Математическое моделирование в восстановлении изображения по проекциям

Е.В. Акиндинова, Д.И. Петренко

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация: В работе изучается математическая модель функции, восстанавливаемой по интегралам. С целью уменьшения искажения изображения при реконструкции предлагается представление искомой функции в виде суммы функций Гаусса. Для изучения модели разработан программный комплекс. Определены параметры и вид сетки, дающие наименьшую погрешность в данной модели.
Ключевые слова: математическое моделирование, обратные задачи, преобразование Радона, реконструкция изображения, функция Гаусса, компьютерная томография.

Введение

Во многих отраслях науки и техники приходится работать с таким видом информации как изображение. Вследствие этого возникает многообразие задач и соответствующие алгоритмы их решения. Например, восстановление поврежденных фотографий [1], цифровая реставрация узорного полотна [2]. В настоящей статье остановимся на задачах, связанных с реконструкцией изображения в компьютерной томографии. Последние достаточно широко представлены в астрофизике, медицине, сейсмологии, радиолокации, кристаллографии. Методы томографии используются при техническом контроле изделий, в электронной микроскопии – для получения структуры кристаллов, в геофизике - при поиске месторождений полезных ископаемых [3,4].

Математически речь идет об обратных задачах: когда по имеющимся интегральным характеристикам находят значение функции. Решение задачи для многомерной функции было предложено Радоном в 1917 году, однако на практике оно имеет ограниченное применение. Сам процесс получения изображения состоит из сбора информации по проекционным данным на первом этапе и процедуры восстановления по этим данным на втором этапе, по сути решения интегрального уравнения. Известны различные методы решения и соответствующие численные алгоритмы: свертки и обратной проекции, Фурье-алгоритм, разложение функции в ряд [5]. В [6] приведен обзор существующих программных продуктов для оцифровки изображений и описаны трудности, встречающиеся при их использовании: ограничения по объектам исследования, проблемы построения конечноэлементной сетки, определенный формат выходных данных. Поэтому вопросы, связанные с исследованием процесса реконструкции и построением новых алгоритмов является актуальными и в настоящее время.

При восстановлении изображений хорошо известен следующий эффект: если есть резкий перепад значений искомой функции, то происходит серьезное искажение изображения, как в области перепада, так и по всему объекту [7]. В настоящей статье изучается модель представления искомой функции в виде суммы гауссовских функций с целью сглаживания резких перепадов. Практическая значимость состоит в создании программного комплекса для исследования модели и возможности последующего использования данной модели в построении алгоритма восстановления, что является отдельной самостоятельной задачей.

Преобразование Радона

Преобразование Радона определяется различными способами [8,9,10]. Пусть задана функция $f(x,y)$, тогда преобразование задается как интеграл от этой функции вдоль линии $y = kx + m$:

$$(Rf)(k,m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, kx+m)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(y-kx-m)dxdy.$$

В более общей форме можно записать:

$$(Rf)(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(\lambda_1-\lambda_2 x-\lambda_3 y)dxdy.$$

Поскольку в данном виде прямая линия описывается тремя параметрами, что является избыточным, то между ними должна быть связь. Наиболее часто используются два способа задания параметров, в интересующем нас случае $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(s,\cos\varphi,\sin\varphi)$, и прямая L представляется в нормальной форме $x\cos\varphi+y\sin\varphi-s=0$. Тогда имеем:

$$(Rf)(s,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(s_1-x\cos\varphi-y\sin\varphi)dxdy=g(s,\varphi). \qquad (1)$$

Преобразуем (1), учитывая свойства δ - функции.

$$g(s,\varphi)=\frac{1}{|\sin\varphi|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\frac{s-x\cos\varphi}{\sin\varphi})dx.$$

С учетом замены $|x=s\cos\varphi-t\sin\varphi|$ получим:

$$g(s,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\varphi-t\sin\varphi,s\sin\varphi+t\cos\varphi)dt.$$

Введем векторы:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\theta=\begin{pmatrix}cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix},\ \theta^{\perp}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Вектор θ - это нормаль к прямой L, $\theta^{\perp}$ - направляющий вектор L. Уравнение L в параметрической форме имеет вид $X=s\theta+t\theta^{\perp}$. При интегрировании функции $f(x,y)$ вдоль этой прямой результат будет зависеть от параметров θ,s. С учетом введенных обозначений получим функцию:

$$(Rf)(\theta,s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s\theta+t\theta^{\perp})dt=g(\theta,s). \qquad (2)$$

Таким образом, преобразование Радона – это отображение функции, заданной на плоскости, в множество ее линейных интегралов. Существуют различные виды данного преобразования и обобщения, например, кольцевое преобразование Радона [11]. В [12] вычислены как прямые, так и обратные преобразования для ряда функций и показано, что использование функций с точечной симметрией существенно упрощает расчеты.

Постановка задачи и математическая модель

Для ослабления эффекта искажения изображения, вызванного резким перепадом значений функции $f(x,y)$, в алгоритмах восстановления используют различные методы фильтрации. В настоящей статье рассматривается вопрос, касающийся экспоненциального сглаживания с помощью функции Гаусса. Такой выбор обусловлен тем, что, во-первых, для них резко снижается погрешность восстановления вблизи границ, во-вторых, интегралы считаются аналитически.

Таким образом, ставится задача: можно ли искомую функцию, например, распределения коэффициента поглощения, заменить суммой гауссовых функций, сосредоточенных в разных точках плоскости. Другими словами, речь идет о следующем представлении искомой функции

$$f(\vec{r}) = \sum_{p=1}^{N} f_p \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_p)^2}{2\sigma_p^2}\right)$$

N - число точек на плоскости, $\vec{r}_p$ - их радиус-векторы, f_p - постоянные коэффициенты. Вычислим преобразование Радона по формуле (2).

$$(\vec{r}-\vec{r}_p)^2 = r_p^2 + s^2 + t^2 - 2(s\vec{r}_p\theta + t\vec{r}\theta^{\perp}) = (s-\vec{r}_p\theta)^2 + (t-\vec{r}_p\theta^{\perp})^2 .$$

$$f(\vec{r}) = \sum_{p=1}^{N} f_p e^{-\frac{(s-\vec{r}_p\theta)^2}{2\sigma_p^2}} e^{-\frac{(t-\vec{r}_p\theta^{\perp})^2}{2\sigma_p^2}}, \ (Rf)(\theta,s) = \sum_{p=1}^{N} f_p e^{-\frac{(s-\vec{r}_p\theta)^2}{2\sigma_p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\vec{r}_p\theta^{\perp})^2}{2\sigma_p^2}} dt.$$

Окончательно имеем: $(Rf)(\theta,s) = \sigma_p\sqrt{2\pi}\sum_{p=1}^{N} f_p \exp\left(-\frac{(s-\vec{r}_p\theta)^2}{2\sigma_p^2}\right).$

Практическая значимость поставленной задачи состоит в том, что данная идея представления функции может быть положена в основу алгоритма, где восстановление $f(x,y)$ сводится к нахождению коэффициентов f_p. Причем, поскольку алгебраическое решение затруднено, нужно будет использовать итерационные методы.

Перед реализацией алгоритма необходимо подробное изучение предложенной модели. Для этой цели был создан программный комплекс в среде программирования Embarcadero RAD Studio на языке программирования Delphi. Моделирование функции $f(\vec{r})$ подробно проводилось для случая постоянной $f(x,y)$. При построении данной модели возникли следующие проблемы: а) определение значений σ_p; б) выбор расположения точек на плоскости. Для их решения была выбрана следующая схема: σ_p для всех точек одинаковы, так как необходимо сохранение системы точек при параллельных сдвигах по осям на определенные шаги; что касается расположения точек на плоскости, то рассматривались два вида сеток: четырехугольная и шестиугольная. При этом изучались два вопроса: насколько хорошо при различных σ и сетках моделировались сама функция и интегралы от нее вдоль прямых сканирования.

Программный комплекс реализован в виде программы, состоящей из модулей. В результате работы четырех из них осуществляется запись результатов в файл и графическая визуализация (для каждой сетки), один находит оптимальное значение сигма, четыре других выводят численные результаты (*F* и *RF*), и один модуль сравнивает используемые сетки (сетка *F* 4 и 6).

Окно пользователя имеет вид, представленный на рис. 1. Вначале необходимо задать радиус сканирования R, число шагов (*ns*) по переменной *s* и выбрать сетку.

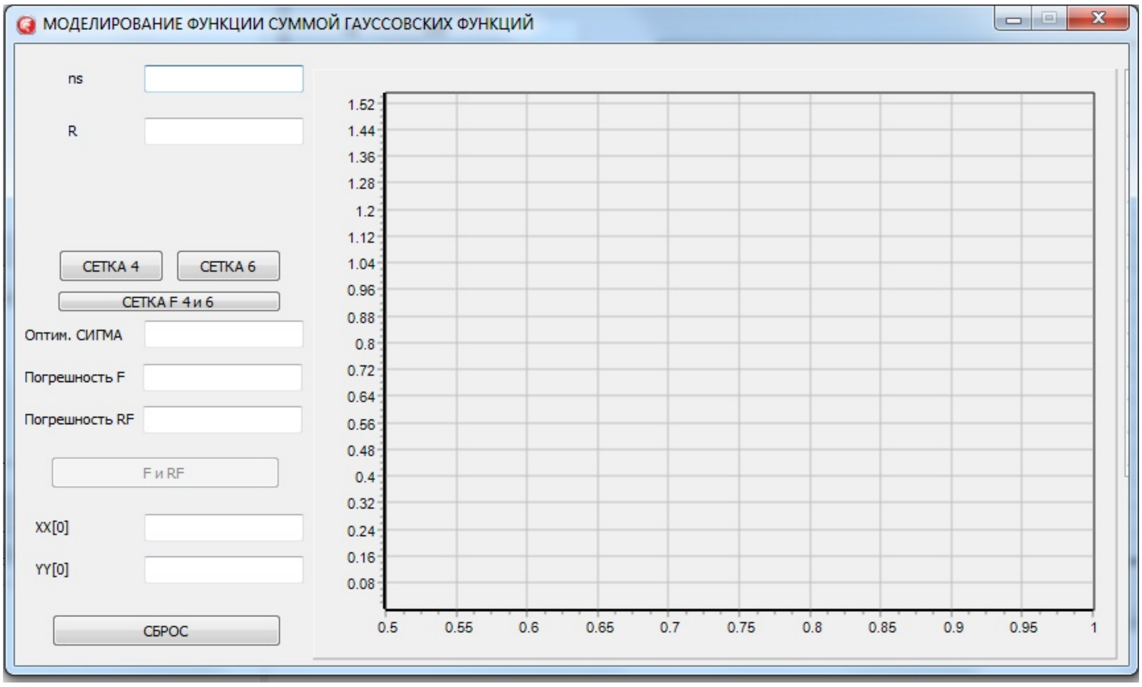

Рис.1 – Окно пользователя

Для получения постоянной функции необходимо добиться наибольшей равномерности $f(\vec{r})$ на выбранных сетках. Основным управляющим параметром является значение σ.

Модуль *fs4.pas* (*fs6.pas*) вычисляет значения $f(\vec{r})$ для точек, расположенных вне узлов сетки и среднее значение этой функции. При этом оценивается равномерность $f(\vec{r})$, в качестве меры используется значение относительной погрешности (в процентах):

$$c_f = \frac{\max\limits_D \left| f(\vec{r}) - \overline{f(\vec{r})} \right|}{\overline{f(\vec{r})}} \cdot 100 .$$

В модуле *Rfs4 (Rfs6)* рассчитываются значения погрешности (в процентах) $c_{Rf} = \dfrac{\max\limits_D \left| Rf(\theta, s) - Rftest \right|}{Rftest} \cdot 100$ в зависимости от параметра σ. То есть значение преобразования Радона сравнивается с тестовым значением (*Rftest*), которое для случая постоянной $f(x, y)$ равно длине прямой, по которой считается интеграл, внутри области *D*: $Rftest = 2\sqrt{R^2 - s^2}$.

При вычислении интегралов по прямым необходимо решить, как быть с границей круга сканирования. Здесь выбирается такая модель: пусть *d*-расстояние от данной точки до границы круга сканирования, то есть $d = R - |\vec{r}|$, тогда зададим f_p следующим образом: $f_p = \dfrac{d}{\sigma}$ для $0 < d \le \sigma$, $f_p = 1$, если $d > \sigma$ и $f_p = 0$ для случая $d \le 0$. Другими словами, применяется процедура сглаживания границ. Результаты записываются в файлы и представляется в виде графической зависимости $cf(\sigma)$ и $cRf(\sigma)$.

Оптимальное значение сигма находится исходя из условия: абсолютное значение разности погрешности для функции и ее интегралов вдоль прямых сканирования должно быть минимальным (модуль *Opt.pas*).

Для сравнения сеток пользователь может выбрать режим представления результатов для четырехугольной и шестиугольной сеток на одной системе координат.

Модули *f4.pas, Rf4.pas, f6.pas, Rf6.pas* дают возможность пользователю исследовать поведение функции и ее преобразования Радона в любой области сканирования, задавая координаты опорной точки (*nx, ny*). Выводятся численные значения функции для некоторой области и ее образа для набора углов (в относительных единицах).

Численная реализация.

Численный эксперимент был проведен для области *D* – круга радиуса *R=1*, числа шагов *ns=256*, тогда шаг сетки $h_s = \dfrac{R}{n_s}$. На рис.2 представлены результаты для погрешностей в случае четырехугольной сетки, оптимальное сигма $\sigma = 0.64h_s$ ($c_f = 0.13\%$, $c_{Rf} = 0.127\%$). В случае шестиугольной сетки $\sigma = 0.575h_s$ ($c_f = 0.11\%$, $c_{Rf} = 0.1\%$). Анализ графика для преобразования Радона показывает, что у c_{Rf} есть минимум по σ, а при увеличении σ

погрешность выходит на конкретное значение, то есть наблюдается эффект насыщения.

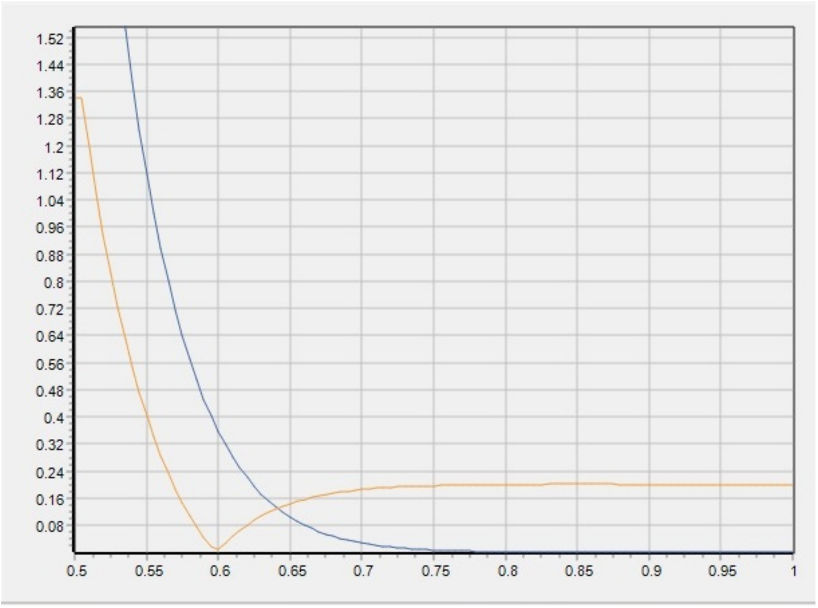

Рис. 2. – Графики зависимости c_f (синий) и c_{Rf} (желтый) от σ

На рис. 3 представлены графики зависимости погрешностей для двух сеток.

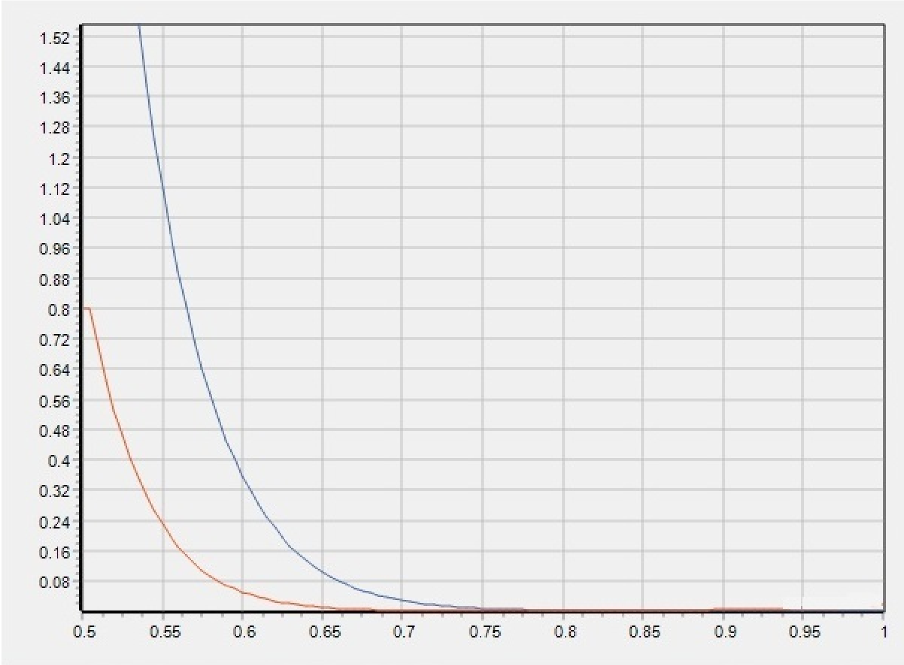

Рис.3. - Графики зависимости c_f для четырехугольной сетки (синий) и шестиугольной (оранжевый)

Отмечается тот факт, что при малых σ погрешность меньше для шестиугольной сетки, это имеет значение, поскольку σ характеризует разрешение алгоритма. На больших σ достигается одинаковая равномерность функции для обеих сеток, причем погрешность практически нулевая. Таким образом, если говорить о выборе сетки, то шестиугольная сетка значительно лучше на малых σ, хотя и четырехугольная применима с практической точки зрения.

Выводы.

В данной статье предложено моделирование искомой восстанавливаемой функции в виде суммы функций Гаусса с одинаковой дисперсией. Для исследования модели разработан программный комплекс. В ходе изучения модели рассмотрены два вида сеток: четырехугольная и шестиугольная. Для обеих сеток показано, что с ростом σ сумма гауссовых функций все точнее приближает постоянную плотность в выделенном фрагменте сканируемого объекта. При моделировании преобразования Радона обнаружено с помощью численных расчетов, что наименьшая погрешность достигается в некотором диапазоне значений σ Проведение количественного анализа изучаемых эффектов и сравнения двух сеток, показало, что шестиугольная сетка дает лучшие результаты. Определены оптимальные значения параметра σ, которые в рамках данной модели дают лучшее приближение, как для функции, так и для ее интегралов вдоль прямых сканирования.

Литература

1. Воронин В.В., Сизякин Р.А., Гапон Н.В., Франц В.А., Колосов А.Ю. Алгоритм реконструкции изображений на основе анализа локальных бинарных окрестностей // Инженерный вестник Дона, 2013, № 3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/1857.

2. Кудрявцева Е.А., Кононова О.С., Юхин С.С. Цифровая реставрация и компьтерное моделирование узорных тканей средствами информационных технологий// Инженерный вестник Дона, 2019, № 4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5839.

3. Gelb J., Roth S., Dong H., Li D., Gu A., Yun S., Yun W. Non-Destructive Local X-Ray Tomography for Multi-Length Scale Analysis of Reservoir Rocks: Validations and Observations. Proc. SCA, SCA2012-59, 2012. URL: jgmaas.com/SCA/2012/SCA2012-59.pdf

4. Sencu R.M., Yang Z., Wang Y., Withers P., Rau C., Parson A. Soutis C. Y. Generation of Microscale Finite Element Models from Synchrotron X-ray CT Images for multidirectional CarbonFibre Reinforced Composites // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2016. №91. pp. 85-95.

5. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989. 240 с.

6. Шпурина Э.П., Добролюбова Д.В., Штанько Е.И. Специальные процедуры для работы с объектами со сложной внутренней структурой по стеку КТ – сканов // Cloud of Science. 2018. Т.5. №1. С. 40-59.

7. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983. 349 с.

8. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 148 с.

9. Toft P. A. The Radon Transform - Theory and Implementation. Kgs. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark (DTU), 1996. 326 p.

10. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 288 с.

11. Котляр В.В., Ковалев А.А. Кольцевое преобразование Радона // Компьютерная оптика. 2003. №25. С. 126-133.

12. Чадов В.Б. О некоторых примерах для иллюстрации метода Радона // Инженерный вестник. 2015. №9. С.1011-1015.

References

1. Voronin V.V., Sizyakin R.A., Gapon N.V., Frants V.A., Kolosov A.YU. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/1857.

2. Kudryavtseva E.A., Kononova O.S., Yukhin S.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5839.

3. Gelb J., Roth S., Dong H., Li D., Gu A., Yun S., Yun W. Non-Destructive Local X-Ray Tomography for Multi-Length Scale Analysis of Reservoir Rocks: Validations and Observations. Proc. SCA, SCA2012-59, 2012. URL: jgmaas.com/SCA/2012/SCA2012-59.pdf

4. Sencu R.M., Yang Z., Wang Y., Withers P., Rau C., Parson A. Soutis C. Y. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2016. №91. pp. 85-95.

5. Troitskiy I.N. Statisticheskaya teoriya tomografii. [Statistical theory of tomography]. M.: Radio i svyaz’, 1989. 240 p.

6. Shpurina E.P., Dobrolyubova D.V., Shtan’ko E.I. Cloud of Science. 2018. V.5. №1. pp. 40-59.

7. Khermen G. Vosstanovleniye izobrazheniy po proyektsiyam. Osnovy rekonstruktivnoy tomografii. [Projection image restoration. Fundamentals of reconstructive tomography]. M.: Mir, 1983. 349 p.

8. Khelgason S. Preobrazovaniye Radona. [The Radon Transform]. M.: Mir, 1983. 148 p.

9. Toft P. A. The Radon Transform - Theory and Implementation. Kgs. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark (DTU), 1996. 326 p.

10. Natterer F. Matematicheskiye aspekty komp’yuternoy tomografii. [Mathematical aspects of computed tomography]. M.: Mir, 1990. 288 p.

11. Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Komp’yuternaya optika. 2003. №25. pp. 126-133.

12. Chadov V.B. Inženernyj vestnik. 2015. №9. pp.1011-1015.