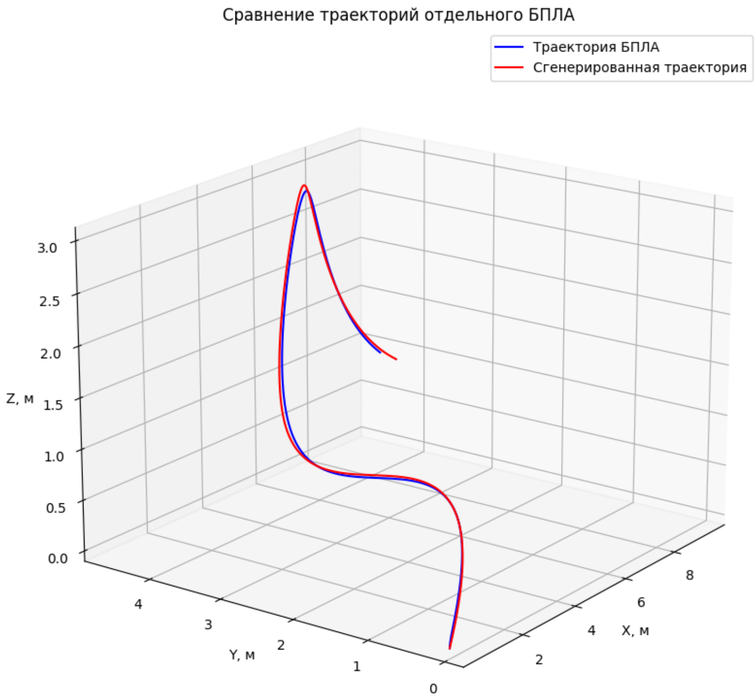

Рис. 2 – Сгенерированная и пройденная траектории при проведении испытания

Расчёт погрешности отклонения пройденной БПЛА траектории от сгенерированной при проведении испытания производился по формуле 24:

$$e_{traj}(t) = \frac{|\|p_{curve}(t)\|_2 - \|p_{uav}(t)\|_2|}{\|p_{curve}(t)\|_2}, \quad (24)$$

где $t \in [0, \dots, T]$ – дискретные значения времени, $p_{curve}(t) \in \mathbb{R}^3$, $p_{uav}(t) \in \mathbb{R}^3$ – точка сгенерированной траектории и фактической пройденной траектории в момент времени t соответственно. Для повышения точности оценки ошибки проведено 1000 симуляционных испытаний. Сведение множества параметризированных значений ошибки к единому производится по формуле среднеквадратичного отклонения:

$$S(t) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(e_i(t) - \bar{e}(t)\right)^2}, \quad (25)$$

где N – число симуляционных испытаний, $e_i(t)$ – точка параметризированной ошибки i-го симуляционного испытания в момент времени t, $\bar{e}(t)$ – среднее арифметическое значение параметризированной ошибки всех испытаний в момент времени t.

При вычислении ошибки по формуле (24), получим график, представленный на рис. 3. Как видно из графика, начальные шаги слежения обладают высокой ошибкой, что обусловлено началом поиска оптимальных решений и большой начальной дистанцией БПЛА от стартовой точки траектории. Уже через несколько шагов ошибка сходится к минимальному показателю, находящемуся в пределах 6.5-7%.

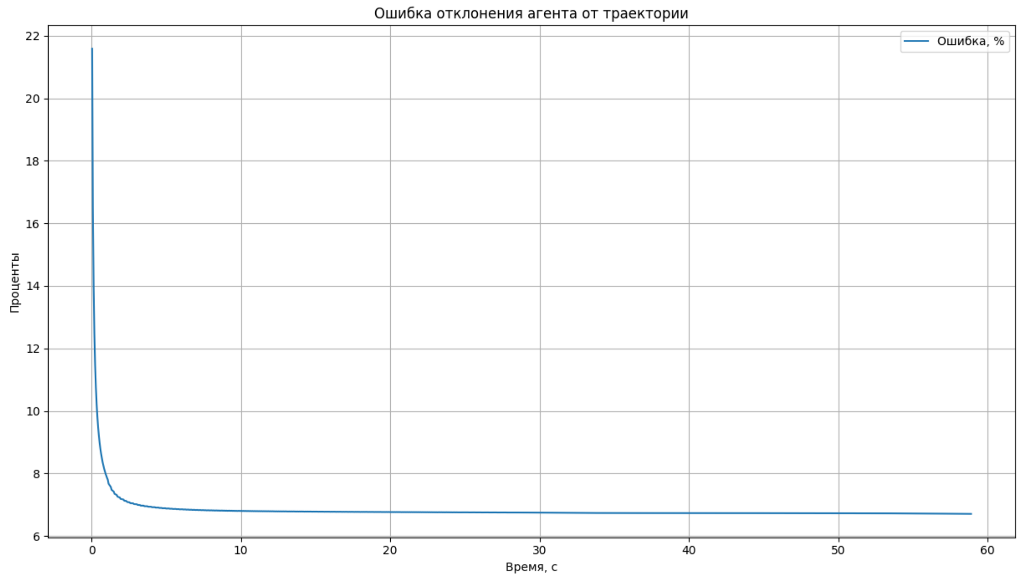

Рис. 3 – Наблюдаемая среднеквадратичная ошибка слежения траектории на основании 1000 симуляционных испытаний

Разработанный метод оптимизации траекторий движения БПЛА на основе пространственных кривых Безье 5-го порядка с годографом Пифагора, позволяет получать гладкие проходимые траектории [12].

Выполнено масштабирование метода оптимизации траекторий движения БПЛА на основе пространственных кривых Безье 5-го порядка с годографом Пифагора для кооперативного параллельного перемещения группы автономных БПЛА за счёт простой параметризации кривых Безье с годографом Пифагора. Метод позволяет устранить возникновение неустойчивых состояний и отклонений от заданной траектории отдельных автономных БПЛА, обусловленных резкими изменениями в узловых точках линейно-кусочных траекторий.

Заключение

В данной статье описан способ оптимизации процесса оптимизации траектории используя пространственные кривые Безье с годографом Пифагора так, что каждая пара вершин, ранее образовывавшая ребро, станет конечными контрольными точками кривой. Поскольку кривая задаётся с помощью касательных при точках, становится возможным производить сглаживание углов двух отдельно взятых рёбер таким образом, что БПЛА получает возможность обходить их с заранее заданной скоростью без существенного замедления и повышенных энергозатрат.

Литература (References)

1. Meng J., Pawar V., Kay S., Li A. UAV path planning system based on 3D informed RRT* for dynamic obstacle avoidance, 2018// IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). IEEE, pp. 1653 – 1658.
2. Moon H.P., Farouki R.T., Choi H.I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants, 2001// Comput. Aided Geom. Des. Vol. 18, № 2. pp. 93–115.
3. Farouki R.T. Existence of Pythagorean-hodograph quintic interpolants to spatial G1 Hermite data with prescribed arc lengths, 2019 // J. Symb. Comput. Vol. 95. pp. 202–216.

4. Farouki R.T. Pythagorean-hodograph curves: Algebra and geometry inseparable, 2007, Berlin, Germany: Springer. pp. 523–542.
5. Farouki R.T. Pythagorean hodograph curves in practical use, 1992// Geometry Processing for Design and Manufacturing. Society for Industrial and Applied Mathematics. pp. 3–33.
6. Hyunchul Shim D., Kim H.J., Sastry S. Control system design for rotorcraft-based unmanned aerial vehicles using time-domain system identification, 2002 // Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications. Conference Proceedings (Cat. No.00CH37162). IEEE. pp.808 – 813.
7. Chinedu Amata Amadi W.S. Design and implementation of Model Predictive Control on Pixhawk Flight Controller, 2018, Stellenbosch University. pp.70 – 112.
8. Sa I., Kamel M. S., Khanna R., Popovic M., Nieto J. I., Siegwart R. Dynamic System Identification, and Control for a cost effective open-source VTOL MAV, 2017. pp 605 – 620.
9. Sarim M., Nemati A., Kumar M., Cohen K. Extended Kalman Filter based quadrotor state estimation based on asynchronous multisensor data, 2015// ASME Dynamic Systems and Control Conference. American Society of Mechanical Engineers. pp. 1 – 10.
10. Tsay T.-S. Guidance and Control Laws for Quadrotor UAV, 2014 // WSEAS. Vol. 9. pp. 606–613.
11. Bansal S., Akametalu A., Jiang F., Laine F., Tomlin C. J. Learning quadrotor dynamics using neural network for flight control, 2016. arxiv.org/pdf/1610.05863.pdf.
12. Garcia G.A., Kimet A. R. B., Jackson E., Keshmiri S. S., Shukla D. Modeling and flight control of a commercial nano quadrotor, 2017 // International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE. pp. 524 – 532.