Определение критических напряжений в оболочках больших гибкостей

Т.М. Чапаев, С.О. Курбанов, А.А. Созаев, Э.Э. Кертиева

Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик

Аннотация: Данная статья посвящена определению критических напряжений в оболочках больших гибкостей. Задача решалась с помощью энергетического критерия в форме Ритца-Тимошенко, являющегося одним из наиболее часто применяемых при решении задач устойчивости. Это обусловлено тем, что с энергетических позиций можно лучше описать особенности поведения любой системы, и при этом решения задач получаются более простыми. Кроме того упрощается учет влияния таких факторов как начальные совершенства, силы трения между оболочкой и обмоткой, а также и другие особенности задачи устойчивости предварительно напряженной оболочки.
Ключевые слова: расчет устойчивости, устойчивость стенки, предварительное напряжение, внутреннее боковое давление, упругий отпор.

Задача определения критических напряжений в оболочках решается с помощью энергетического критерия в форме Ритца-Тимошенко, являющегося одним из наиболее часто применяемых при решении задач устойчивости [1-4]. Это обусловлено тем, что с энергетических позиций можно лучше описать особенности поведения любой системы, и при этом решения задач получаются более простыми. Кроме того упрощается учет влияния таких факторов, как начальные совершенства, силы трения между оболочкой и обмоткой, а также и другие особенности задачи устойчивости предварительно напряженной оболочки.

Согласно энергетическому критерию Ритца-Тимошенко потенциальная энергия системы (оболочка-обмотка) до потери устойчивости будет равна потенциальной энергии системы после потери устойчивости [5, 6].

Если принять, что до потери устойчивости потенциальная энергия системы равна U_0, а после потери устойчивости U, то можно записать:

$$U - U_0 = 0. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия системы после потери устойчивости определяется выражением:

$$U = U_{ОБМ} + U_C + U_{ТР} + U_H + U_m + П, \qquad (2)$$

где: $U_{ОБМ}$ – потенциальная энергия деформации обмотки при выпучивании оболочки;
U_C – потенциальная энергия деформации оболочки при изменении усилия в ней;
$U_{ТР}$ – потенциальная энергия сил трения между оболочкой и обмоткой возникающих при их взаимном сдвиге в момент выпучивания;
U_H – потенциальная энергия изгиба оболочки;
U_m – потенциальная энергия образования шарнира пластичности в точке заострения;
$П$ – потенциал сил радиального давления обмотки на оболочку.

Критическое усилие можно определить как минимальное, при котором потенциальная энергия системы до и после потери устойчивости не изменяется [2, 4, 5].

Для определения составляющих, входящих в уравнение баланса энергии в формуле (1), необходимо задать линию прогибов. От правильности выбора функции, аппроксимирующей линию прогибов, зависит точность получаемого решения. В работах [3, 6, 7, 8] принимается, что при потере устойчивости оболочка не выпучивается за начальный контур, однако экспериментальные данные [9,10] показывают, что это не всегда так. Величина деформаций зависит от изгибной жесткости обмотки: при абсолютно гибкой обмотке она будет максимальной, а при абсолютно жесткой выпучивания за наружный контур не произойдет.

Для случаев, когда жесткость обмотки соизмерима с жесткостью оболочки, то есть при соотношении толщины обмотки и оболочки $t_2/t_1 = 0{,}1 \div 1{,}0$, принято выражение для прогибов, достаточно близко отражающее экспериментальные формы выпучивания оболочки [11].

При потере устойчивости гибких стальных оболочек с гибкостью оболочки $\lambda > 300$, в соответствие с экспериментальными данными, наиболее вероятна плавная форма вмятины без заострения в центре, соответствующая схеме на рис. 1.

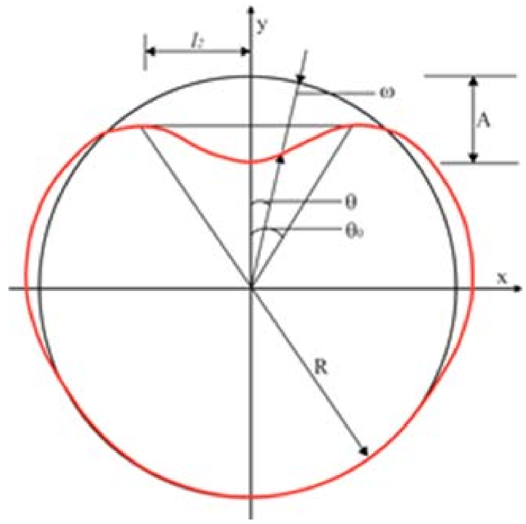

Рисунок 1 Потеря устойчивости гибкой стальной оболочки при $\lambda > 300$

Как показали исследования, потеря устойчивости таких оболочек происходит при напряжениях, намного меньших предела текучести, вследствие чего образования шарнира пластичности не происходит. Поэтому в уравнении баланса энергии не входит потенциальная энергия образования шарнира пластичности и выражение (1), можно записать в следующем виде:

$$\Delta U = U_{ОБМ} + U_C + U_{ТР} + U_H + П - U_0 = 0, \tag{3}$$

где: U_0 – потенциальная энергия системы.

Как показали экспериментальные исследования [11], величина критических усилий определяется по формуле:

$$N_0 = \frac{U_H + \frac{t_1^2}{2}\sigma_{T1}\varphi + \pi R B_2 \xi^2\left(1+\frac{B_2}{B_1}\right) + B_2\xi C_1}{2\pi R\xi\left(1+\frac{B_2}{B_1}\right) + C_1 - f_{TP}\xi\left(\pi - \frac{\theta_0}{2}\right)^2 R}. \tag{4}$$

где: B_1 – расчетная ширина кольца, вырезанного из оболочки, обычно принимаемая равной единице;

B_2 – жесткость обмотки на растяжение, $B_2 = E_2 t_2$;

σ_{T1} – предел текучести стали оболочки;

θ_0, θ, f – см. рис. 1.

Для определения составляющих входящих в уравнение (4), примем выражение аппроксимирующее линию прогибов наиболее близко отражающее фактическую форму, полученную при испытаниях [9, 10]:

$$w = f\left(\cos\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{\eta_{об}}\cos^2\frac{3}{2}\theta\right), \tag{5}$$

где: $\eta_{об}$ – варьируемый параметр, характеризующий степень выпучивания оболочки за начальный круговой контур при потере устойчивости в зависимости от жесткости обмотки.

После преобразований получаем:

$$f = \frac{R}{\cos\frac{3}{2}\theta_0\left(1 + \frac{\cos 1{,}5\theta_0}{\eta_{об}}\right) + 3\sin\frac{3}{2}\theta_0 ctg\theta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\eta_{об}}\cos\frac{3}{2}\theta_0\right)}. \tag{6}$$

Полная длина обмотки, окружающей оболочку после потери устойчивости определяется по формуле:

$$l = 2(l_1 + l_2). \tag{7}$$

Относительная деформация обмотки ξ_1 (уменьшение ее длины вследствие потери оболочкой устойчивости) в случае, когда оболочка не имеет начальных вмятин, может быть определена по формуле:

$$\xi_1 = \frac{2\pi R - l}{2\pi R}. \tag{8}$$

В реальных оболочках обычно имеются начальные вмятины и форму этих вмятин можно принять в запас устойчивости, совпадающей с той, которая образуется при потере устойчивости:

$$w_0 = f_0\left(\cos\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{\eta_{об}}\cos^2\frac{3}{2}\theta\right), \qquad (9)$$

где: f_0 – амплитуда начального прогиба оболочки.

Наличие начальник вмятин приводит к уменьшению относительной деформации обмотки при выпучивании оболочки на величину. Поэтому формула для определения относительной деформаций обмотки с учетом формул (5) ÷(9) после интегрирования и соответствующих преобразований имеет вид:

$$\xi = \xi_1 - \xi_0 = 1 - \frac{1}{\pi R}\left\{\begin{aligned} & R\left[X_1 + X_2 + \left(X_3 + X_4 + X_5\right)\frac{1}{2R^2}\right] + \\ & + \left[R - \left(f - f_0\right)\left(\cos\frac{3}{2}\theta_0 + \frac{1}{\eta_{об}}\cos^2\frac{3}{2}\theta_0\right)\sin\theta_0\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

где: $X_1 = Y_1 - \left(f - f_0\right)\frac{\pi - \theta_0}{2\eta_{об}R}$, $Y_1 = \pi - \theta_0 + \frac{2}{3R}\left(f - f_0\right)\left(1 + \sin\frac{3}{2}\theta_0\right)$,

$X_2 = \left(f - f_0\right)\frac{\sin 3\theta_0}{6\eta_{об}R}$, $X_3 = \frac{9}{8}\left(f - f_0\right)^2\left(\pi - \theta_0 + \frac{1}{3}\sin 3\theta_0\right)$,

$X_4 = -\frac{2\left(f - f_0\right)^2}{\eta_{об}}\left(1 + \sin^3\frac{3}{2}\theta_0\right)$, $X_5 = \frac{9\left(f - f_0\right)^2}{8\eta_{об}^2}\left(\pi - \theta_0 + \frac{1}{6}\sin 6\theta_0\right)$.

Зная из формулы (10) относительную деформацию обмотки ξ, можно определить потенциальную энергию деформации обмотки в процессе выпучивания оболочки по формуле:

$$U_{ОБМ} = \frac{t_2}{E_2}R\int_0^{\pi}\frac{\left(N_0 - B_2\xi\right)^2}{t_2^2}d\theta = \frac{\pi R\left(N_0 - B_2\xi\right)^2}{B_2}. \qquad (11)$$

С учетом формулы (10), принимаем, что силы трения между оболочкой и обмоткой, возникающие в момент выпучивания оболочки, равномерно распределены по всему периметру соприкосновения между ними, поэтому потенциальная энергия этих сил выражается формулой:

$$U_{TP}=2R\int_{\frac{\theta_0}{2}}^{\pi} f_{TP}\frac{N_0}{R}\xi\left(\pi-\theta\right)Rd\theta dx=N_0 f_{TP}\xi R\left(\pi-\frac{\theta_0}{2}\right)^2. \qquad (12)$$

Энергия деформации оболочки при изменении кольцевого сжимающего усилия в ней в результате выпучивания с учетом формулы (10), определяется по формуле:

$$U_C=\frac{t_1}{E_1}R\int_0^{\pi}\frac{\left(N_0-B_2\xi\right)^2}{t_1^2}d\theta=\frac{\pi R\left(N_0-B_2\xi\right)^2}{B_1}. \qquad (13)$$

Энергию изгиба оболочки при выпучивании с учетом влияния начальных вмятин и изгибной жесткости обмотки можно определить по формуле:

$$U_H=\frac{1}{R^3}\left[\frac{E_1t_1^3}{12\left(1-\mu^2\right)}+\frac{E_0\left(mt_2\right)^3}{24}\right]\left(f-f_0\right)^2\left[\frac{25\pi}{32}-\frac{10}{9\eta_{об}}+\frac{51\pi}{8\eta_{об}^2}\right]. \qquad (14)$$

Потенциал сил радиального давления для данной формы выпучивания оболочки определим с учетом формул (6), (9) и (10) по формуле:

$$П=\left(N_0-B_2\xi\right)C_2, \qquad (15)$$

где: $C_2=\left(f-f_0\right)\left[\frac{4}{3}\left(1+\sin\frac{3}{2}\theta_0\right)+\frac{\pi-\theta_0}{\eta_{об}}-\frac{\sin3\theta_0}{3\eta_{об}}+\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\theta_0+\frac{1}{12}\eta_{об}\sin3\theta_0+\frac{\theta_0}{4\eta_{об}}\right].$

Потенциальная энергия системы до потери устойчивости оболочки определяется выражением:

$$U_0=\frac{t_1}{E_1}R\int_0^{\pi}\frac{N_0^2}{t_1^2}d\theta+\frac{t_2}{E_2}R=\pi RN_0^2\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right), \qquad (16)$$

Из формулы (2) с учетом полученных результатов, определим значения

N_0 по формуле:

$$N_0 = \frac{U_н + \pi R B_2 \xi^2 \left(1 + B_1/B_2\right) + B_2 \xi C_2}{2\pi R \xi \left(1 + B_1/B_2\right) + C_2 - f_{тр} \xi R \left(\pi - \dfrac{\theta_0}{2}\right)^2}. \tag{17}$$

Изменяя θ_0 от 0,01 до 0,49 с шагом 0,01, а $\eta_{об}$ – от 1 до 2 с шагом 0,05 численным путем определяем минимальное значение критического сжимающего усилия в оболочке $N_{кр}$, а затем критические напряжения $\sigma_{кр} = N_{кр}/t_1$.

На рис. 2 приведены результаты, полученные по формуле (17) в сравнении с экспериментальными данными, взятыми из [4]. Расчеты выполнены при:

$$E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5\,МПа,\ E_2 = 2{,}0 \cdot 10^5\,МПа,\ t_1 = t_2 = 0{,}02\ см,\ f_0 = t_1,$$

$$\lambda = R/t_1 = 200 \div 400,\ f_{тр} = 0{,}3 \text{ и } f_{тр} = 0.$$

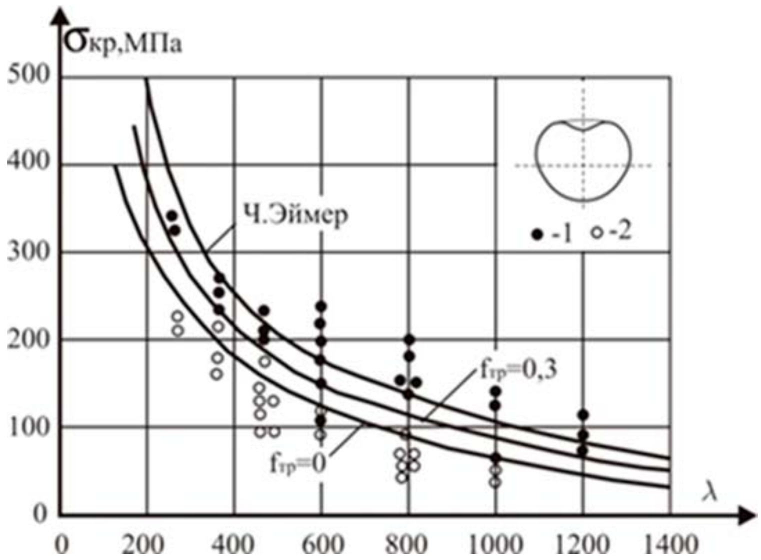

Рисунок 2 – Зависимость критических напряжений от гибкости

Снижение экспериментальных величин критических напряжений при отсутствии сил трения (точки 2) по отношению к результатам с учетом сил трения (точки 1) составляет в среднем 20÷30%, а теоретические величины критических напряжений, получаемых по формуле (17) при $f_{тр} = 0$ и ниже на 15÷20%, чем при $f_{тр} = 0$.

В целом, результаты, получаемые по формуле (17) при $f_{тр} = 0,3$, примерно на 10% меньше средних данных, полученных экспериментально [4], и результатов, получаемых по формуле Ч. Эймера [3].

На рис. 3 приведена зависимость критических напряжений от жесткости обмотки. Видно, что при изменении соотношения t_0/t_1 от 0,2 до 1,0 величина критических напряжений увеличивается в среднем в 2 раза, то есть в этом случае влияние жесткости обмотки сказывается в большей степени, чем для оболочек, теряющих устойчивость по форме с заострением в центре вмятины (см. рис. 1). Это, по-видимому, объясняется тем, что для второй формы выпучивания характерно выпучивание оболочки за наружный контур в большей мере, чем для первой формы и поэтому зависимость критических напряжений от жесткости обмотки проявляется в большей степени.

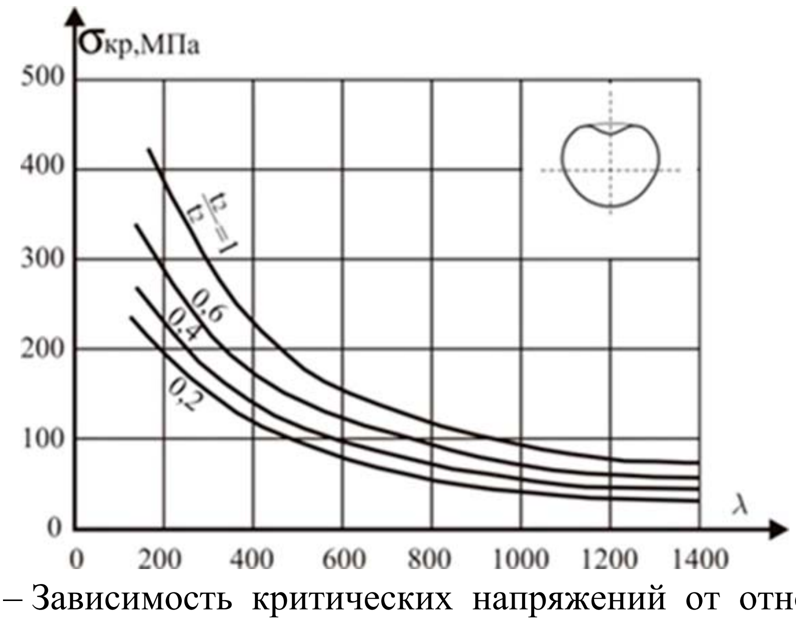

Рисунок 3 – Зависимость критических напряжений от относительной жесткости обмотки

Результаты расчета оболочек при различных величинах начального прогиба показали, что при изменении f_0 от $0{,}01t_1$ до $2t_1$ величина критических напряжении снижается на 18÷22%.

Таким образом, по формуле (17) можно получить величину критических напряжений с учетом влияния всех основных факторов: жесткости обмотки, сил трения, начальных несовершенств.

Литература

1. Александров А.В., Лащенков Б.Я. О применении энергетического метода в задачах устойчивости упругих систем // Строительная механика и расчет сооружений. М.: 1965. №5. 32 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: «Машиностроение», 1978. 311 с.
3. Алфутов Н.А., Балабух Н.А. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального состояния // ПММ, т. XXXII, вып. 1, 1968. 703-707 с.
4. Астряб С.М. Экспериментальные исследования устойчивости тонкостенного кольца, усиленного натянутой гибкой нитью // Изв. ВУЗов, Сер. Строительства и архитектура. М. 1968. №2. 12-17 с.
5. Fung Y., Sechler E. Buckling of thin walled circular cylinders under axial compression and internal pressure //Aeronaut. Sci. 1957, №5, pp. 24-30.
6. Астряб С.М., Гусев Б.М. Экспериментально-теоретическое исследование прочности предварительно напряженной цилиндрической оболочки // Труды НИИХИММаш. М., 1972, № 56, с. 5-10.
7. Вольмир А.С. О влиянии начальных неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем // ДА НСССР, т. 113, №2 (1957). 291-293 с.
8. Massolani F., Ramasanov E. Ricerca sperimentale sulla stabilita dei recipenti

con avvolgimento sotto pressione esterna // Costruzioni Metalliche, 1980, №4, pp. 187-199.
9. Чапаев Т.М., Хасанов М.М., Амшоков Б.Х. Устойчивость стенки стального силоса при осесимметричном выпучивании и начальном искривлении оболочки, направленном наружу // Инженерный вестник Дона, 2018, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/5056.
10. Чапаев Т.М., Балкизов А.Б., Сасиков А.С. Анализ известных теоретических и экспериментальных исследований устойчивости стенки цилиндрического зернохранилища // Инженерный вестник Дона, 2018, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5292.
11. Чапаев Т.М. Определение критических напряжений в оболочках малых гибкостей // Известия КБГАУ. Нальчик, 2017, № 1(15), с. 81-89.

References

1. Aleksandrov A.V., Lathenkov B.Ya. Stroiteljnaya mekhanika i raschet sooruzheniyj. M.: 1965. №5. 32 p.
2. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem [Basis of calculation for stability of elastic systems]. M.: «Mashinostroenie», 1978. 311 p.
3. Alfutov N.A., Balabukh N.A. PMM, t. KhKhKhII, vihp. 1, 1968. 703-707 s.
4. Astryab S.M. Izv. VUZov, Ser. Stroiteljstva i arkhitektura. M. 1968. №2. pp. 12-17.
5. Fung Y., Sechler E. Aeronaut. Sci. 1957, №5, pp. 24-30.
6. Astryab S.M., Gusev B.M. Trudih NIIKhIMMash. M., 1972, № 56, pp. 5-10.
7. Voljmir A.S. DA NSSSR, t. 113, №2 (1957), pp. 291-29.
8. Massolani F., Ramasanov E. Costruzioni Metalliche, 1980, №4, pp. 187-199.
9. Chapaev T.M., Khasanov M.M., Amshokov B.Kh. Inzhenernyj vestnik

Dona, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/5056.

10. Chapaev T.M., Balkizov A.B., Sasikov A.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5292.
11. Chapaev T.M. Izvestiya KBGAU. Naljchik, 2017, № 1(15), pp. 81-89.